

I-22 ミンドリン プレート理論によるはりの応力波速度分散について

北海道大学工学部 正員 能 町 純 雄
 北海道大学工学部 正員 角 田 与史雄
 北海道大学工学部 学生員 ○野 村 健 一

1. まえがき

本論文は、横せん断変形と回転慣性を考慮したミンドリン プレート理論による薄肉断面はりの応力波速度分散について検討したものである。面内力には平面応力状態を、面外力にはミンドリン曲げを用い、ウェブとフランジが結合する隅角部分には断面不変を仮定し、変分原理によって設定した変位表示の固有マトリックスによって波動解析を試みたものである。

2. 理論解析

図2-1のような薄板要素の局所座標を x, y, z とし、その変位成分を u, v, w 、回転成分を $\theta_2, \theta_1, \theta_3$ 、時間を t 、位相速度を c 、波長を λ とし、 x 方向への進行波を仮定すると変位成分は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} (u, \theta_1, \theta_3) &= (U, \theta_1, \theta_3) \times \cos \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \\ (v, w, \theta_2) &= (V, W, \theta_2) \times \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x-ct) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

平面応力状態と、ミンドリン曲げとによる釣合方程式は次のように与えられる。

平面応力状態

ミンドリン曲げ

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial t^3} \\ \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y &= \rho \frac{h^3}{12} \frac{\partial^3 \theta_2}{\partial t^3} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots (3)$$

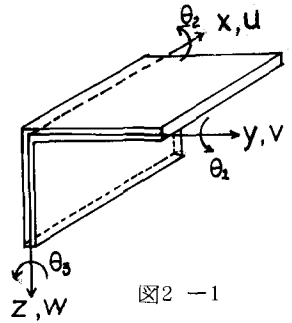


図2-1

また応力とひずみの関係は

平面応力状態について

ミンドリン曲げについて

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \tau_{xy} &= G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= (\lambda + 2G)I \frac{\partial \theta_1}{\partial y} + \lambda I \frac{\partial \theta_2}{\partial x} \\ M_y &= G I \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \right) \\ Q_x &= G' h \left(\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5)$$

よって上式の (2) ~ (5) の各変位に、(1) を代入し、 y に関する有限正弦、余弦変換を施し、逆変換公式を用いれば、最終的に、要素の端面における断面力と変位の関係式を次のように得ることができる。

$$\left. \begin{aligned} U(\eta) &= \alpha_{11}(\eta) U_0 + \alpha_{11}(1-\eta) U_b + \alpha_{12}(\eta) \sigma_{y0} + \alpha_{12}(1-\eta) \sigma_{yb} \\ V(\eta) &= \alpha_{21}(\eta) U_0 + \alpha_{21}(1-\eta) U_b + \alpha_{22}(\eta) \sigma_{y0} + \alpha_{22}(1-\eta) \sigma_{yb} \\ \theta_1(\eta) &= \beta_{11}(\eta) \theta_{10} + \beta_{11}(1-\eta) \theta_{1b} + \beta_{12}(\eta) W_0 + \beta_{12}(1-\eta) W_b + \beta_{13}(\eta) M_{y0} + \beta_{13}(1-\eta) M_{yb} \\ \theta_2(\eta) &= \beta_{21}(\eta) \theta_{10} + \beta_{21}(1-\eta) \theta_{1b} + \beta_{22}(\eta) W_0 + \beta_{22}(1-\eta) W_b + \beta_{23}(\eta) M_{y0} + \beta_{23}(1-\eta) M_{yb} \\ W(\eta) &= \beta_{31}(\eta) \theta_{10} + \beta_{31}(1-\eta) \theta_{1b} + \beta_{32}(\eta) W_0 + \beta_{32}(1-\eta) W_b + \beta_{33}(\eta) M_{y0} + \beta_{33}(1-\eta) M_{yb} \end{aligned} \right\} \dots \dots (6)$$

上式中、 $\eta = \frac{y}{b}$ 、添字0, bはそれぞれ $y=0, y=b$ 面を表わし、 α_{ij}, β_{ij} は閉じた式である。

よって $T = h\tau_{xy}$, $S = h\sigma_y$ とおき、座標の正の向きを正として次のように整理する。

$$\begin{Bmatrix} T_o \\ S_o \\ T_b \\ S_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_5^* & A_1 & A_6^* & A_2 \\ & A_3 & -A_2 & -A_4 \\ & & A_5^* & -A_1 \\ \text{SYMM.} & & & A_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_o \\ V_o \\ U_b \\ V_b \end{Bmatrix} \quad \dots (7)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{yjo} \\ M_{xyjo} \\ Q_{yjo} \\ M_{yjb} \\ M_{xyjb} \\ Q_{yjb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ & B_{22} & B_{23} & -B_{15} & B_{25} & B_{26} \\ & & B_{33} & -B_{16} & B_{26} & B_{36} \\ & & & B_{11} & -B_{12} & -B_{13} \\ & & & & B_{22} & B_{23} \\ & & & & & B_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta_{2jo} \\ \Theta_{1jo} \\ W_o \\ \Theta_{2jb} \\ \Theta_{1jb} \\ W_b \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ウェブとフランジが結合する隅角部の要素について、 x, y, z 方向の変位を要素断面内で次のように仮定し、

$$\left. \begin{aligned} U &= U_0 + U_1 y + U_2 z + U_3 yz \\ V &= V_0 - z\phi \\ W &= W_0 + y\phi \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

とおく。要素のウェブ、フランジの接線面には図2-2のようにみかけの外力が作用するが、変分原理から次の7本の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} -EA\ddot{U}_0 + \rho A\ddot{U}_0^{(t)} &= T_y^{13} + T_y^{31} + T_z^{24} + T_z^{42} \\ -EI_x\ddot{U}_1 + GA(U_1 + \dot{V}_0) + \rho I_x\ddot{U}_1^{(t)} &= -\frac{1}{2}h_1T_y^{13} + \frac{1}{2}h_1T_y^{31} + M_{xz}^{24} + M_{xz}^{42} \\ -EI_y\ddot{U}_2 + GA(U_2 + \dot{W}_0) + \rho I_y\ddot{U}_2^{(t)} &= -\frac{1}{2}h_2T_z^{24} + \frac{1}{2}h_2T_z^{42} + M_{xy}^{13} + M_{xy}^{31} \\ -EI_w\ddot{U}_3 + GU_3(I_y + I_z) - G\dot{\phi}(I_y - I_z) + \rho I_w\ddot{U}_3^{(t)} &= \frac{1}{2}(M_{xy}^{31} - M_{xy}^{13} + M_{xz}^{42} - M_{xz}^{24}) \\ -GA(\dot{U}_1 + \dot{V}_0) + \rho A\ddot{V}_0^{(t)} &= S_y^{13} + S_y^{31} + Q_z^{24} + Q_z^{42} \\ -GA(\dot{U}_2 + \dot{W}_0) + \rho A\ddot{W}_0^{(t)} &= Q_y^{13} + Q_y^{31} + S_z^{24} + S_z^{42} \\ -G\dot{\phi}(I_y + I_z) + GU_3(I_y - I_z) + \rho\dot{\phi}^{(t)}(I_y + I_z) &= M_y^{13} + M_y^{31} + M_y^{24} + M_y^{42} \\ &\quad - \frac{1}{2}(Q_y^{31} - Q_y^{13} + Q_z^{42} - Q_z^{24}) \end{aligned} \right\}$$

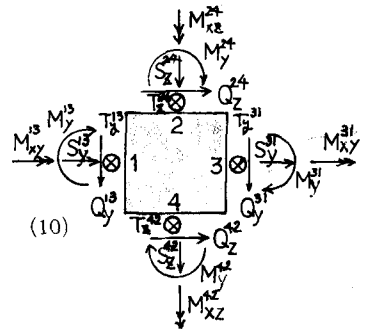


図2-2

ここに $\ddot{f} = \partial^2 f / \partial x^2$, $\dot{f} = \partial f / \partial x$, $\ddot{f}^{(t)} = \partial^2 f / \partial t^2$

上式において (1) 式を左辺に代入し、右辺をすべて境界変位で表わし、断面変形の対称、逆対称を考慮して整理すると次のような変位表示の動的基本式が求められる。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & 0 & K_{15} & K_{16} & 0 \\ & K_{22} & 0 & K_{24} & K_{25} & 0 & K_{27} \\ & & K_{33} & K_{34} & 0 & K_{36} & K_{37} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & 0 \\ & & & & K_{55} & 0 & K_{57} \\ & & & & & K_{66} & K_{67} \\ \text{SYMM.} & & & & & & K_{77} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \nabla \\ W \\ \Phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \dots (11)$$

上記の $\det |K| = 0$ として位相速度 c が求まるが、各要素の関数中に c が複雑に入り込んでいるため、くり返し計算によって解を求める。比較のため、Timoshenko Beam理論による位相速度も求める。なお、Timoshenko Beam理論に用いられるせん断変形係数 κ についてはCowperの理論式を用いることにする。

3. 数値計算例

$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $t_f = t_w = 1.0 \text{ cm}$, $\kappa = \pi^2/12.0$, ポアソン比 $\nu = 0.3$ として、図3-1のような箱形、コ形の断面について最低次から3次までの位相速度について求めた。また、最低次の位相速度についてモードも求めた。

4. 結果および考察

下図のように箱形について4種類、コ形について2種類の位相速度が得られた。

図3-1

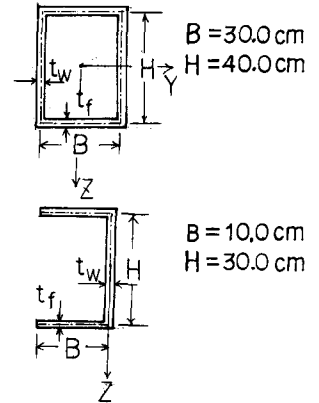


図4-1: 箱形断面縦波動

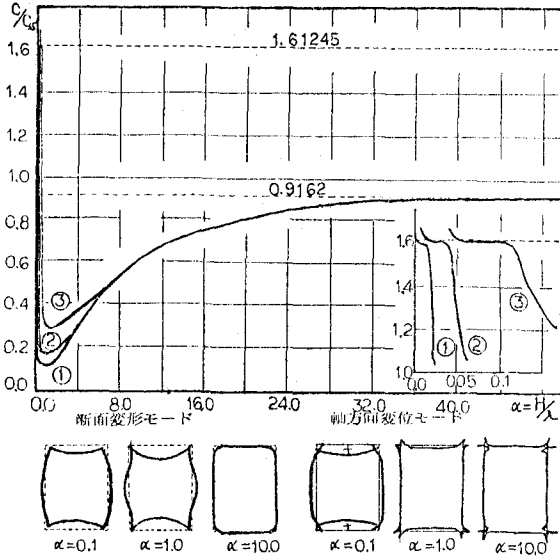


図4-2: 箱形断面 Y 軸回りの曲げ波動

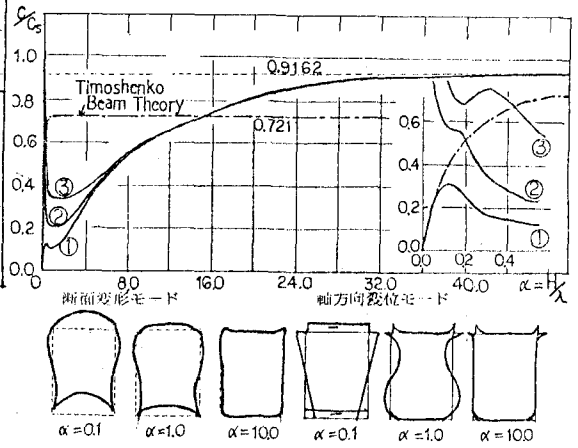


図4-3: 箱形断面 Z 軸回りの曲げ波動

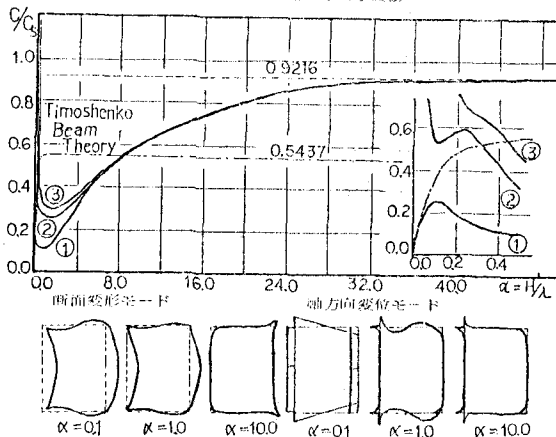


図4-4: 箱形断面 曲げねじり波動

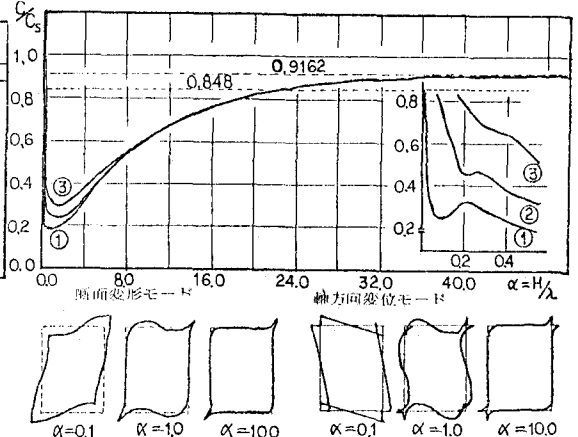


図4-1は縦波動であるが、第1次分散曲線は波長無限大で縦波動 ($C/C_s = 1.61245$) より出発し、双曲線的に減少し $\alpha = 1.0$ 付近で停留値をとり、その後徐々に増加し高周波領域でレーリー波 ($C/C_s = 0.9162$) に漸近する。図4-2, 図4-3はそれぞれY軸,Z軸に関する曲げ波動であるが、ともに高周波領域でレーリー波に漸近する。図4-4は曲げねじり波動であるが、波長無限大でSaint-Venantの曲げねじり理論 ($C/C_s = 0.848$) より出発し、 $\alpha = 1.0$ 付近で停留値をとったのち、レーリー波に漸近する。Timoshenko Beam理論による解も高周波領域で一定値をとるものの、レーリー波に漸近しない。また、モード分

布からもわかるように、高周波領域において隅角部に波動が集中している。図4-5はコ形断面ばりのY軸に関する対称変形の場合であるが、1次分散曲線は波長無限大で0から、2次分散曲線は縦波動から出発しており、それぞれZ軸回りの曲げ波動、縦波動に対応するものである。図4-6はコ形断面ばりのY軸に関する逆対称変形の場合であるが、1次分散曲線は0から、2次分散曲線は0.00481から出発しており、それぞれY軸回りの曲げ波動、Saint Venantの曲げねじり理論に対応するものである。いずれの場合も、高周波領域においてレーリー波に漸近する。コ形断面の場合、面内変形モードは高周波領域において自由端に集中している。

以上、薄肉箱形ばり、薄肉コ形ばりの位相速度分散曲線、およびモード分布より最低次分散曲線について次のことがわかった。

(1) 低周波領域では、従来のはり理論に支配される。

(2) 中間部領域では、はりを構成する薄板要素の曲げ波動に支配される。

(3) 高周波領域では、薄肉コ形ばりの場合は自由端に、薄肉箱形ばりの場合は隅角部に波動が集中し、レーリー波に漸近する。

5. あとがき

以上、ラグランジェ曲げ理論を用いた位相速度分散曲線では高周波領域で不連続になるものが、ミンドリン曲げ理論を用いることによって、高周波領域まで連続的に求めることができた。

6. 参考文献

- (1) 能町純雄、角田与史雄、岸徳光：薄肉箱げた部材の波動分散曲線について、第9回マトリックス構造解析法研究発表論文集、J.S.S.C, 1975, 6
- (2) 能町純雄、角田与史雄、岸徳光：コ材の波動伝ぱん特性について、土木学会年次講演会概要集、I-263, 1975,
- (3) 能町純雄、角田与史雄、岸徳光：薄肉H形断面ばりの弾性波の位相速度について、土木学会論文報告集、第244号, 1975
- (4) Abramson, H.N., H.J. Plass, and E.A. Ripperger: Stress Wave Propagation in Rods and Beams, Advanced in Appl. Mech., 1958
- (5) R.D. Mindlin, : Influence of Rotary Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, A.S.M.E., 1951
- (6) G.R. Cowper, : The Shear Coefficient in Timoshenko Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, A.S.M.E., 1966
- (7) H.R. Aggarwal, E.T. Cranch, : A Theory of Torsional and Coupled Bending Torsional Waves in Thin Walled Open Section Beams, Journal of Applied Mechanics, A.S.M.E., 1967

図4-5 : コ形断面 対称波動

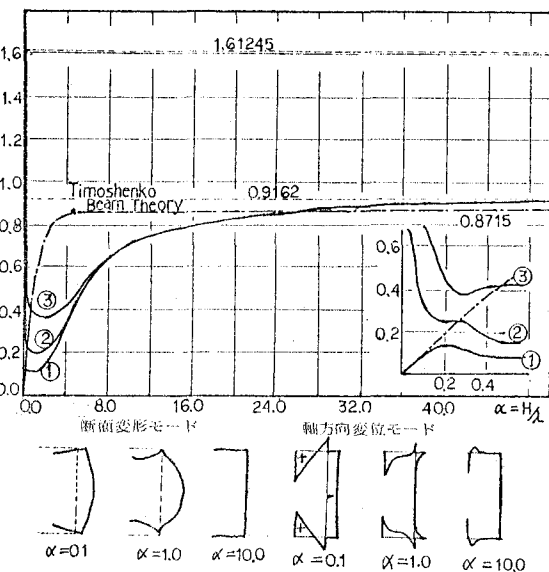


図4-6 : コ形断面 逆対称波動

