I－20　移動荷重による弾性体内の変位，応力の分布について

苫高専　正員　○中辻　隆
北大　〃　芳村　仁

1. まえがき　移動荷重による弾性体内の変位，応力の研究には，二次元問題に対するJ. ColeとJ. Huthによる研究，三次元問題に対するL. Frybaによる研究などがある。後者は二重フーリェ変換による解法であるが，その厳密解は未だ求まっていない。ここでは，数値解を容易に得るために，荷重から十分離れたところではその影響は無視し得るので，荷重をフーリェ級数に展開することにより，鉛直方向の荷重が (1) 半無限弾性体上を，(2) 無限弾性体内を，(3) 半無限弾性体内を通過する時の変位，応力について走行速度による影響を報告したい。

2. 基礎式　荷重が x 方向に定速度 c で移動する時，慣性座標系での弾性方程式は

$$(\lambda+G)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} + G\nabla^2\mathbf{U} = \rho c^2\,\partial^2\mathbf{U}/\partial x^2 \qquad (1)$$

ここで $\mathbf{U}$ は変位ベクトル，λ，G はLameの定数，ρ は密度である。$\mathbf{U}=\mathrm{grad}\,\varphi+\mathrm{rot}\,\Omega$ と表わせれるので

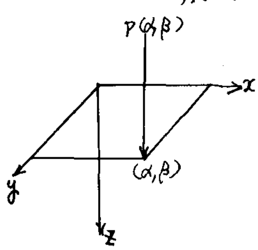
$$[\nabla^2 - M_1^2\partial^2/\partial x^2]\,\varphi = 0 \quad , \qquad [\nabla^2 - M_2^2\partial^2/\partial x^2]\,\psi_i = 0 \quad (i=1,2,3) \qquad (2)$$

を得る。ここで，$\mathrm{rot}\,\Omega=(\psi_1,\psi_2,\psi_3)$ であり，M_1，M_2 は変容波，回転波に対する移動速度の比（マッハ数）である。（ここでは亜音速状態，$M_1<M_2<1$ の場合だけを取り扱う。）x，y に関して(2)をフーリェ変換すると($x\to\xi$, $y\to\eta$)

$$\Phi = A_4 e^{-n_1 z} \qquad \Psi_i = A_i e^{-n_2 z} \quad (i=1,2,3)$$

$$n_1^2=(1-M_1^2)\xi^2+\eta^2 \qquad n_2^2=(1-M_2^2)\xi^2+\eta^2$$

を得る。以下，フーリェ変換された関数を大文字や－を付けて示す。



図－1

弾性の関係式から，変位，応力をポテンシャル φ，ψ_i を用いて表わすと，図-1に示す半無限体上の任意の点 $x=\alpha$, $y=\beta$ に $P(\alpha,\beta)$ の大きさの集中荷重が作用している時の応力の境界条件より $A_1 \sim A_4$ を決定する事が出来る。求める変位，応力は，

$$w = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2 G}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n_1}{B}\{(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-2(\xi^2+\eta^2)e^{-n_2 z}\}\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}}\,d\xi\,d\eta$$

$$\sigma_z = \frac{P(\alpha,\beta)}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{B}\{(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-4n_1 n_2(\xi^2+\eta^2)e^{-n_2 z}\}\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}}\,d\xi\,d\eta \qquad (3)$$

$$B = (\xi^2+\eta^2+n_2^2)^2-4n_1 n_2(\xi^2+\eta^2)$$

のようになる。任意の分布荷重による変位，応力は(3)において α, β に関し適時積分してやると良い。

いま，特に $P(x,y)=Q\,e^{-i(kx+ly)}$ で与えられる正弦波荷重が作用する時には $\xi\to k$, $\eta\to l$ として

$$W = \frac{Q}{G}\times\frac{n_1}{B}\{(k^2+l^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-2(k^2+l^2)e^{-n_2 z}\}\,e^{-i(kx+ly)}$$

$$\sigma_z = -\frac{Q}{B}\times\{(k^2+l^2+n_2^2)^2 e^{-n_1 z}-4n_1 n_2(k^2+l^2)e^{-n_2 z}\}\,e^{-i(kx+ly)} \qquad (4)$$

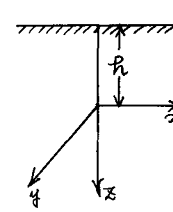


図-2

他の変位，応力成分についても(3)(4)と同様である。また，無限弾性体内あるいは半無限弾性体内の移動集中荷重による解も同様に求める事が出来る。

無限弾性体内の移動荷重に対して

$$\sigma_{z0} = \pm\frac{Q}{2\pi^2 M_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi^2}\{(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1|z|}-2(\xi^2+\eta^2)e^{-n_2|z|}\}\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}}\,d\xi\,d\eta \qquad (5)$$

半無限弾性体内の移動荷重に対して（図-2参照）

$$\sigma_z = \sigma_{z0}+\frac{Q}{2\pi^2 M_2^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\xi^2 B}\{(\xi^2+\eta^2+n_2^2)F_1 e^{-n_1(h+z)}-2(\xi^2+\eta^2)F_2 e^{-n_2(h+z)}\}\,e^{-i\{\xi(x-\alpha)+\eta(y-\beta)\}}\,d\xi\,d\eta \qquad (6)$$

ここで $F_1=[(\xi^2+\eta^2+n_2^2)^2+4n_1n_2(\xi^2+\eta^2)]e^{-n_1 z}-4(\xi^2+\eta^2)(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_2 z}$

$F_2=4n_1n_2(\xi^2+\eta^2+n_2^2)e^{-n_1 z}-[(\xi^2+\eta^2+n_2^2)^2+4n_1n_2(\xi^2+\eta^2)]e^{-n_2 z}$

3. 数値解析

(a) 半無限体上の集中荷重 与えられた集中荷重をフーリエ級数展開し(4)の結果を用いて重ね合わせると変位応力の数値解を得る。図-3～図-5は $z=0.5, y=0.0$ での変位 w, 応力 σ_z, τ_{zx} の分布を M_2 をパラメータとして図示したものである。ここで, 横軸は荷重作用点からの距離であり, $M_2=0$ はBoussinesq解を意味する。

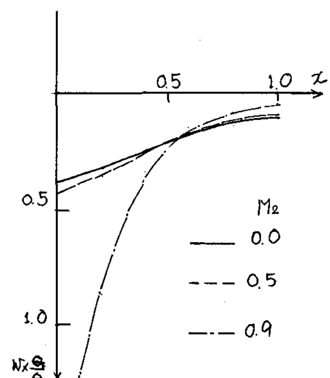


図 3

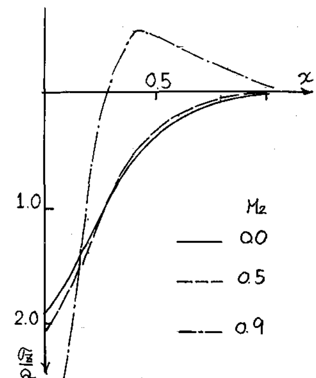


図 4

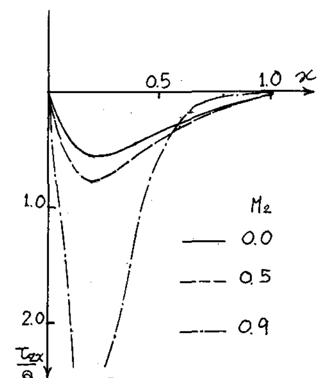


図 5

(b) 半無限体上の正弦荷重 $P(x,y)=Qe^{-ikx}$ なる分布荷重が作用する時(3)を用いて変位, 応力解を得る。図6～図8には, k あるいは M_2 をパラメータとした変位 w, 応力 σ_z の分布が図示されている。

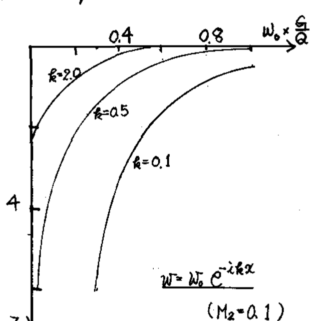


図 6

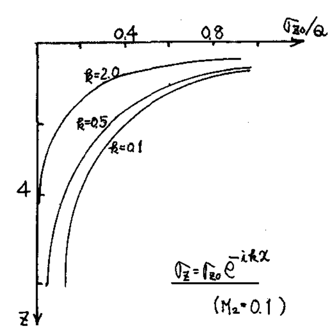


図 7

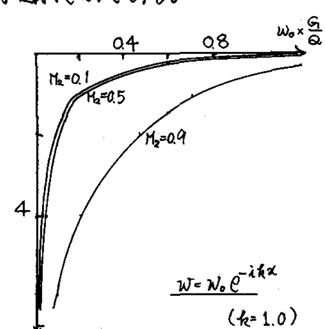


図 8

(c) (半)無限弾性体内の集中荷重

図-9, 図-10はそれぞれ無限, 半無限体内の集中荷重による応力 σ_z の分布である。(図-5に対応)

4. あとがき

図-3～図-10は $M_2\ll 1$ である時には変位, 応力とも静的解と大差ない事を示している。回転波の速度は数km/sであるから通常の物的荷重ではその移動速度による影響は極めて小さい。これは, ここで求めた解が, 荷重の移動によって生起する弾性波によるじょう乱が通過した後のいわば定常状態での解である事に帰因すると思われる。

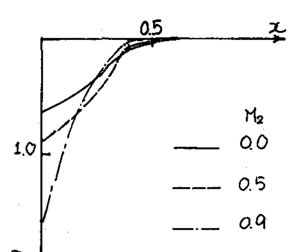


図-9

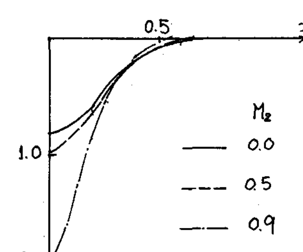


図-10

参考文献 1. J. Cole and J. Huth; "Stresses Produced in Half Plane by Moving Loads" J.A.M, Vol.25, Trans, ASME, vol.80, 1958

2 L. Fryba ; "Vibration of Solid and Structures under Moving Loads", Nordhoff, Int. Publ.

3 Lamb ; On the Propagation of Tremors Over the Surface of an Elastic Solid", Phil, Trans., Roy. Soc. A vol 203, 1904