

I-18 走行荷重によるバネ支承上の多径間連続桁の振動特性

北海道大学工学部 正 員 渡 辺 昇

北海道大学工学部 正 員 林 川 俊 郎

北海道大学工学部 学生員○今 野 信 一

1. まえがき

本研究は、単一走行荷重が一定速度で多径間連続桁上を走行する場合の振動について、支持点を弾性支持点と考え、さらに質点慣性力をも考慮して、モーダル解析を行なうものである。解析にあたって、弾性支持点の変位、変位角ならびに荷重載荷点の変位加速度に関して、桁、質点、弾性支持点の連成問題として、動的特性を考えてみる。

2. 理論の概要

桁の動たわみは $W(x, t)$ で $\varphi_k(x)$ 、 $Q_k(t)$ をそれぞれ第 k 次固有関数、一般座標とすると次式で与えられる。添字 i は径間の順番を意味する。

$$W(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x) \cdot Q_k(t) \quad (1)$$

$$\varphi_k(x) = \varphi_{ki}(x_i) = A_{ki} \cos \beta_{ki} x_i + B_{ki} \sin \beta_{ki} x_i + C_{ki} \cosh \beta_{ki} x_i + D_{ki} \sinh \beta_{ki} x_i \quad (2)$$

ここで、 λ_{ki} を固有値とすれば $\beta_{ki} = \lambda_{ki} / l_i$ で、固有値および積分定数 $A_{ki} \sim D_{ki}$ は、「伝達マトリックス法」、「剛性マトリックス法」により求められ、固有関数は任意の境界条件を満足している。固有関数については、次のような性質がある。ただし、 ρ, EI, l はそれぞれ桁の単位長さあたりの質量、曲げ剛性、部材長である。

$$\int_0^l \rho \cdot \varphi_k(x) \cdot \varphi_j(x) \cdot dx = 0, \int_0^l EI \cdot \varphi_k''(x) \cdot \varphi_j''(x) \cdot dx = 0 \quad (k \neq j, \text{固有関数の直交性}) \quad (3)$$

$$\int_0^l \rho \cdot \varphi_k^2(x) \cdot dx = \frac{\rho l}{2} \cdot (A_{ki}^2 + B_{ki}^2 + C_{ki}^2 + D_{ki}^2), \int_0^l EI \{ \varphi_k''(x) \}^2 \cdot dx = \int_0^l EI \cdot \beta_{ki}^4 \cdot \varphi_k^2(x) \cdot dx \quad (4)$$

2-1. Lagrange のエネルギー法による解法

Lagrange の方程式により図-1にあるような解析モデルの基礎微分方程式は次のように誘導される。なお、質点重心位置の変位 $Z(t)$ は橋面の鉛直変位と等しいものとする。すなわち $Z_r(x_v)$ を路面の不規則凹凸量とすると次式となる。

$$Z(t) = W(x_v, t) + Z_r(x_v) \quad (5)$$

第 k 次一般座標に関しては次式で与えられる。

$$\ddot{Q}_k(t) + 2n \dot{Q}_k(t) + \omega_k^2 Q_k(t) + \frac{1}{N_k^2} \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(t) \cdot \kappa_{jk} + \frac{M}{N_k^2} \varphi_k(x_v) \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \ddot{Q}_j(t) \cdot \varphi_j(x_v) = \frac{M}{N_k^2} \{ g - \ddot{Z}_r(x_v) \} \cdot \varphi_k(x_v) \quad (6)$$

ここで、

$$2n = \frac{\int_0^L \rho \cdot \varphi_k^2(x) \cdot dx}{\int_0^L \rho \cdot \varphi_k^2(x) \cdot dx}, \omega_k^2 = \frac{\int_0^L EI \{ \varphi_k''(x) \}^2 \cdot dx}{\int_0^L \rho \cdot \varphi_k^2(x) \cdot dx} = \frac{EI_i}{\rho_i} \beta_{ki}^4, N_k^2 = \int_0^L \rho \cdot \varphi_k^2(x) \cdot dx$$

$$\kappa_{jk} = \sum_{i=1}^m \{ k_i \varphi_j(x_i) \varphi_k(x_i) + K_i \varphi_j'(x_i) \varphi_k'(x_i) \}, L = \text{全橋長}, (\dot{X} = \frac{dX}{dt}, X' = \frac{dX}{dx})$$

c, n = 桁の粘性減衰定数, ω_k = 桁の非減衰固有振動数, m = バネ支点数, g = 重力加速度

式(6)の左辺第四項、第五項はそれぞれ、バネ、質点慣性力による連成項であり、右辺の $\ddot{Z}_r(x_v)$ は、

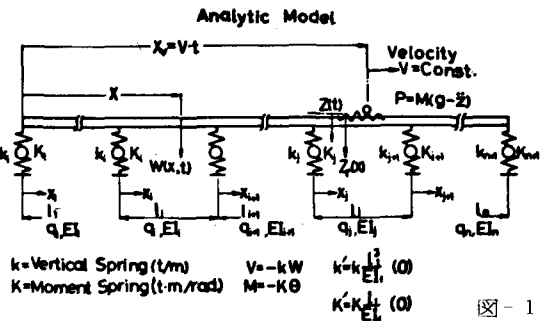


図-1

実橋の走行試験や確率変数のシミュレーションによりインプットできる路面凹凸の変位加速度である。

このモーダル解析で、 N 次まで考えるならば、変数係数をもつ N 元連立二階常微分方程式を解くことになる。しかし、直接、解析解を求めるには困難がともなうので、初期値問題として数値計算により、解を求める。式(6) をマトリックス表示すると次のようになる。

$$[I \ M] \{\ddot{Q}(t)\} + 2 \ n \{\dot{Q}(t)\} + [E \ K] \{Q(t)\} = \{M \ V\} \quad (7)$$

ここに、
$$I_{M_{kj}} = \begin{cases} \frac{1}{N_k^2} \varphi_k(x_v) \varphi_j(x_v) & (k \neq j) \\ 1 + \frac{1}{N_k^2} \varphi_k^2(x_v) & (k = j) \end{cases}, \quad E_{K_{kj}} = \begin{cases} \frac{\kappa_{kj}}{N_k^2} & (k \neq j) \\ \omega_k^2 + \frac{\kappa_{kk}}{N_k^2} & (k = j) \end{cases}, \quad M_{V_j} = \frac{1}{N_j^2} \left\{ \varepsilon - \ddot{Z}_r(x_v) \right\} \varphi_j(x_v)$$

初期条件： $Q_k(t=0)=0, \dot{Q}_k(t=0)=0$ 、つまり、 $t=0$ において静止しているものとする。

係数マトリックス $[I \ M]$ および $\{M \ V\}$ は、走行時間とともに変化する。以上を Runge-Kutta-Gill 法で解き、独立変数 t のキザミは、0.005 以下とした。ただし、低速における解はキザミ数を非常に大きくとる必要があり、かなりの計算時間を要する。

2-2. d'Alembert の原理に基づく梁の曲げ振動微分方程式による解法

もう一つの解法として、梁の曲げ振動の基礎微分方程式より解析解を Laplace 変換により得ることができる。これは、エネルギー法による厳密解において質点慣性力、バネ支点変位の連成を無視したものとなる。この解析解により、数値計算で連成項を無視した解との誤差を比較検討でき、有効数字 3~5 桁までの一致がみられた。方程式、解は次式で与えられ、 $p(x, t)$ は作用する分布荷重強度である。

$$EI \frac{\partial^4 W(x, t)}{\partial x^4} + 2 \ n \ \rho \frac{\partial W(x, t)}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial t^2} = p(x, t) \quad (8)$$

$$\ddot{Q}_k(t) + 2 \ n \ \dot{Q}_k(t) + \omega_k^2 Q_k(t) = \frac{P}{N_k^2} \varphi_k(x_v = vt) \quad (9)$$

$$Q_k(t) = e^{-nt} \left[Q_k(0) \cdot \left\{ \cos \alpha_k t + \frac{n}{\alpha_k} \sin \alpha_k t \right\} + \dot{Q}_k(0) \frac{\sin \alpha_k t}{\alpha_k} \right] + \frac{P}{N_k^2 \alpha_k} \int_0^t \varphi_k(v\tau) \cdot e^{-n(t-\tau)} \sin \alpha_k(t-\tau) \cdot d\tau \quad (10)$$

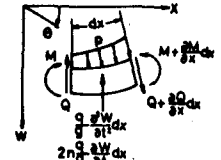


図-2

ここで、 $\alpha_k = \sqrt{\omega_k^2 - n^2}$ 、 $p(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P}{N_k^2} \rho \cdot \varphi_k(vt) \cdot \varphi_k(x) \dots$ (集中荷重のアフィン荷重展開)

一般座標の Duhamel 積分項は固有関数の定義区間ごとに定積分でき、荷重についても任意の荷重状態に対して固有関数の直交性等を利用してアフィン荷重展開できる¹⁾。

$$p(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\rho}{N_k^2} \int_0^L p(x, t) \cdot \varphi_k(x) \cdot dx \right\} \varphi_k(x) \dots \text{(振動アフィン荷重展開基本式)} \quad (11)$$

3. 固有値、固有振動数

前述の「伝達マトリックス法」、「剛性マトリックス法」によって求められた固有値を図-3、4に示す。一般に系の支持条件がかたくなると固有値の二乗に比例して固有振動数は高くなる。橋梁系の支持条件、断面比等はこの解析過程で考慮されており、変断面桁についても変断面区間ごとに区切れば同様に固

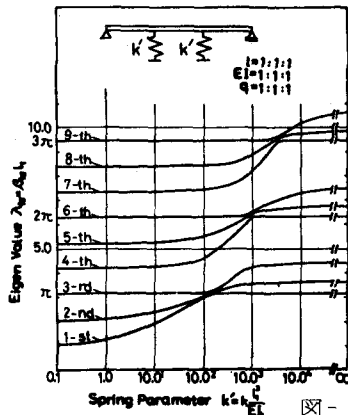


図-3

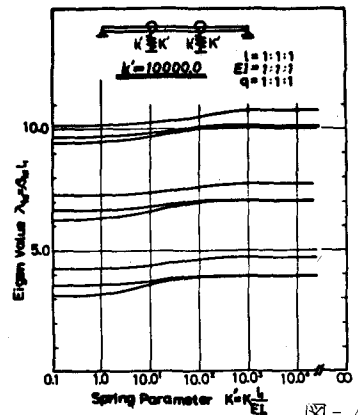


図-4

有関数まで求める。

4. 数値解析例および考察

固有値を求める際に、弾性支持点がある場合、パネ定数の値によっては、固有値の接近が生じ、適当な変形や単元化が必用である。桁の粘性減衰定数は次数によらず一定とした。系の第 k 次固有振動に対する対数減衰率を δ_k とすると、 $n=\delta_k\omega_k/2\pi$ ($=\text{const.}$) なる関係があることが報告されており一次のみを考える。以下、 δ_1 を対数減衰率 δ として値を与えている。実験による平均値として連続桁では、ほぼ $\delta=0.1$ 位であるので、減衰を考える場合は $\delta=0.1$ とした。また、計算にあたっては、路面凹凸を考えず平滑路面とし、たわみの級数項は10次までとった。この誤差は式 (10) による解析解で速度を微小として静たわみと比較した際に 2% 以下で、十分な精度であった。動的特性の検討には動的増加率 D.A.F. と速度パラメータ θ なるものを用いる。

$$\text{D.A.F.} = \left(\frac{\text{最大動たわみ} - \text{最大静たわみ}}{\text{最大静たわみ}} \right) \times 100 (\%) \quad (12)$$

$$\theta = \left(\frac{\lambda_{11} v}{l_1} \right) / \omega_1 = \frac{v l_1}{\lambda_{11} \sqrt{EI_1}}$$

以下に示す断面諸元の三径間連続桁について、中間二支点を弾性支持点とし、三径間ラーメン橋に対応できるようなものを考えた。(図 - 5)

スパン長: $l_1=l_2=l_3=40 \text{ m}$

曲げ剛性: $EI_1=EI_2=EI_3=3.4 \times 10^6 \text{ tm}^2$

桁単位長重量: $q_1=q_2=q_3=8.5 \text{ t}$

パネ定数: $k_1=k_2=53.125 \times 10^4 \text{ t/m}$

$K_1=K_2=8.5 \times 10^4 \text{ tm/rad.}$

(ラーメン脚部: $l_1=l_2=10 \text{ m}$, $EA_1=EA_2=5.3 \times 10^6 \text{ t}$
 $EI_1=EI_2=0.85 \times 10^6 \text{ tm}^2$)

第一径間の断面諸値を標準値として無次元化すると、

$k'_1=k'_2=10000.0$, $K'_1=K'_2=1.0$ となる。

上記断面諸元の三径間連続桁の径間中央点の動たわみ影響線図を、種々、条件を変えて図 - 6 ~ 8 に示す。標準値は第二径間中央点の最大静たわみを取り、これを 1.0 としてある。質点重量を 2 倍にしても単純に動たわみは 2 倍にならず、慣性力の影響がうかがえる。特に過渡状態つまり、たわみが最大になるような状態時に影響が大きく、自由振動状態では逆に小さくなる場合がある。これは桁の変位加速度が一定でないこと、線形性を有しないことによる。また δ を 0.0 と 0.1 で動たわみを求めたが、減衰の影響が過渡状態よりも自由振動状態に大きくあらわれている様子がよくわかる。減衰効果は高速においてはかなり最大動たわみを減少させるが、 θ が 0.5 までの範囲では、あまり効果はなく 5% 以下であった。ここで、質点慣性力というものが D.A.F. 値にかなり大きく影響していると考えられる。

次の 4 種類の場合についての動たわみを図 - 7 に示す。

CASE - 1: 厳密にパネ、質点慣性力の連成を考慮する。

CASE - 2: パネの連成を無視し、慣性力を考慮する。

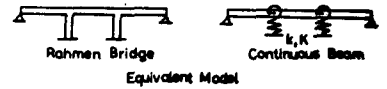


図 - 5

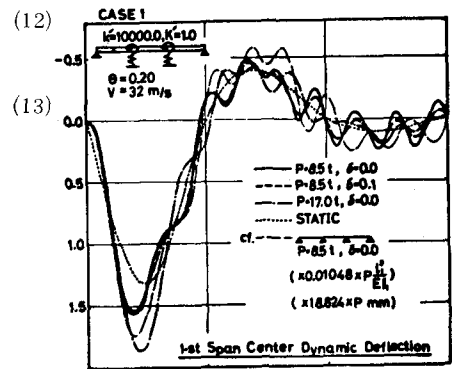


図 - 6

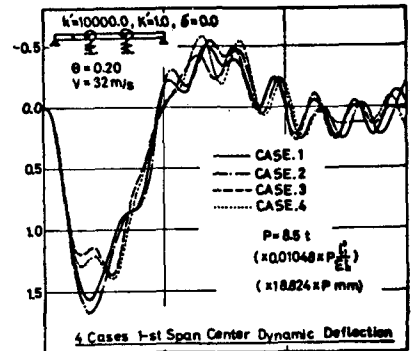


図 - 7

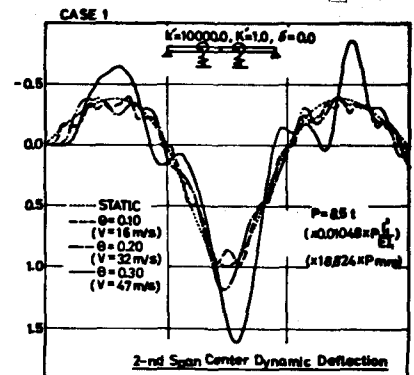


図 - 8

CASE-3: 慣性力を無視し、パネの連成を考慮する。

CASE-4: パネ、慣性力の連成を無視する。

図より、質点慣性力を考慮すると動たわみ最大値がかなり大きくなることがわかる。また、パネを考慮すると動たわみ最大値が減少し、自由振動状態の動たわみが逆に大きくなっている。図-6に参考として同じ断面諸元の三径間連続剛支持桁の動たわみを細線で描いてある。

図-9,10は、速度変化に応じてのD.A.F.値を前述の4種類の場合について求めたものである。第一径間の動的性状が比較的単純であるのに対し、第二径間の動的性状が複雑になるのは、過渡状態に入る時の振動状態の違いによるものである。同様の理由により、第三径間の動的性状は、より複雑となる。

一般に、高速になると第一径間のD.A.F.が第二径間のD.A.F.よりも大きくなり、また、質点慣性力が非常に大きな影響を及ぼし、D.A.F.を大きくしていることがわかる。さらに、低速においては、パネの影響が大きく、連成解によるD.A.F.が負の値になる要因となっている。パネの作用は常にD.A.F.を減少させる方向に働き、質点慣性力を考えない場合、パネの連成を無視したD.A.F.図によりほぼ動的性状の傾向をつかむことができ、安全側になる。

ここで、質点慣性力、パネの連成を無視したD.A.F.- θ の関係図をパネ定数を種々変えて表わしたのが図-11,12である。このタイプの連続桁では、第一径間については回転パネがかたくなるとD.A.F.値が大きくなり、第二径間については、回転パネがかたくなるとD.A.F.値が小さくなるような傾向がある。

5. あとがき

以上のように、固有値、固有関数が求まっていれば、質点慣性力、パネを連成させて解くことができ、また、両者の連成を無視して簡単に動的性状を把握することもできる。そして質点慣性力というものが速度とともに、動的増加率に大きく影響していること、減衰力については高速でなければそれほど影響力がないことがわかった。

本研究によりラーメン橋や支承部の摩擦抵抗、あるいは、鉄道レールの枕木のように弾性的支持点を有する連続桁の走行荷重による振動解析が可能となった。

さらに、車両を2自由度のSprung-massにモデル化したり、車両や桁に初期条件を与え、路面の不規則成分を考慮しての動的解析、確率論的解析といった方向への応用が可能ではないかと考えられる。

本計算には、北海道大学大型電子計算機センターのFACOM 230-75を使用した。

(参考文献) 1) 渡辺・林川・下山: 変断面連続桁の走行荷重による振動性状について, 土木学会北海道支部論文報告集34号。2) 伊藤・片山: 橋梁構造の振動減衰, 土木学会論文集第117号。

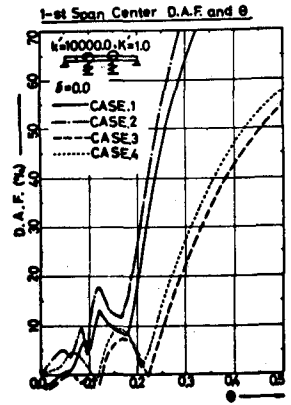


図-9

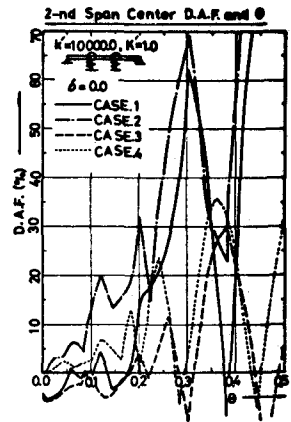


図-10

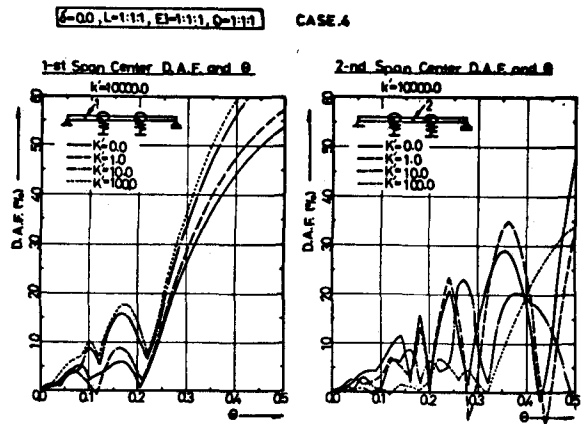


図-11

図-12