

I-19 走行荷重による多径間連続板の振動特性

北海道大学工学部 正員 林 川 俊 郎

1. まえがき

橋梁上を自動車などの走行荷重が移動するとき、橋梁に生じる動的影響を調べる研究は古くから行なわれ、多くの論文が発表されている^{1), 2)}。しかしながら、その多くの論文は橋梁構造物を桁としては単純支持桁、板としては橋軸方向に両端単純支持された直交異方性板と考えて解析する方法がとられている。このことから、著者は走行荷重による変断面連続桁の振動性状について、任意境界条件をもつ連続板の振動解析について一部発表している^{3), 4)}。

本研究の目的は幅員の大きい橋梁をより实际的に、橋軸方向に多径間連続支持および幅員方向にも多径間連続支持された多径間連続板と考え、走行荷重による動的応答特性について調べる。

2. 静的および動的応答解析の概要

任意境界条件をもつ多径間連続板上を走行荷重が移動するとき、その任意の点における動的応答を求めるための動的たわみ関数を誘導することは、一般的にかなりの困難さをとまうことが予想される。そこで、本解析では以下のような仮定を設ける。

- 1) 多径間連続板のねじり剛性 $H=0$ 、ポアソン比 $\nu_x=\nu_y=0$ とする。
- 2) 減衰力は板の運動速度に比例する。
- 3) 初期条件および振動にともなう面内力は小さいと考えられるので無視する。
- 4) 走行荷重は集中荷重について考え、一定速度で左から右へ移動する。

2-1. 静的たわみ関数

ねじり剛性のない直交異方性板の基礎微分方程式は周知のごとく次式のように与えられる。

$$D_x \frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 W(x,y)}{\partial y^4} = p(x,y) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 D_x, D_y = 板の曲げ剛性、 $W(x,y)$ = 静的たわみ関数、 $p(x,y)$ = 外部荷重関数。図-1 のように、集中荷重 P が載荷点 (a_s, b_u) に作用したとき、任意の着目点 (a_r, b_u) における静的たわみ関数は式(1)の解として次のようにおくことができる。

$$W(x_r, y_u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} X_{mr}(x_r) Y_{nu}(y_u) \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $X_{mr}(x_r)$ 、 $Y_{nu}(y_u)$ はそれぞれ x 方向、 y 方向の境界条件を満足している固有関数である。

$$X_{mr}(x_r) = A_{mr} \cos \beta_{mr} x_r + B_{mr} \sin \beta_{mr} x_r + C_{mr} \cosh \beta_{mr} x_r + D_{mr} \sinh \beta_{mr} x_r \quad \dots \dots (3)$$

$$Y_{nu}(y_u) = A_{nu} \cos \beta_{nu} y_u + B_{nu} \sin \beta_{nu} y_u + C_{nu} \cosh \beta_{nu} y_u + D_{nu} \sinh \beta_{nu} y_u \quad \dots \dots (4)$$

また、この固有関数を用いて、集中荷重 P を次のように級数展開することができる。

$$p(x_r, y_u) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_{mn} X_{mr}(x_r) Y_{nu}(y_u) \quad \dots \dots \dots (5)$$

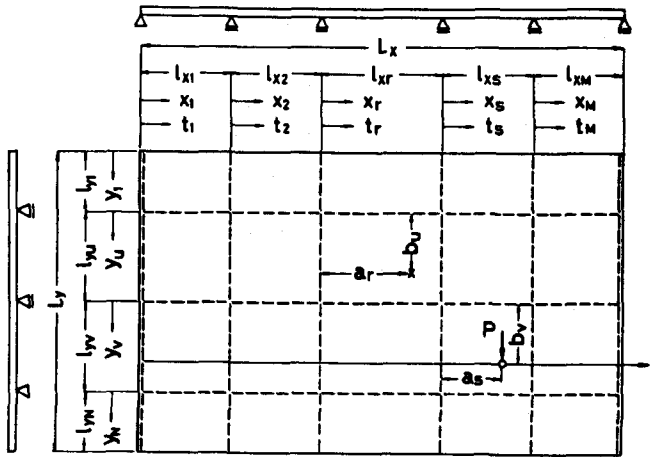


図-1 多径間連続板

上式(5)の両辺に $X_{mr}(x_r)$ 、 $Y_{nu}(y_u)$ を乗じて $x=0 \sim L_x$ 、 $y=0 \sim L_y$ まで全多径間連続板の領域について積分し、固有関数の直交性を利用することにより、最終的に式(5)における荷重展開係数 p_{mn} は次のように求められる。

$$p_{mn} = P \cdot X_{ms}(a_s) Y_{nv}(b_v) / (N_m^2 \cdot N_n^2) \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\text{ここに、} N_m^2 = \sum_{r=1}^M \int_0^{L_x} X_{mr}^2(x_r) dx_r, \quad N_n^2 = \sum_{u=1}^N \int_0^{L_y} Y_{nu}^2(y_u) dy_u \quad \dots \dots \dots (7)$$

したがって、式(2)、式(5)を式(1)に代入することにより

$$a_{mn} = p_{mn} / (D_{xr} \cdot \beta_{mr}^4 + D_{yu} \cdot \beta_{nu}^4) \quad \dots \dots \dots (8)$$

となる。この係数 a_{mn} を式(2)に代入することにより、多径間連続板の静的たわみ関数 $W(x, y)$ が容易に求めることができる。

2-2. 動的たわみ関数

前述の振動解析上の仮定から、各径間における直交異方性板の曲げ振動の基礎微分方程式は周知のごとく次式のように与えられる。

$$D_x \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial x^4} + D_y \frac{\partial^4 W(x, y, t)}{\partial y^4} + 2\kappa \mu \frac{\partial W(x, y, t)}{\partial t} + \mu \frac{\partial^2 W(x, y, t)}{\partial t^2} = p(x, y, t) \quad (9)$$

ここに、 κ = 減衰の円振動数、 μ = 板の単位面積あたりの質量、 $W(x, y, t)$ = 動的たわみ関数。集中荷重 P が図-1のように一定速度 v で載荷点 (a_s, b_v) を通過するとき、各径間の任意の着目点 (a_r, b_u) における動的たわみ関数 $W(x_r, y_u, t_s)$ と外部荷重関数 $p(x_r, y_u, t_s)$ は次のように級数展開できる。

$$W(x_r, y_u, t_s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_{nu}(y_u) T_{mn}(t_s) \quad \dots \dots \dots (10)$$

$$p(x_r, y_u, t_s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_{nu}(y_u) p_{mn}(t_s) \quad \dots \dots \dots (11)$$

ここで、式(11)における荷重展開係数 $p_{mn}(t_s)$ は式(6)に $a_s = vt_s$ を代入することにより

$$p_{mn}(t_s) = P \cdot X_{ms}(vt_s) Y_{nv}(b_v) / (N_m^2 \cdot N_n^2) \quad \dots \dots \dots (12)$$

と求められる。これらの式(10)、式(11)を式(9)に代入すると、時間 t_s に関する2階の常微分方程式が次のように得られる。

$$\ddot{T}_{mn}(t_s) + 2\kappa \dot{T}_{mn}(t_s) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t_s) = \gamma_{mn} X_{ms}(vt_s) \quad \dots \dots \dots (13)$$

ここに、 $\omega_{mn}^2 = (D_{xr} \cdot \beta_{mr}^4 + D_{yu} \cdot \beta_{nu}^4) / \mu_{ru}$ 、 $\gamma_{mn} = P \cdot Y_{nv}(b_v) / (\mu_{ru} \cdot N_m^2 \cdot N_n^2)$ 、 $(\dot{}) = d/dt$ 。

この ω_{mn} は多径間連続板の固有円振動数である。上式(13)を Laplace変換により解くと

$$T_{mn}(t_s) = \frac{\gamma_{mn}}{\alpha_{mn}} \int_0^{t_s} X_{ms}(v\tau) \exp\{-\kappa(t_s - \tau)\} \sin \alpha_{mn}(t_s - \tau) d\tau \\ + T_{mn}(0) \exp(-\kappa t_s) \cos \alpha_{mn} t_s + \frac{1}{\alpha_{mn}} \{\kappa T_{mn}(0) + \dot{T}_{mn}(0)\} \exp(-\kappa t_s) \sin \alpha_{mn} t_s \quad (14)$$

ここに、 $\alpha_{mn} = \sqrt{\omega_{mn}^2 - \kappa^2}$ (ただし、 $\omega_{mn} \geq \kappa$)、 $T_{mn}(0)$ 、 $\dot{T}_{mn}(0)$ = 積分定数。

である。また、減衰の円振動数 κ と対数減衰率 d とは次式によって関係づけられるものとする。

$$\kappa = d \cdot \omega_{11} / (2\pi) \quad \dots \dots \dots (15)$$

したがって、式(14)を式(10)に代入することにより、最終的に動的たわみ関数 $W(x_r, y_u, t_s)$ は次のよ

うになる。

$$W(x_r, y_u, t_s) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_{nu}(y_u) \{ \Phi_{mn}(t_s) + \Psi_{mn}(t_s) \} \dots\dots\dots (16)$$

$$\Phi_{mn}(t_s) = \frac{\gamma_{mn}}{\alpha_{mn}} \int_0^{t_s} X_{ms}(v\tau) \exp \{ -\kappa(t_s - \tau) \} \sin \alpha_{mn}(t_s - \tau) d\tau$$

$$\Psi_{mn}(t_s) = T_{mn}(0) \exp(-\kappa t_s) \cos \alpha_{mn} t_s + \frac{1}{\alpha_{mn}} \{ \kappa T_{mn}(0) + \dot{T}_{mn}(0) \} \exp(-\kappa t_s) \sin \alpha_{mn} t_s$$

いま、走行荷重が第 *s* 径間に進入する時間 (*t_s* = 0) における連続板のたわみ曲面と、走行荷重が前の第 *s* - 1 径間を通過する時間 (*t_s* - 1 = *l_{x,s-1}* / *v*) における連続板のたわみ曲面は同値である(ここでは、時間的連続条件とよぶ)ことから

$$W(x_r, y_u, t_s = 0) = W(x_r, y_u, t_{s-1} = l_{x,s-1} / v), \dot{W}(x_r, y_u, t_s = 0) = \dot{W}(x_r, y_u, t_{s-1} = l_{x,s-1} / v) \quad (17)$$

である。したがって、式(16)における積分定数 *T_{mn}* (0)、*Ḑ_{mn}* (0) は式(16)を式(17)に代入することにより次のように求められる。

$$T_{mn}(0) = \Phi_{mn}(l_{x,s-1} / v) + \Psi_{mn}(l_{x,s-1} / v), \dot{T}_{mn}(0) = \dot{\Phi}_{mn}(l_{x,s-1} / v) + \dot{\Psi}_{mn}(l_{x,s-1} / v) \quad (18)$$

式(16)において、*Φ_{mn}* (*t_s*)は Duhamel積分で表示される強制振動の項であり、*Ψ_{mn}* (*t_s*)は積分定数を含んだ自由振動の項である。この動的応答解析では座標(*x_r*, *y_u*)と時間 *t_s* を各径間ごとに取っているため、式(17)による時間的連続条件を考慮する必要がある。しかしながら、その具体的な計算は式(18)のように走行荷重の載荷径間 *s* に関する漸化式であることから、容易に電子計算機プログラミングが可能である。以下、その数値計算結果について示す。

3．数値計算結果

図- 2 は橋軸方向に 3径間連続支持、幅員方向に自由－中間支持－中間支持－自由の境界条件をもつ多径間連続板上を集中荷重 *P* = 10*t* が一定速度 *v* = 30*m* / *sec*で連続板の中央を左から右へ移動するときの着目点(図中の×印)における静的たわみと動的たわみの影響線を示したものである。図中の点線は静的たわみの影響線を表わし、実線は動的たわみの影響線を表わしている。また、橋軸方向の曲げ剛性の比は 1 : 2 : 1 の変断面である。第 2径間中央点におけるたわみ値が負となり、多径間連続板の特徴が示されている。

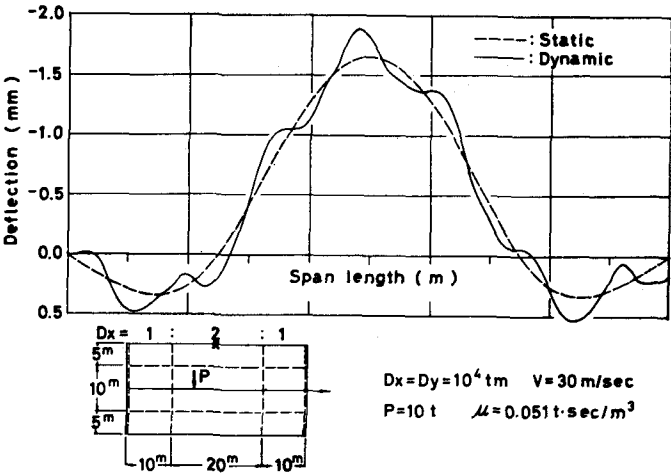


図- 2 静的たわみと動的たわみの影響線

ここで、走行荷重による多径間連続板の振動特性を調べるために、次式で定義される動的増加率 *δ* と速度パラメーター *α* を用いる。

$$\delta = \frac{W_{d,max} - W_{s,max}}{W_{s,max}} \times 100 \quad (\%) \quad \dots\dots\dots (19) \quad \alpha = \frac{\beta_{11} \cdot v}{\omega_{11}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

ここに、*W_{d,max}* = 動的たわみの最大値、*W_{s,max}* = 静的たわみの最大値。式(20)の速度パラメーター *α* は多径間連続板の曲げ剛性、質量、支間長および走行荷重の速度を含んだ無次元量である。実際の橋梁構造物について調べてみると、速度パラメーターの範囲はおおよそ *α* = 0.02 ~ 0.30 である。

図- 3 は 3径間連続桁と橋軸方向に 3径間連続支持、幅員方向に自由－自由の境界条件をもつ連続板

における動的増加率と速度パラメーターとの関係を示したものである。図中の実線は 3 径間連続桁、一点鎖線は幅員 10m の連続板、点線は幅員 20m の連続板の場合であり、着目点はそれぞれ第 1 径間の中央点である。この図-3 から、動的増加率はいくつかの極値をもち、速度パラメーターの増加にともなって上昇する傾向がある。また、連続板の幅員長が増加するにつれて、動的増加率は減少することがわかる。

図-4 は橋軸方向に 3 径間連続支持、幅員方向に自由-中間支持-中間支持-自由の境界条件をもつ多径間連続板における動的増加率と速度パラメーターとの関係を示したものである。着目点は第 1 径間の中央点(図中の×印)である。図-3 の場合と同様に、動的増加率はいくつかの極値をもち、速度パラメーターの増加にともなって増加する。連続板の減衰力の影響についてみると、一般的に動的増加率は対数減衰率が増加するにつれて相似的に減少する。また、実際の橋梁構造物の対数減衰率は約 $d=0.05$ 前後であることから、非減衰の場合($d=0.0$)に比較して、その差異は数パーセントであり減衰力の影響は小さい。

4. あとがき

本研究によって得られた結論を要約すると以下のとおりである。

1) 走行荷重による多径間連続板の動的応答に対する理論式が式(16)のように誘導された。

2) 図-3、4 における動的増荷率と速度パラメーターとの関係図は非常に有効な図である。つまり、橋梁構造物の速度パラメーターが与えられれば、その値に対応する動的増加率がこの両図から求められる。

3) 動的増加率はいくつかの極値をもち、速度パラメーターの増加にともなって増加する傾向がある。

4) 図-3 から、一般的に連続板の幅員長が増加するにつれて、動的増加率は減少する。

5) 動的増加率は対数減衰率が増加するにつれて、相似的に減少する。また、実際の橋梁構造物では減衰力の影響は小さいものと考えられる。

(参考文献)

1) 山田善一・小堀為雄：ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究，土木学会論文報告集，第119号，昭40.7，pp.1～9。 2) 平井一男：移動荷重をうける相対 2 辺単純支持、他の 2 辺自由なる直交異方性板の振動性状について，土木学会論文報告集，第92号，昭38.4，pp.1～10。 3) 渡辺昇・林川俊郎・下山哲志：変断面連続桁の走行荷重による振動性状について，土木学会北海道支部論文報告集，第34号，昭53.2，pp.107～110。 4) 林川俊郎・渡辺昇・大島久：任意境界条件をもつ連続板の走行荷重による振動解析，第33回土木学会年次学術講演会講演概要集，第1部，昭53. 9，pp. 522～523。

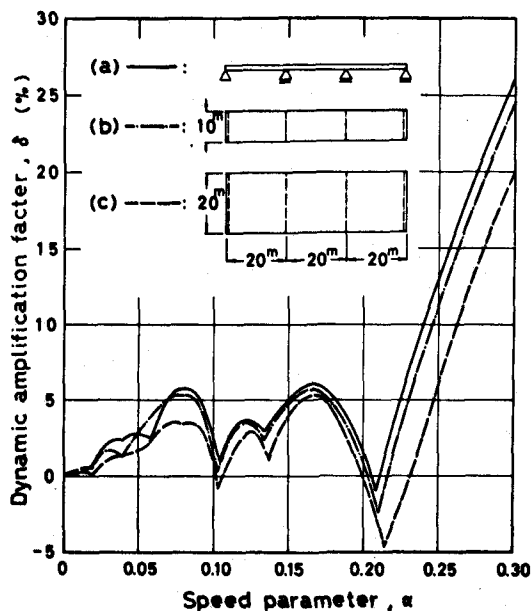


図-3 動的増加率と速度パラメーター

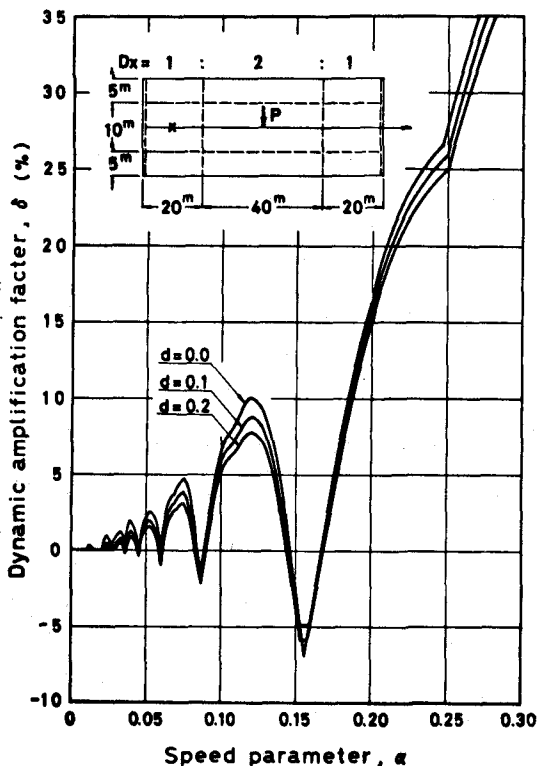


図-4 動的増加率と速度パラメーター