

## II-8 降雨～流出系の非線形核の導出に関する考察

北海道大学工学部 学生員 ◎今西隆美  
同 上 正 員 藤田睦博

### 1 はじめに

流出現象を解析するにあたって、種々の手法が提案されている。表-1は、Kisiel<sup>1</sup>による流出モデルの分類を示したものである。一方、方法論的立場で

表-1 流出モデルの分類

表をみると次のように分類できる。

#### 1) Dynamic Hydrology

#### 2) Stochastic hydrology

この二つの立場は、互いに独立なものではなく同一の現象を対象としているのだから、どこかに接点があるはずである。このような観点から日野<sup>2</sup>らの研究は、注目すべきものであろう。

本研究は、現象を支配している力学的基礎式において不規則に変動する降雨とその流出変動特性について吟味し、これらの変動特性とVolterra展開した線形、非線形核について考察したものである。すなわち表-1でみるならば、時変非線形の分布定数系のモデルを採用し、降雨は空間的に均一だが時間的には不規則に変動している場合を扱

|   |                                  |
|---|----------------------------------|
| 1 | 入力(降雨)                           |
| A | 因果関係と偶然性                         |
| 1 | 決定論的(deterministic)              |
| 2 | 準決定論的(quasi deterministic)       |
| 3 | 確率論的(probabilistic)              |
| B | 空間的、時間的分布                        |
| 1 | 均一(uniform)                      |
| 2 | 不均一(nonuniform)                  |
| 2 | 流域変換系                            |
| A | 因果関係と偶然性                         |
| B | 変換系の線形性と時間不変性                    |
| 1 | 時不変線形(linear time invariant)     |
| 2 | 時変線形(linear time variant)        |
| 3 | 時不変非線形(nonlinear time invariant) |
| 4 | 時変非線形(nonlinear time variant)    |
| C | パラメーター形                          |
| 1 | 集中定数系(lumped parameter)          |
| 2 | 分布定数系(distributed parameter)     |
| 3 | 出力(流出量)                          |
|   | 入力と同じ                            |

いることになる。日野<sup>2</sup>らはWiener-Hermite展開した応答核を扱っているがここではVolterra展開した応答核を扱っている。Volterra核を採用した理由は、降雨が確定関数のときDiskin<sup>3</sup>らによって核の満足すべき条件が与えられており、降雨が不規則関数の場合についてもこれらの諸条件を吟味したかったからである。

### 2 理 論

降雨～流出系が集中定数系で且つ線形推移不変なシステムで近似できるならば、現象は定係数線形微分方程式で記述できる。ゼロ初期条件のとに方程式の非同次解は

$$y(t) = \int_0^{\infty} K_1(\tau) r(t-\tau) d\tau \quad (2.1)$$

$r$ : 降雨量  $y$ : 流出量  $K_1$ : 線形核  
 $r(t)$ が不規則関数である場合、線形核の最良推定値はWiener-Hopfの式で与えられる。

表 2 線形、非線形核の制約条件  
(Diskin & Boneh<sup>3</sup>)

| 線形核 $K_1(\tau)$                                                             | 非線形核 $K_2(\tau_1, \tau_2)$                                                                    |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| $K_1(\tau)=0$ for $\tau \leq 0$                                             | $K_2(\tau_1, \tau_2)=0$ for either $\tau_1 \leq 0$ or $\tau_2 \leq 0$                         |
| $0 \leq K_1(\tau) < B_1$ for $\tau > 0$                                     | $ K_2(\tau_1, \tau_2)  < B_2$ for all $\tau_1$ and $\tau_2$                                   |
| $K_1(\tau)=0$ for $\tau \rightarrow \infty$                                 | $K_2(\tau_1, \tau_2)=K_2(\tau_2, \tau_1)$ for all $\tau_1$ and $\tau_2$                       |
| $\frac{dK_1(\tau)}{d\tau}=0$ for $\tau=0$ and for $\tau \rightarrow \infty$ | $K_2(\tau_1, \tau_2)=0$ for either $\tau_1 \rightarrow \infty$ or $\tau_2 \rightarrow \infty$ |
| $\int_0^{\infty} K_1(\tau) d\tau=1.0$                                       | $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2=0$                       |
| $B_1$ : constant                                                            | $\int_0^{\infty} K_2(\tau, \tau+c) d\tau=0$ for all $c \geq 0$                                |
|                                                                             | $B_2$ : constant                                                                              |

$$C_{yr}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(\tau) C_{rr}(t-\tau) d\tau \quad (2.2)$$

$C_{yr}(t)$ : 降雨～流出量の相互相関関数  $C_{rr}(t)$ : 降雨量の自己相関関数  
一方、(2.1)式を一般化すると(2.3)式が得られる。

$$y(t) = \int_0^{\infty} K_1(\tau) r(t-\tau) d\tau + \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K_2(\tau_1, \tau_2) r(t-\tau_1) r(t-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.3)$$

Diskin & Boneh<sup>3</sup>らは、 $r(t)$  が確定関数のとき核の満足すべき条件として表-2の諸条件式を示している。しかしながら $r(t)$ が不規則関数のときに表-2の結果を直接用いるには問題があり吟味を要する。

次に流出現象を力学的立場から考えてみよう。図 2.1に示すような一定勾配の斜面を考えて、連続の式、運動の式を次のように与える。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = r(t) \quad (2.4)$$

$$q = \alpha y^m \quad (2.5)$$

$y$ : 水深  $q$ : 流出量  $r$ : 降雨量  $\alpha, m$ : 定数

したがって基礎式は、次のようになる。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + \alpha m y^{m-1} \frac{\partial y}{\partial x} = r(t) \quad (2.6)$$

(2.6)式において $r(t)$ が不規則関数であるとき、 $y(t)$ も不規則関数となる。(2.6)式に(2.3)式を代入すると応答核に関する方程式を得ることができるが、不規則関数を扱っているだけに直接応答核を求めることは困難であるしたがって、ここでは最初に(2.6)式の $y(t)$ の変動特性を吟味してから(2.3)式について考えることにする。

## 2.1 $m=1$ の場合(線形系)

$r(t)$  が、白色雑音である場合について考える。統計量を次のように与える。

$$E\{r(t)\} = \bar{r} \quad \text{Var}\{r(t)\} = \sigma^2 \quad C_{rr}(\tau) = \sigma^2 \delta(\tau) \quad (2.7)$$

**平均値** (2.6)式の両辺に期待値を求める演算子  $E$  を作用させると、容易に計算できて

$$E\{y(x, t)\} = \bar{r} \{tU(t) - (t - \frac{x}{\alpha})U(t - \frac{x}{\alpha})\} \quad (2.8)$$

$U(t)$ : 単位ステップ関数

**自己相関関数**  $r(t) = \delta(t)$  ( $\delta(t)$ はデルタ関数)とおくと、(2.6)式よりインパルス応答関数が容易に求まり、線形理論よりこれは線形応答核に等しいので次式を得る。

$$y(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \{U(t) - U(t - \frac{x}{\alpha})\} r(t - \tau) d\tau \quad (2.9)$$

(2.9)式の期待値をとると当然(2.8)式に一致している。(2.9)式より

$$E\{y(x, t_1)y(x, t_2)\} = \sigma^2 (\frac{x}{\alpha} - |\tau|) + E\{h(x, t)\}^2 \quad (2.10)$$

$$\tau = t_1 - t_2$$

を得る。したがって自己相関関数は

$$C_{yy}(\tau) = \begin{cases} \sigma^2 (\frac{x}{\alpha} - |\tau|) & |\tau| \leq x/\alpha \\ 0 & |\tau| > x/\alpha \end{cases} \quad (2.11)$$

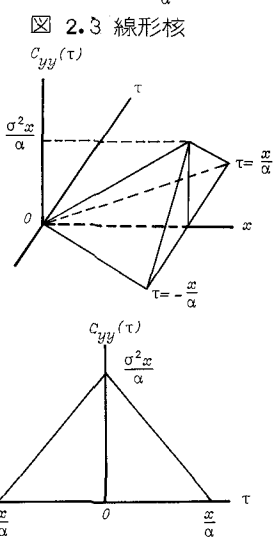
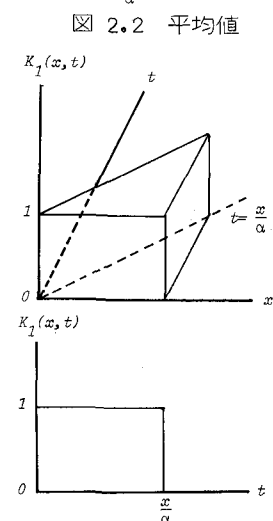
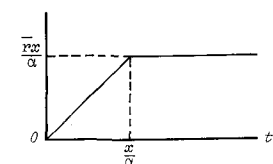
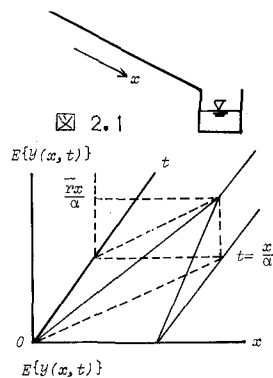
$\tau=0$  とおくと分散が得られる。

$$\text{Var}\{y(x, t)\} = C_{yy}(0) = \frac{\sigma^2 x}{\alpha} \quad (2.12)$$

**相互相関関数** (2.9)式の両辺に $r(x, t_1)$ を乗じて期待値をとると

$$E\{r(x, t_1)y(x, t)\} = \sigma^2 K_1(x, \tau) + \bar{r} E\{y(x, t)\} \quad (2.13)$$

$$\tau = t_1 - t$$



したがって相互相関関数は

$$C_{y^n}(\tau) = \sigma^2 K_1(x, \tau) \quad (2.14)$$

図 2.2~2.6は、それぞれの計算結果を図示したものである。対象としている基礎式が、線形微分方程式なので定常な特性を示しているが平均値に関しては到達時間内で時間とともに増加している。 $r(t)$ と  $y$  の変動を変動係数で見ると到達時間より大きい時間帯では、両者とも同じである。

## 2.2 $m \neq 1$ の場合(非線形)

一般に(2.6)式のように非同次項が確率変数である確率微分方程式の解は非定常性を示し、解析的に  $y(x, t)$  の変動特性を求めるのは困難である。ここでは、線形( $m=1$ )の結果を参考にしながら数値実験を行ない、 $y(x, t)$  の変動特性について考察する。

数値実験の方法は  $r(t)$  に  $(\bar{r}, \sigma^2)$  の正規乱数を発生させ、(2.6)式において  $y(x, t)$  を数値計算し、このような計算例を40通り求めて  $x=1, 401/58, 301/58, 201/58, 101/58$  点における  $t$  時刻のアンサンブル平均をとることにより各統計量を求めた。計算では、 $\bar{r}=10.0$ 、 $\sigma^2$ として0.25, 1.0, 4.0の3種類を採用し、斜面定数については  $m=5/3$ 、 $\alpha=8.4 \times 10^{-5}$ とした。

平均値に関しては(2.6)式の両辺の期待値をとると

$$\frac{\partial E(y)}{\partial t} + \alpha \frac{\partial E(y^m)}{\partial x} = E\{r(t)\} = \bar{r} \quad (2.15)$$

ここで

$$E(y^m) = \{E(y)\}^m \quad (2.16)$$

とおくことができるならば、平均値は図 2.7

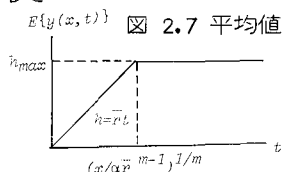


図 2.7 平均値

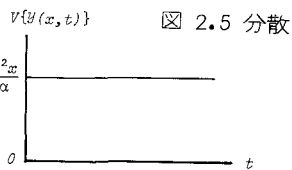


図 2.5 分散

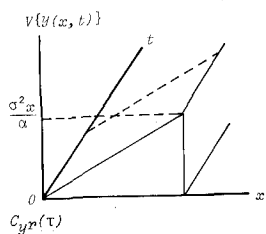


図 2.6 相互相関関数

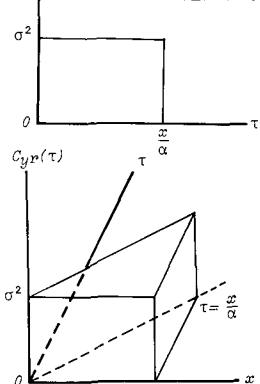


図 2.8  
 $\bar{r} = 10$   
 $\sigma^2 = 0.25$

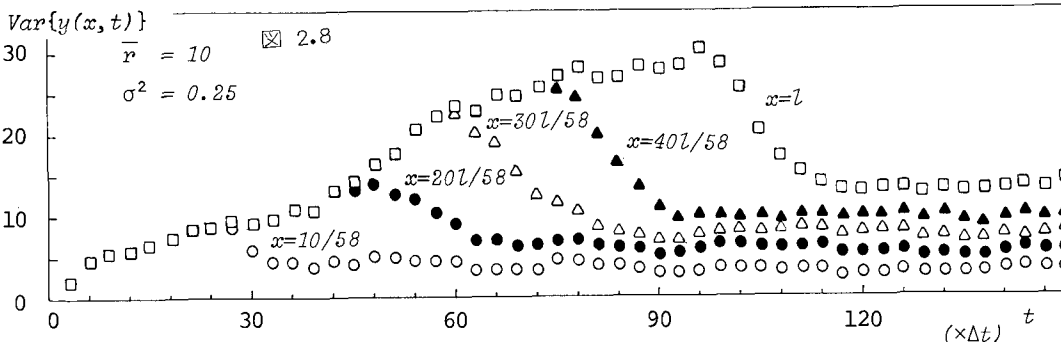
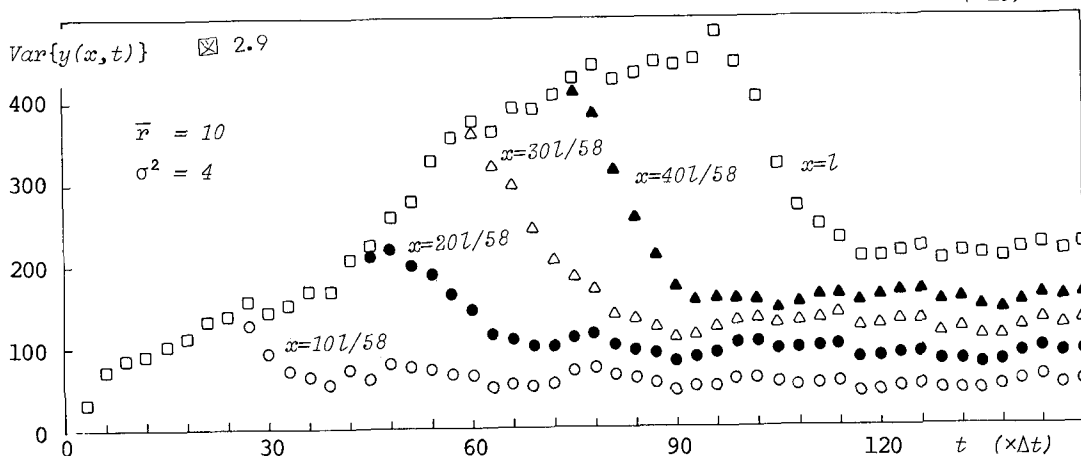


図 2.9  
 $\bar{r} = 10$   
 $\sigma^2 = 4$



のようになるが、数値実験の結果は(2.16)式の仮定が成立していた。図 2.2と比較すると当然到達時間は異なるが、同様な形をしている。次に分散の計算結果を図 2.8,2.9に示す。図 2.8,2.9は、それぞれ降雨の分散を0.25,4.0としたときの計算例である。図 2.5の線形のときの分散と比較してその形状が非常に異なっていることが注目される。いずれの場合も到達時間以後の時間帯では定常になっており、分散のピークは到達時間内に表われる。到達時間内では、分散は降雨の分散 $\sigma^2$ に比例して増加している。定常状態の分散を検討するために $y$ の分散と距離 $x$ の関係を

$\sigma^2$ をパラメーターとしてプロットしたのが図 2.10である。傾きが $1/m$ であることがわかる。図 2.11は、 $y$ の分散と $\sigma^2$ の関係を $x$ をパラメーターとしてプロットしたものである。傾きが1であることがわかる。以上の結果より次式が得られた。

$$Var\{y(x,t)\} = C\sigma^2 x^{1/m} \quad C; \text{定数} \quad (2.17)$$

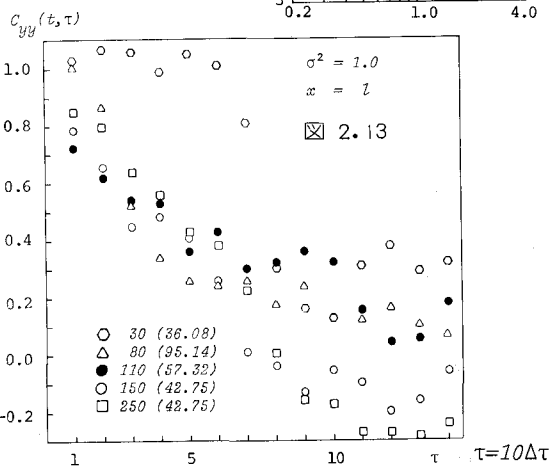
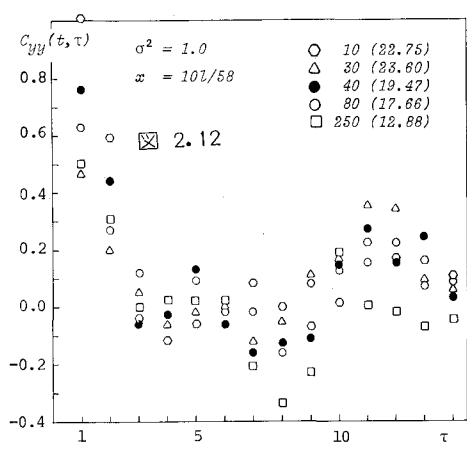
定数 $C$ は、この計算例において42となつが、この値は $m, \alpha, \bar{x}$ に関係していると思われるが、今の段階では関数形が未知である。

次に $y(x,t)$ の自己相関関数 $C_{yy}(t,\tau)$ だが、平均値、分散とも非定常であるため次式を用いて $t, \tau$ ごとにアンサンブル平均をとった。

$$C_{yy}(t,\tau) = E\{[y(x,t) - E\{y(x,t)\}][y(x,t+\tau) - E\{y(x,t+\tau)\}]/Var\{y(x,t)\}\} \quad (2.18)$$

図 2.12は 10L/58 地点における計算例で図中の印の側の数値は時刻 $t$ を示し、( )内の数値は $C_{yy}(t,0)=Var\{y(x,t)\}$ を示す。図 2.13は $x=1$ の場合の計算例である。図 2.4と比較すると非常に異なっており減衰が一様ではなく振動している。上流( $x$ の値が小)ほど到達時間が短いこともあって減衰が急激である。又、到達時間内の相関関数(○印)は、 $t+\tau$  到達時間まではほぼ一定値を保ち、その後急激に減衰する。

これらの変動特性が(2.3)式の $y(t)$ の変動特性と一致していると考えれば応答核の性質を明らかにすることができるとと思われる。



#### 参考文献

- 1) C.C.Kisiel: Time series analysis of Hydrologic data, Advances in Hydrosience, Vol.5, Edited by V.T.Chow, Academic Press, 1969
- 2) 日野幹雄, 灘岡和夫: 降雨～流出系における非線形流出核の理論的導出について, 土木学会論文報告集第278号, 1978
- 3) M.H.Diskin, A.Boneh: Properties of the kernels for time invariant, initially relaxed, second order, surface runoff systems, J. of Hydrology, Vol. 17, 1972