

I-21 弾性定数の異なる二同心円柱を伝わる弾性波の速度について

室蘭工業大学 正員 松岡 健一
北海道大学 正員 能町 純雄

1. まえがき

弾性定数の異なる円柱と厚肉円筒が二同心円柱を形成しているとき、この同心円柱を柱軸方向に進行する弾性波の伝播速度を知ることは興味のある問題である。本論文は、この問題を多次元弾性理論によって解析しようとするものである。この問題は円柱および円筒の波動伝播の基礎式を境界の条件を満足するように組合せて解析することができるが、本論では、このときの弾性波の位相速度と群速度の分散曲線を、円柱と円筒の径の比を変化させて求め、さらに若干の波長に対して波動モードを求め、検討を加えた。

2. 基礎方程式およびその解

円柱座標における運動方程式は、座標軸を r, θ, z とし、 $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ をそれぞれ r, θ, z 方向の直応力度、 $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ をせん断応力度とすると、物体力を無視し、慣性項を考慮して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{r \partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

となる。ただし ρ は弾性体の密度、 t は時間、 u, v, w はそれぞれ r, θ, z 方向の変位である。

ここで波動の進行方向を z 方向とし、調和波動を仮定し、各変位および応力成分を次のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} u &= \tilde{u}_m \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \quad v = \tilde{v}_m \sin m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \\ w &= \tilde{w}_m \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \quad \sigma_r = \tilde{\sigma}_{rm} \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \\ \sigma_\theta &= \tilde{\sigma}_{\theta m} \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \quad \sigma_z = \tilde{\sigma}_{zm} \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \\ \tau_{r\theta} &= \tilde{\tau}_{r\theta m} \sin m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \quad \tau_{\theta z} = \tilde{\tau}_{\theta z m} \sin m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \\ \tau_{rz} &= \tilde{\tau}_{rz m} \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ただし、 $m=0, 1, \dots$ で波動の円周方向の性質を表し $m=0$ であれば軸対称、 $m=1$ であれば曲げ波動となる。また p は角速度、 v は z 方向の波動の伝播速度であり、変位と応力の関係は弾性波動を対象としフックの法則が成り立つものとする。

式(1)と式(2)を考慮して半径方向にハンケル変換を行ない、フックの法則も考慮してえられる変位の係数関数を並置換して、各変位成分を求める¹⁾。その結果、円筒に対する解をオセバ、

$$u = (\tilde{A}_{mr} + \tilde{B}_{mr}) \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \quad (2)$$

$$v = (\tilde{A}_{mr} - \tilde{B}_{mr}) \sin m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})}, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{mr} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)}{N_\mu} \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{iN}{2} E_{mk} \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)}{N_\mu} - \frac{N_k}{N^2} \chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} - iN E_{mk} \right\} \right], \quad (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{mr} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)}{N_\mu} \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_{mk} + (m+1) A_{mk} + (m-1) B_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{iN}{2} E_{mk} \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho p^2} \left\{ \frac{\chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r)}{N_\mu} - \frac{N_k}{N^2} \chi_{mp}^{(k)}(N_\mu r) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} - iN E_{mk} \right\} \right], \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w &= \tilde{w}_{mr} \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[G_{mk}^{(k)}(N_\mu r) E_{mk} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\mu iN}{\rho p^2} \left\{ G_{mk}^{(k)}(N_\mu r) - G_{mk}^{(k)}(N_\mu r) \right\} \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (m-1) B_{mk} - iN E_{mk} \right\} \right] \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{z}{v})} \quad (6) \end{aligned}$$

上式中 μ, λ はラメの弾性係数、 $N = \rho / v = 2\pi / \lambda = \pi / L$ 、 L は波長、 λ は半波長であり式(4)中の関数は、

$$G_{mk}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1-k}^{(k)}(Nr)}{R_{mk}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_{mp}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m+1-k}^{(k)}(Nr)}{R_{mk}^{(k)}(Na_k)}$$

$$\chi_{mr}^{(k)}(Nr) = \frac{R_{m-1-k}^{(k)}(Nr)}{R_{mk}^{(k)}(Na_k)},$$

$$N_\mu^2 = N^2 \left(1 - \frac{\rho p^2}{\mu N^2} \right) = N^2 \left(1 - \frac{\rho}{\mu} v^2 \right),$$

$$N_\lambda^2 = N^2 \left(1 - \frac{\rho}{2\mu + \lambda} \frac{p^2}{N^2} \right) = N^2 \left(1 - \frac{\rho}{2\mu + \lambda} v^2 \right),$$

であり、円筒の外径を a_1 、内径を a_2 とすれば、

$$R_{j+1}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr) K_{m+1}(Na_{k+1}) - (-1)^{j+m} I_m(Na_{k+1}) K_j(Nr)$$

である。ただし、 $a_0 = a_2$ 、 $j' = m-1, m, m+1$ 、 $k = 1, 2$

であり、 I, K は第1種および第2種の変形ベッセル関数である。また式(4)中係数 $\alpha_{mk}, \beta_{mk}, A_{mk}, B_{mk}, E_{mk}$ は円筒の内外面における変位および応力で、

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{mk} &= \tilde{\tau}_{r,m})_{r=a_k}, \beta_{mk} = \tilde{\sigma}_{r,m})_{r=a_k}, \\ A_{mk} &= (\tilde{u}_m + \tilde{v}_m)_{r=a_k} / 2a_k, B_{mk} = (\tilde{u}_m - \tilde{v}_m)_{r=a_k} / 2a_k, \\ E_{mk} &= \tilde{w}_m)_{r=a_k}, \end{aligned} \right\} (6)$$

となる。

以上円筒に対する解を示したが、円柱の場合は、上に示した式で $a_2 = 0$ とすれば良い。従って $k=1$ のみとなり、式中の関数は、

$$R_{j,m}^{(0)}(Nr) = I_j(Nr), \quad j = m-1, m, m+1,$$

となる。

N_m, N_k は、 V の大きさによつては、虚数となることもあるが、このときは変形ベッセル関数 I, K は、 γ 種および γ 種のベッセル関数 J, Y で与えられることとなる。

また各応力成分は、式(2)~(6)からフックの法則を用いて次のように表わされる。

$$\sigma_r = \left\{ 2\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} + \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} \right) + \lambda \Delta \right\} \cos m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{1}{2}\pi)}, \quad (7)$$

$$\sigma_\theta = \left\{ 2\mu \left(\frac{m+1}{r} \tilde{u}_r - \frac{m-1}{r} \tilde{v}_r \right) + \lambda \Delta \right\} \omega m \theta \cdot e^{ip(t-\frac{1}{2}\pi)}, \quad (8)$$

$$\sigma_z = \left\{ -2\mu i' N \tilde{w}_m + \lambda \Delta \right\} \omega m \theta \cdot e^{ip(t-\frac{1}{2}\pi)}, \quad (9)$$

$$\Delta = \frac{2\mu}{2\mu + \lambda} \frac{2}{r} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mk} + (m+1) A_{mk} - (m-1) B_{mk} - i' N E_{mk} \right\}, \quad (10)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \left\{ \frac{\partial \tilde{u}_r}{\partial r} - \frac{\partial \tilde{v}_r}{\partial r} - \frac{m+1}{r} \tilde{u}_r - \frac{m-1}{r} \tilde{v}_r \right\} \sin m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{1}{2}\pi)}, \quad (11)$$

$$\tau_{\theta z} = \mu \left\{ -\frac{m}{r} \tilde{w}_m - i' N (\tilde{u}_r - \tilde{v}_r) \right\} \sin m\theta \cdot e^{ip(t-\frac{1}{2}\pi)}, \quad (12)$$

$$\tau_{rz} = \mu \left\{ \frac{\partial \tilde{w}_m}{\partial r} - i' N (\tilde{u}_r + \tilde{v}_r) \right\} \omega m \theta \cdot e^{ip(t-\frac{1}{2}\pi)}, \quad (13)$$

3. 固有値方程式

Fig. 1 に示すように、円柱を取りまいて弾性定数の異なる円筒が同心円状に重ねられているものとする。

この二層同心円柱を仮する弾性

模の速度は、2. で求めた円筒

および円柱の解を用いて、これ

らを組合せて円筒と円柱の境界

の境界条件を満足するように導

かれた境界条件式から固有

値方程式の固有値問題として与

えられる。いま円筒を表わすすべての量を添字 1、円

柱を添字 2 で表わすものとする。円筒と円柱の境界の

条件を考えるに先だち、 A_{mk}, B_{mk} は式(6)のより、

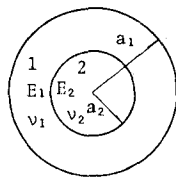


Fig. 1 二層同心円柱

より4邊から、次の適合条件を満足しなければならぬ円筒に対して

$$\begin{aligned} a_k A_{mk+1} &= \tilde{A}_{m,r+1})_{r=a_k} = \frac{2}{j+1} \left[\frac{\chi_{mp}^{(j)}(N_{k1} a_k)}{N_{k1}} \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \alpha_{mj+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m+1) A_{mj+1} + (m-1) B_{mj+1} - \frac{i' N}{2} E_{mj+1} \right\} + \frac{\mu_1 N^2}{f_1 p^2} \left\{ \frac{\chi_{mp}^{(j)}(N_{k2} a_k)}{N_{k2}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{N_{k1}}{N^2} \chi_{mp}^{(j)}(N_{k1} a_k) \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \beta_{mj+1} + (m+1) A_{mj+1} - (m-1) B_{mj+1} - i' N E_{mj+1} \right\} \right\} \right] \\ a_k B_{mk+1} &= \tilde{B}_{m,r+1})_{r=a_k} = \frac{2}{j+1} \left[\frac{\chi_{ms}^{(j)}(N_{k1} a_k)}{N_{k1}} \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \alpha_{mj+1} + (m+1) A_{mj+1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (m-1) B_{mj+1} + \frac{i' N}{2} E_{mj+1} \right\} + \frac{\mu_1 N^2}{f_1 p^2} \left\{ \frac{\chi_{ms}^{(j)}(N_{k2} a_k)}{N_{k2}} - \frac{N_{k1}}{N^2} \chi_{ms}^{(j)}(N_{k1} a_k) \right\} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu_1} \beta_{mj+1} + (m+1) A_{mj+1} - (m-1) B_{mj+1} - i' N E_{mj+1} \right\} \right], \quad (15) \end{aligned}$$

円柱に対して

$$\begin{aligned} a_2 A_{m1,2} &= \tilde{A}_{m,r,2})_{r=a_2} = \frac{\chi_{mp}(N_{k2} a_2)}{N_{k2}} \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \alpha_{m1,2} + (m+1) A_{m1,2} \right. \\ &\quad \left. + (m-1) B_{m1,2} - \frac{i' N}{2} E_{m1,2} \right\} + \frac{\mu_2 N^2}{f_2 p^2} \left\{ \frac{\chi_{mp}(N_{k1} a_2)}{N_{k1}} - \frac{N_{k2}}{N^2} \chi_{mp}(N_{k2} a_2) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \beta_{m1,2} + (m+1) A_{m1,2} - (m-1) B_{m1,2} - i' N E_{m1,2} \right\}, \quad (16) \\ a_2 B_{m1,2} &= \tilde{B}_{m,r,2})_{r=a_2} = -\frac{\chi_{ms}(N_{k2} a_2)}{N_{k2}} \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \alpha_{m1,2} + (m+1) A_{m1,2} \right. \\ &\quad \left. + (m-1) B_{m1,2} - \frac{i' N}{2} E_{m1,2} \right\} + \frac{\mu_2 N^2}{f_2 p^2} \left\{ \frac{\chi_{ms}(N_{k1} a_2)}{N_{k1}} - \frac{N_{k2}}{N^2} \chi_{ms}(N_{k2} a_2) \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{1}{2\mu_2} \beta_{m1,2} + (m+1) A_{m1,2} - (m-1) B_{m1,2} - i' N E_{m1,2} \right\}, \quad (17) \end{aligned}$$

次に境界条件を考えて

i). $r = a_1$ における条件: 円筒の外側には応力が存在しないので、

$$i). \sigma_{r,1})_{r=a_1} = 0, \quad \therefore \beta_{m1,1} = 0 \quad (18)$$

$$ii). \tau_{r\theta,1})_{r=a_1} = 0, \quad \therefore \alpha_{m1,1} = 0 \quad (19)$$

$$iii). \tau_{rz,1})_{r=a_1} = 0, \quad (20)$$

2). $r = a_2$ における条件: $r = a_2$ では円筒と円柱が接触している。この境界面では、変位とこの面に作用する応力が連続している場合と、この面にせん断応力が存在しない場合が考えられるが、ここでは前者の条件によるものとする。従つて、

$$iv). u_1)_{r=a_2} = u_2)_{r=a_2}, v_1)_{r=a_2} = v_2)_{r=a_2}, \quad \therefore A_{m2,1} = A_{m1,2}, B_{m2,1} = B_{m1,2}, \quad (21)$$

$$v). w_1)_{r=a_2} = w_2)_{r=a_2}, \quad \therefore E_{m2,1} = E_{m1,2}, \quad (22)$$

$$vi). \sigma_{r,1})_{r=a_2} = \sigma_{r,2})_{r=a_2}, \quad \therefore \beta_{m2,1} = \beta_{m1,2}, \quad (23)$$

$$vii). \tau_{r\theta,1})_{r=a_2} = \tau_{r\theta,2})_{r=a_2}, \quad \therefore \alpha_{m2,1} = \alpha_{m1,2}, \quad (24)$$

$$viii). \tau_{rz,1})_{r=a_2} = \tau_{rz,2})_{r=a_2}, \quad (25)$$

となる。式(20)と(25)は、式(13)を用いて、書き下せば

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m c N}{N_{M1} a_1} G_m^{(k)}(N_{M1} a_1) \alpha_{m k,1} + \frac{i \mu_1 N^2}{\rho_1 p^2} \left\{ 2 \frac{N_{M1}}{N} (\chi_{mp}^{(k)}(N_{M1} a_1) + \frac{m}{N_{M1} a_1} \cdot G_m^{(k)}(N_{M1} a_1)) - \left(\frac{N}{N_{M1}} + \frac{N_{M1}}{N} \right) (\chi_{mp}^{(k)}(N_{M1} a_1) + \frac{m}{N_{M1} a_1} G_m^{(k)}(N_{M1} a_1)) \right\} \right. \\ \left. + \beta_{m k,1} + 2 \mu_1 ((m+1) A_{m k,1} - (m-1) B_{m k,1} - i N E_{m k,1}) \right] + \frac{i \mu_1 N}{a_1} \\ \cdot \frac{2 \mu_1}{N_{M1}} \{ (m+1) A_{m k,1} + (m-1) B_{m k,1} \} G_m^{(k)}(N_{M1} a_1) + \mu_1 \left(\frac{N^2}{N_{M1}} + N_{M1} \right) \\ \cdot \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{M1} a_1) + \frac{m}{N_{M1} a_1} G_m^{(k)}(N_{M1} a_1) \right\} E_{m k,1} = 0, \quad (20')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{m c N}{N_{M2} a_2} G_m^{(k)}(N_{M2} a_2) \alpha_{m k,2} + \frac{i \mu_2 N^2}{\rho_2 p^2} \left\{ 2 \frac{N_{M2}}{N} (\chi_{mp}^{(k)}(N_{M2} a_2) + \frac{m}{N_{M2} a_2} \cdot G_m^{(k)}(N_{M2} a_2)) - \left(\frac{N}{N_{M2}} + \frac{N_{M2}}{N} \right) (\chi_{mp}^{(k)}(N_{M2} a_2) + \frac{m}{N_{M2} a_2} G_m^{(k)}(N_{M2} a_2)) \right\} \right. \\ \left. + \beta_{m k,2} + 2 \mu_2 ((m+1) A_{m k,2} - (m-1) B_{m k,2} - i N E_{m k,2}) \right] + \frac{i \mu_2 N}{a_2} \\ \cdot \frac{2 \mu_2}{N_{M2}} \{ (m+1) A_{m k,2} + (m-1) B_{m k,2} \} G_m^{(k)}(N_{M2} a_2) + \mu_2 \left(\frac{N^2}{N_{M2}} + N_{M2} \right) \\ \cdot \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{M2} a_2) + \frac{m}{N_{M2} a_2} G_m^{(k)}(N_{M2} a_2) \right\} E_{m k,2} - \frac{i \mu_1 N}{N_{M1} a_2} \alpha_{m 1,2} \\ - \frac{i \mu_2 N^2}{\rho_2 p^2} \left\{ 2 \frac{N_{M2}}{N} (\chi_{mp}^{(k)}(N_{M2} a_2) + \frac{m}{N_{M2} a_2} \cdot G_m^{(k)}(N_{M2} a_2)) - \left(\frac{N}{N_{M2}} + \frac{N_{M2}}{N} \right) (\chi_{mp}^{(k)}(N_{M2} a_2) + \frac{m}{N_{M2} a_2} G_m^{(k)}(N_{M2} a_2)) \right\} \\ + \chi_{mp}^{(k)}(N_{M2} a_2) \left\{ \beta_{m 1,2} + 2 \mu_2 ((m+1) A_{m 1,2} - (m-1) B_{m 1,2} - i N E_{m 1,2}) \right\} \\ - i N E_{m 1,2} \left\{ \beta_{m 1,2} + 2 \mu_2 ((m+1) A_{m 1,2} - (m-1) B_{m 1,2} - i N E_{m 1,2}) \right\} \\ - \mu_2 \left(\frac{N^2}{N_{M2}} + N_{M2} \right) \left\{ \chi_{mp}^{(k)}(N_{M2} a_2) + \frac{m}{N_{M2} a_2} G_m^{(k)}(N_{M2} a_2) \right\} E_{m 1,2} = 0, \quad (21')$$

といる。この固有値方程式の根として位相速度が求められる。

4. 数値解法

数値解法例として、ポアソン比 $\nu_1 = 1/6$, $\nu_2 = 0.3$, 弾性係数比 $E_2/E_1 = 7.0$, 密度比 $\rho_2/\rho_1 = 3.2$ のもので、 $a_2/a_1 = 0.0$

(1本の円柱), 0.25, 0.5, 1.0 (2本の円柱)

の位相速度と群速度を軸対称波動 ($m=0$) に対して求めた。

位相速度は了。に示した固有値方程式の根と

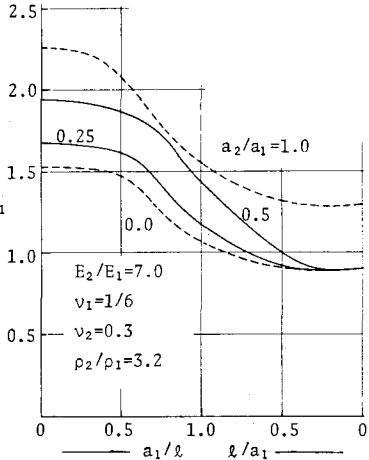


Fig. 2 位相速度分散曲線

して与えられるが、固有値は反復法により5桁以上の精度をもつように求め、群速度はこれを数値微分して求めた。

Fig. 2は位相速度の1次の分散曲線を示したものである。図1は波軸に位相速度と円筒のせん断波速度との比、横軸に左から a_1/l , 右から l/a_1 をとり全体として波長零から無限大までを示した。また円柱のみの場合も実線、二相円柱の場合も実線で示した。二相円柱の位相速度はいずれも実線の間に存在しており、両弾性体の中間的な性質を示すことがわかる。波長無限大では $a_2/a_1 = 0.25$ のとき $V/Vs1 \div 1.681$, $a_2/a_1 = 0.5$ のとき $V/Vs1 \div 1.942$ とはなるが、これは二相円柱を、体積に応じて換算材料定数をもつ円柱としたときの、それぞれの bar velocity 1.679, と 1.940 とほぼ一致している。しかし波長零では二相円

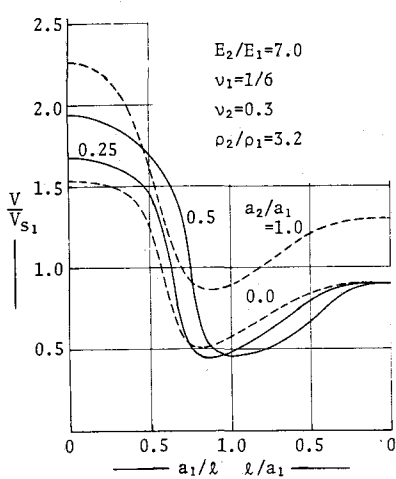


Fig. 3 群速度分散曲線

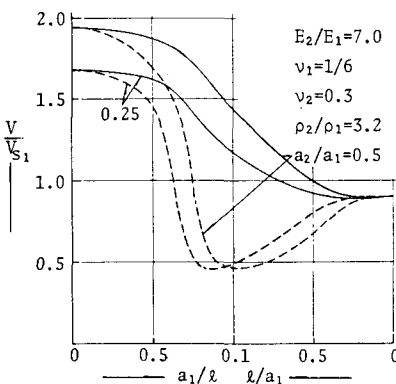


Fig. 4 位相速度と群速度

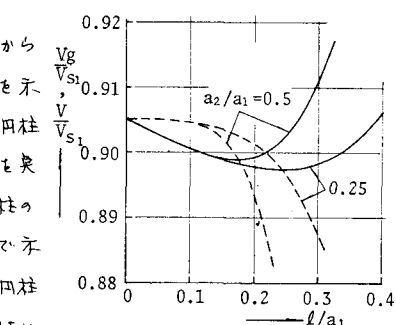


Fig. 5 位相速度と群速度

に存在しており、両弾性体の中間的な性質を示すことがわかる。波長無限大では $a_2/a_1 = 0.25$ のとき $V/Vs1 \div 1.681$, $a_2/a_1 = 0.5$ のとき $V/Vs1 \div 1.942$ とはなるが、これは二相円柱を、体積に応じて換算材料定数をもつ円柱としたときの、それぞれの bar velocity 1.679, と 1.940 とほぼ一致している。しかし波長零では二相円

柱は平均的な値とはならず、円筒体のレーレ波の速度に一致している。Fig. 3 は群速度の分散曲線を、Fig. 2 と同様に示したものである。図から明らかなように二相円柱の群速度は、それぞれの弾性体の円柱の群速度とは、数値的にはかなり異なっている。すなわち2つの円柱の平均的な値をとらばいいことがあり、2種類の円柱の群速度より小さな最小値を示している。Fig. 4 は二相円柱について位相速度と群速度を比較したものであるが、波長のほとんどの範囲に於いて群速度の方が位相速度より小

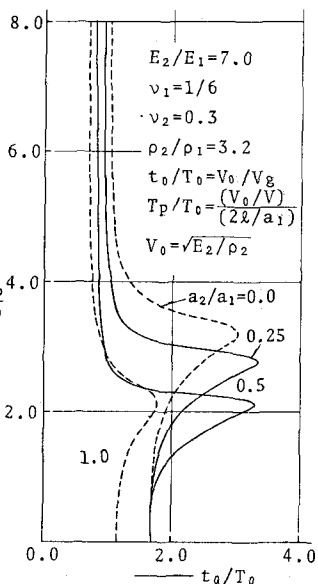


Fig. 6 到達時間と波長の関係

さいが、Fig. 5 に示すように波長が短いところではこの関係が逆転している。Fig. 6 には、あらゆる波長の波群が一樣な強さで存在する場合に、ある地点に到達する波の波長とその時間の関係を示した。これは横軸が無次元化した時間で縦軸が波長も無次元化したものである。図によると、円筒体のみの材料による円柱と比較すると二相円柱は、中心の円柱の大きさが大きくなる程、波長の長い波の到達時間が短く、波が通過する時間は長くなることを示している。

Fig. 7 は $\lambda/a_1 = 50.0, 10.0, 2.0, 1.0, 0.5, 0.125, 0.05$ のときの波動モードを軸方向変位 w 、応力 σ_z 、 τ_{rz} について比較したものである。波長の長いところではほぼ全断面一様に変位し、従って軸方向力もそれぞれ弾性体で一樣であるが波長が短くなるに従い変化が表われている。円柱のみの場合は波長が短くなるに従い表面波の様相を呈してくるが、二相円柱ではかなり短い波長まで円柱部分はほぼ一様な変位である。ここで特徴的なことは、円柱では波長が短くなると表面に波動が集中するが、二相円柱では一時その様な傾向を示すが、最終的には境界面に集中することである。

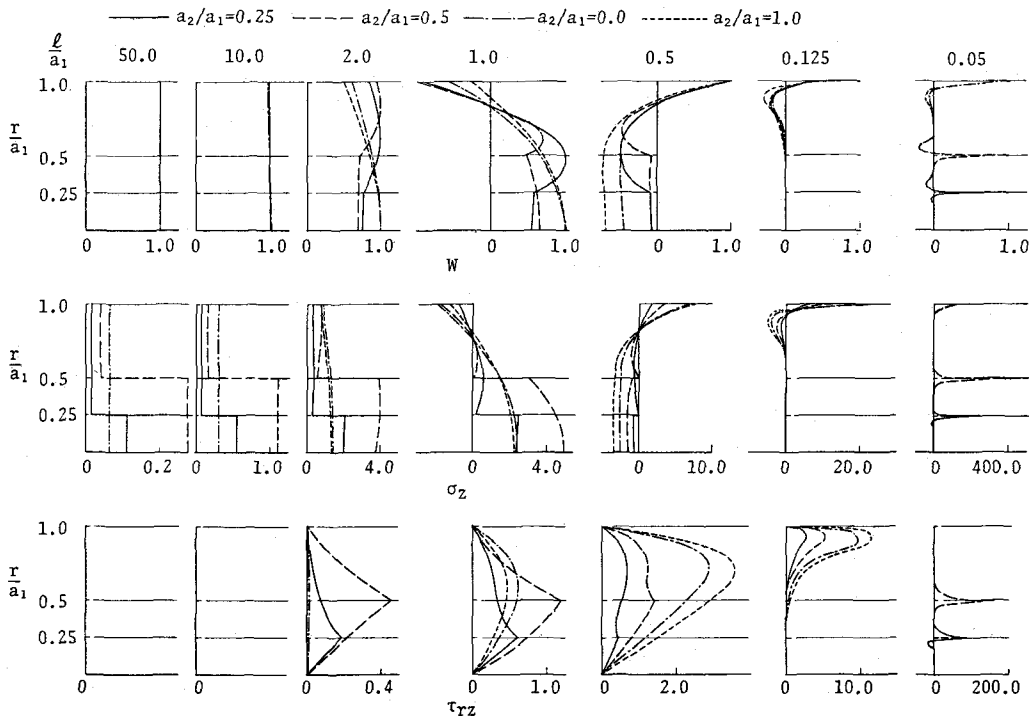


Fig. 7 軸方向変位 w 、軸方向応力度 σ_z 、 τ_{rz} の波動モード

※参考文献 1) 松岡, 能町; 土木学会論文報告集, 第258号, p.13, 1977, 2) 松岡, 能町; 第2回応力講演会報告集, p.75, 1978.