

I - 24 走行荷重による箱桁のパワースペクトルについて

北大工学部 正員 能町 純雄
 北見工大 " 大島 俊之
 電力中研 " ○岸 徳光

1 はじめに

走行荷重による梁の動的応答性状に関する解析は古くから行なわれており多くの研究成果があるが、部材強度に直接関係のない梁それ自身の振動によるエネルギー放射に関する研究はいまだ少ないようである。橋桁において可聴域での騒音は発振源が通過車輛そのもので、可動部分からの衝撃音が橋桁構成部材との間で反射増幅され放射されるものと考えられる。一方、これとは独立に橋桁の各構成部分の振動による音波発振も存在する。前者の騒音対策は障音壁や付加設備を施すことなどによりある程度の効果を納めているようであるが、数年前から可聴領域にない低周波空気振動が原因といわれる障害（いわゆる低周波振動公害）が報告されるようになってきている。

本文では、走行通過荷重によつて梁構成部材の法線方向粒子速度のパワーがどのように確率密度的に分布するかを周波数に対して計算する方法で評価して、梁振動による音波発振に関する一評価法を示し、薄肉任意断面梁の解析方法を求め、数値計算例として薄肉箱形ばりの解析を行なつたので報告する。

2 粒子速度パワースペクトルについて

任意空間での音響評価は壁面振動が梁の断面方向にも軸方向にも一様なものではなく、発振される音波が三次元的な広がりをもつて放射されることなどから、任意位置での音響を評価することはかなり困難なことである。本解析では壁面微小要素の法線方向振動を平面波と仮定してその粒子速度を考え、全壁面と通過時間に関する平均の粒子速度パワーを周波数について求め評価するものである。問題を簡単化するために走行荷重は単一集中荷重とし橋面上を等速度 v_p で走るものとする。また、梁は走行荷重が進入する以前に静止しているものとし、さらに通過後の応答振動は無視するものとする。

一般に壁面に垂直方向の粒子速度 $\dot{W}(t)$ とすれば、Fourier 変換の対は

$$\dot{W}(i\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{W}(t) e^{-i\omega t} dt \quad \dots (1) \quad \dot{W}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{W}(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \dots (2)$$

となり、 $\dot{W}(t)$ のパワースペクトル密度関数 $S_x(\omega)$ ¹⁾ は仮定より

$$\begin{aligned} S_x(\omega) &= \frac{2}{T} |\dot{W}(i\omega)|^2 \\ &= \frac{2}{T} (\text{Re}[\dot{W}(i\omega)]^2 + \text{Im}[\dot{W}(i\omega)]^2) \end{aligned} \quad \dots (3)$$

として示される。ただし、 T は走行荷重の通過時間 (l/v_p) であり、 $\text{Re}[\dot{W}(i\omega)]$, $\text{Im}[\dot{W}(i\omega)]$ は以下に示すとおりである。

$$\text{Re}[\dot{W}(i\omega)] = \int_0^T \dot{W}(t) \cos \omega t dt, \quad \text{Im}[\dot{W}(i\omega)] = \int_0^T \dot{W}(t) \sin \omega t dt \quad \dots (4)$$

式(3)は梁任意点のパワースペクトル密度であるから、平均パワースペクトル密度は次式のようになる。

$$\bar{S}_x(\omega) = \frac{1}{A} \int_A S_x(\omega) dA \quad \dots (5)$$

以上より梁任意点の粒子速度が動的解析より求まれば、平均の粒子速度パワースペクトル密度を求めることができる。また、この強度をデシベルで表現することにより音波発振の評価も可能となる。

3 薄肉任意断面梁の粒子速度パワースペクトルの関係式

薄板要素に関する動的基本式は面内変位を一次関数、面外変位を三次関数に仮定し、ガラーキン法によつ

て解を導く有限帯板法 (F.S.M.) を用いることとする。図-1 のような任意の薄板要素において、 x, y, z 方向の変位を u, v, w 、回転角を θ とすると変位関数は次のように示される。

$$u = u^{(1)} u_0 + u^{(j)} u_b \quad \dots (6)$$

$$v = v^{(1)} v_0 + v^{(j)} v_b \quad \dots (7)$$

$$w = w^{(1)} w_0 + w^{(j)} w_b + \theta^{(1)} \theta_0 + \theta^{(j)} \theta_b \quad \dots (8)$$

$$\text{ただし } \begin{bmatrix} u^{(1)} & u^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v^{(1)} & v^{(j)} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1-\eta & \eta \end{bmatrix} \dots (9)$$

$$\begin{bmatrix} w^{(1)} & \theta^{(1)} & w^{(j)} & \theta^{(j)} \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1-3\eta^2+2\eta^3 & b(\eta-2\eta^2+\eta^3) & 3\eta^2-2\eta^3 & b(-\eta^2+\eta^3) \end{bmatrix} \dots (10)$$

であり、 $\eta=y/b$ 、サフィックス o, b はそれぞれ $y=0$ 点、 b 点

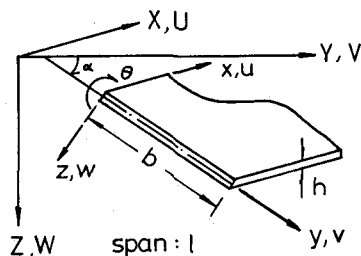


図-1 任意薄板要素

境界物理量を意味するものとする。 x, y, z 軸方面の動的基礎微分方程式に上述の試験関数 $u^{(1)}, v^{(1)}, w^{(1)}, \theta^{(1)}$ ($1=i$ or j) を用いてガラーキン法を適用すると

$$\int_0^b \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) u^{(1)} dy = 0 \quad (11) \quad \int_0^b \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) v^{(1)} dy = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) w^{(1)} dy = 0 \quad \dots (13)$$

$$\int_0^b \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \theta^{(1)} dy = 0 \quad \dots (14)$$

面内変形については平面応力状態の応力とひずみの関係式、面外変形に関してはキルヒホッフの仮定に基づく断面力と曲率の関係式を考慮して部分積分を施すと x に関しては4階、 t に関しては2階の線形連立偏微分方程式が得られる。式(11)から得られる方程式には $\cos m\pi x/l$ 、他式(12)～(14)から得られる式には $\sin m\pi x/l$ を乗じ、 $0 \leq x \leq l$ で有限Fourier変換を施す。境界条件に留意して整理すると薄板要素に関する動的基本式が次のように求まる。

$$[K] \{\bar{S}m[\delta]\} + [M] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\bar{S}m[\delta]\} = \{\bar{S}m[f]\} \quad \dots (15)$$

ここで $\{\bar{S}m[\delta]\}, \{\bar{S}m[f]\}$ はそれぞれ境界節点変位、節点断面力ベクトルの像関数であり、 $[K], [M]$ は要素剛性マトリックス、質量マトリックスである。

薄肉任意断面梁の場合は、式(15)に座標変換マトリックスを介して節点における力のつり合いと変位の適合条件を考慮することにより求まり次のようになる。

$$[Kst] \{\bar{S}m[\Delta]\} + [Mst] \frac{\partial^2}{\partial t^2} \{\bar{S}m[\Delta]\} = \{\bar{S}m[p]\} \quad \dots (16)$$

式(16)は集中荷重が一定速度 C_p で節線上を走行する場合について、一般解と特殊解に別け境界条件を考慮して解くことができる。すなわち

$$t=0 \text{ で } \{\Delta\}=0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \{\Delta\} = \{\dot{\Delta}\}=0$$

とすると、粒子速度の像関数は

$$\{\bar{S}m[\dot{\Delta}]\} = \frac{m\pi}{l} C_p \left[\{\bar{S}m[\delta_s]\} \cos \frac{m\pi}{l} C_p t - [V]^{-1} \cos \frac{m\pi}{l} C_g t [V]^{-1} \{\bar{S}m[\delta_s]\} \right] \dots (17)$$

上式中、 $[\cos \frac{m\pi}{l} C_g t]$ は対角マトリックスを意味し、 C_g は第 g モードの位相速度を表わすものとする。

また、 $[V]$ はモードベクトルからなるマトリックスであり、 $\{\bar{S}m[\delta_s]\}$ は特殊解から得られる変位振幅ベクトルの像関数を意味するものである。

したがって真の粒子速度ベクトルは上式を x 方向に逆変換することによって得られ、次のようになる。

$$\{\dot{A}\} = \sum_{m=1}^{\infty} \{\bar{S}m[\dot{A}]\} F(mx) \quad \dots(18)$$

ただし、 $F(mx)$ は u に関しては $\cosine \frac{m\pi}{l}x$ 、他の粒子速度に関しては $\sin \frac{m\pi}{l}x$ である。

2. で述べたように空気に与えられる振動エネルギーは構造体表面の法線方向振動によつて与えられるがこれは各薄板要素の面外変形 W の運動で $\dot{W}$ にはかならない。まず各薄板要素の粒子速度パワーを求める。

着目している薄板要素 i 内の粒子速度 $\dot{W}$ は、まず式(18)から対応する粒子速度ベクトルを選びだして座標変換し、得られた面外方向節点粒子速度を式(10)に代入することにより求める。したがつて薄板要素 i の任意点における粒子速度パワースペクトルは式(3)より求めることができる。ここで式(4)の $Re[\dot{W}(i\omega)]_i$ は、

$$Re[\dot{W}(i\omega)]_i = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi}{l}\right) C_p[Y_i] \{\bar{S}m[\dot{\delta s}']_A\} \sin \frac{m\pi}{l}x \quad \dots(19)$$

ただし、 $[Y_i]$ は薄板要素 i に関する式(10)のマトリックスであり、 $\{\bar{S}m[\dot{\delta s}']_A\}$ は次のように示されるものである。

$$\{\bar{S}m[\dot{\delta s}']_A\} = [T_i]^{-1} [\{\bar{S}m[\dot{\delta s}']\}_A p - [V][^{-}Ag][V]^{-1}\{\bar{S}m[\dot{\delta s}']\}] \quad \dots(20)$$

また、 $Im[\dot{W}(i\omega)]_i$ は式(19)のサフィックス A を B とし、式(20)の A_p, Ag を B_p, B_g とすればよい。なお、 $\{\bar{S}m[\dot{\delta s}']\}$ は $\{\bar{S}m[\dot{\delta s}]\}$ から選んで作られた薄板要素 i に関する変位振幅ベクトルであり、 $A_k, B_k(k=i \text{ or } j)$ は

$$A_k = \int_0^T \cos \frac{m\pi}{l} c_k t \cos \omega t dt, \quad B_k = \int_0^T \cos \frac{m\pi}{l} c_k t \sin \omega t dt \quad \dots(21)$$

である。

薄板要素 i の平均粒子速度パワースペクトルは上式で得られた $Sx(\omega)_i$ を式(5)に代入することにより求める。三角関数の直交性を考慮して整理すると各積分項は、

$$\begin{aligned} \int_A Re[\dot{W}(i\omega)]_i^2 dA &= \frac{2C_p^2}{D^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{m\pi}\right)^2 \left[\frac{13}{35} b^2 (w_{iA}^2 + w_{jA}^2) + \frac{b^3}{105} (\theta_{iA}^2 + \theta_{jA}^2) \right. \\ &\quad + \frac{11}{105} b^2 (w_{iA} \theta_{iA} - w_{jA} \theta_{jA}) + \frac{13}{210} b^2 (\theta_{iA} w_{jA} - w_{iA} \theta_{jA}) \\ &\quad \left. + \frac{9}{70} b (w_{iA} w_{jA}) - \frac{b^3}{140} (\theta_{iA} \theta_{jA}) \right] \end{aligned} \quad \dots(22)$$

であり、 $\int_A Im[\dot{W}(i\omega)]_i^2 dA$ も同じ方法で求められ、サフィックス A を B にするだけでよい。ただし上式中、 D は曲げ剛性であり、各節点変位振幅は像関数記号 $\bar{S}m$ を省略してある。

構造全体の平均パワースペクトル密度は

$$\bar{S}x(\omega) = \frac{1}{\sum A_i} \sum_i \int_{A_i} Sx(\omega)_i dA_i \quad \dots(23)$$

薄板要素 i あるいは梁全体の壁面から放射される平均音響パワーは

$$I_i = \rho_a C_a \bar{S}x(\omega)_i, \quad I = \rho_a C_a \bar{S}x(\omega) \quad \dots(24)$$

と近似的に書くことができる。ただし、 ρ_a, C_a は1気圧20°Cで $1.205 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3, 3.437 \times 10^4 \text{ cm/sec}$ である。

式(24)より音響パワーレベルは、

$$SPL(db) = 10 \log_{10} I/I_0 \quad \dots(25)$$

ただし、 $I_0 = 10^{-16} \text{ W/cm}^2$ である。

4 箱桁の音響パワースペクトルについて

解析例として図-2のような単純支持合成箱桁橋を取り上げ上床版を真中で2分割し、7要素にモデル化した。上床版中心線上を荷重Pが一定速度で走行する場合を考えたので、対称性を考慮してマトリックスを縮減させた。図-3、4には $C_p = 40 \text{ Km/hr}$ 、 80 Km/hr の場合の各要素の平均音響パワースペクトルを示し、図-5には $C_p = 40 \text{ Km/hr} \sim 160 \text{ Km/hr}$ の梁全体のパワーを示した。また、図-6には、 $C_p = 80 \text{ Km/hr}$ の場合について2主桁、張出しなし箱桁と比較して示してある。

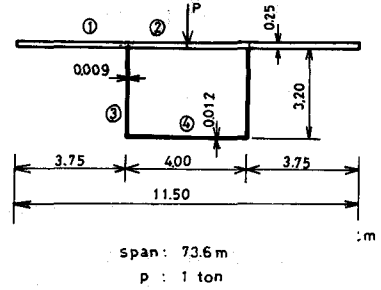


図-2 単純支持合成箱桁橋

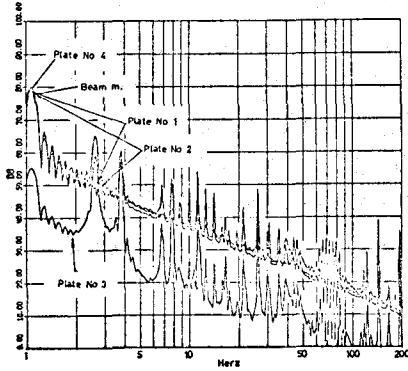


図-3 $C_p = 40 \text{ Km/hr}$ の場合

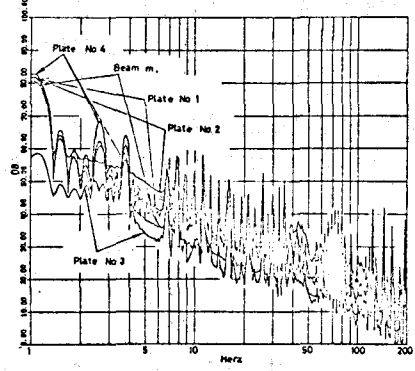


図-4 $C_p = 80 \text{ Km/hr}$ の場合

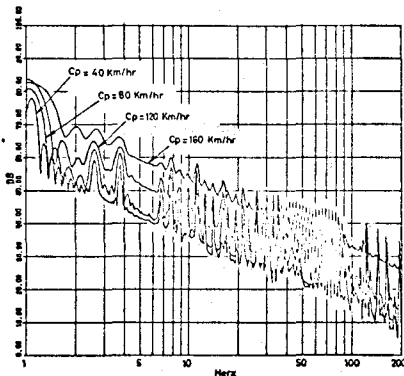


図-5 梁全体の平均音響パワースペクトル

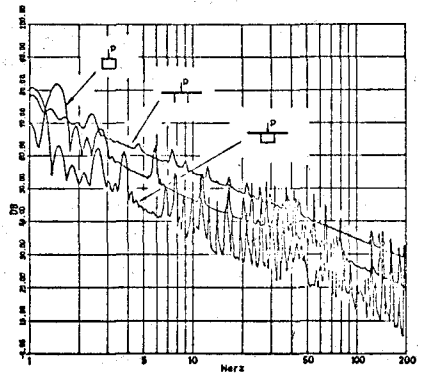


図-6 $C_p = 80 \text{ Km/hr}$ の場合の
他モデルとの比較図

5 まとめ

以上、走行荷重によつて生ずる梁構成部材の法線方向粒子速度パワースペクトルを定式化して梁振動による音波発振に関する一評価法を示した。さらに薄肉任意断面梁に関する解析も可能にし、例として箱桁の解析を示した。理論的に改善すべき点は残っているが、本方法によつて橋桁の低周波空気振動に関しある程度評価できるものとする。なお、詳細については当日発表する予定である。

6 参考文献

- 1) 小坪清真 : 土木振動学, 森北出版
- 2) 実吉純一 : 電気音響学, コロナ社
- 3) 能町純雄, 角田与史雄, 岸徳光 : Finite Strip Method による箱げたの位相速度分散曲線について, 第26回応力連合講演会論文抄録集, C-130, 1976.11.
- 4) 能町純雄, 角田与史雄, 岸徳光 : 走行荷重による箱げたの低周波発振評価の一試案, 環境情報科学 6-4, 1977.