

I-12 比較的厚い扇形平板の曲げ解析について

北見工業大学 正員 奥村 勇

北海学園大学 正員 本多 祐也

北海道大学 正員 芳村 仁

1. 結 言

矩形厚板, あるいは, 円形厚板の解析に関する研究は, 古くより数多く見受けられるが, 扇形厚板に関する研究は, あまり見当たらないようである。厚板の解析に関する既往の研究を大別してみれば, Reissner¹⁾の理論, Mindlin²⁾の理論, Love³⁾の理論および厳密なる次元弾性論などに基づくものである。Reissnerの理論による研究としては, Frederick⁴⁾, Salerno⁵⁾およびHirsch⁶⁾などの研究が見受けられ, 厚板解析の理論として, 多く採用されているようである。Reissnerの理論は, 応力の板厚方向における変化を一次変化に仮定しているため, 適合条件式の一つを満足していないが, 境界条件が規定し易い形で解が求められている。

一方, Mindlinの理論においては, 水平方向の変位成分が, 板厚方向に関して一次変化と仮定されているが, Loveの理論は, 変位あるいは応力成分に関するなんらの仮定も設けず, 3つのつり合い方程式および6つの適合条件式を厳密に満足している平面応力解, 一般化平面応力解および荷重条件に関連した特殊解の3つの解の組合せより成り立っているが, 最後の荷重条件に関連した特殊解を求めることが一般的にはむずかしいとされており, 古くからある理論としては, あまり採用されていないようであるが, 矩形厚板に関する小林ら⁷⁾および円形厚板に関するHata⁸⁾らの研究はこの理論に基づくものである。厚板といえども, 厳密なる次元弾性論に基づいた解析が最も正確なものであり, これに基づく研究として, 園田・堀川⁹⁾, Srinivasら¹⁰⁾の研究が見受けられるが, 3次元弾性論に基づいた場合には, 3次元的に考える厚板の厚さを薄くすると, 理論的には解析可能でも, 数値計算上は, 解の収束が遅くなったり, あるいは, 通常の方法では, 計算困難となることもあり, 3次元弾性論の適用には, 一つの限界があるように思われる。

前述した研究のほか, Kromm¹¹⁾, Woinowsky-Krieger¹²⁾, Panc¹³⁾, あるいは, Reissner理論の改良として, 倉田・堀川¹⁴⁾, また, Integral Methodによる園田・島田¹⁵⁾らの研究も見受けられ, 可能な限り簡略な方法で, しかも, 精度の高い厚板の解析方法を求めて今日まで研究が進展して来ている。

本報告は, 比較的厚い扇形平板の曲げ解析を目的とするものであり, 解法は, 本質的には, Love³⁾の矩形厚板に関する理論を扇形厚板に応用したものである。円筒座標系における平面応力解および一般化平面応力解をつり合い方程式および適合条件式より厳密に求め, さらに, 難解とされている荷重条件に関連した特殊解は, 厳密なる次元解より求め, その3つの解を重ねて境界条件および荷重条件を満足するようにしたものであり, 円筒座標系における平面応力解, 一般化平面応力解および3次元解が求められていれば, きわめて簡明な解法であり, なんらの仮定をも含んでいない。

また, 数値計算においては, 扇形平板の厚さを薄くし, この解析方法による結果と, 著者らの二人¹⁶⁾の薄板理論による解析結果との比較を行った。

2. ひずみ・応力成分およびつり合い方程式

円筒座標系 (r, θ, z) において, r, θ および z 方向の変位成分をそれぞれ u, v および w で表わすと, ひずみ成分は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \\ \epsilon_{rz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1)$$

また、ひずみ成分と応力成分との関係は、次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{rr} &= 2G \left(\epsilon_{rr} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = 2G \left(\epsilon_{\theta\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right), \quad \sigma_{zz} = 2G \left(\epsilon_{zz} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \right) \\ \sigma_{r\theta} &= G \cdot 2\epsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{\theta z} = G \cdot 2\epsilon_{\theta z}, \quad \sigma_{rz} = G \cdot 2\epsilon_{rz} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 G :せん断弾性係数、 ν :ポアソン比、 $e = \epsilon_{rr} + \epsilon_{\theta\theta} + \epsilon_{zz}$

また、応力成分で表わされなければならない場合、方程式は次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + X_r &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} + X_\theta &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{1}{r} \sigma_{rz} + X_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3)$$

3. 適合条件式

平面応力解および一般化平面応力解を求めるには、つり合い方程式のほか、適合条件式が必要となる。円筒座標系におけるひずみの適合条件式(17)を式(2)および式(3)を用いて応力成分で表わすと次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{zz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial \Theta}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} X - 2 \frac{\partial X_z}{\partial z} \\ \nabla^2 \sigma_{rr} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} X - 2 \frac{\partial X_r}{\partial r} \\ \nabla^2 \sigma_{\theta\theta} + \frac{4}{r^2} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r^2} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta^2} \right\} \\ &= -\frac{\nu}{1-\nu} \operatorname{div} X - 2 \left(\frac{X_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \sigma_{r\theta} - \frac{4}{r^2} \sigma_{r\theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) &= - \left(-\frac{X_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial X_r}{\partial \theta} + \frac{\partial X_\theta}{\partial r} \right) \\ \nabla^2 \sigma_{\theta z} - \frac{\sigma_{\theta z}}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \theta \partial z} &= - \left(\frac{1}{r} \frac{\partial X_z}{\partial \theta} + \frac{\partial X_\theta}{\partial z} \right) \\ \nabla^2 \sigma_{rz} - \frac{\sigma_{rz}}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial r \partial z} &= - \left(\frac{\partial X_z}{\partial r} + \frac{\partial X_r}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\}$$

ここで、 $\Theta = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta} + \sigma_{zz}$, $X = (X_r, X_\theta, X_z)$, $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

式(4)の始めから3つの式を相加すると、 $\nabla^2 \Theta = -(1+\nu) \operatorname{div} X / (1-\nu)$ となるので、物体力 X_r, X_θ および X_z が0の場合、あるいは、物体力の発散が消失する場合、 Θ は3次元の調和関数となる。

4. 平面応力解

$X_r = X_\theta = X_z = 0$ および $\sigma_{zz} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta z} = 0$ として、式(4)および式(1)より、平面応力解を求める。次のようである。

$$\Theta = \Theta_0 + \beta z, \quad (\beta: \text{定数}), \quad \nabla^2 \Theta_0 = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \dots \dots \dots (5)$$

$$X = X_0 + X_1 z - \frac{\nu}{2(1+\nu)} \Theta_0 z^2, \quad \nabla^2 X = \Theta = \Theta_0 + \beta z, \quad \nabla^2 X_0 = \Theta_0, \quad \nabla^2 X_1 = \beta \dots \dots \dots (6)$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 X}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \theta} \right) \dots \dots \dots (7)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{1}{E} \left(\xi + \beta r z + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{\partial \Theta_0}{\partial r} \right) - \frac{1+\nu}{E} \frac{\partial}{\partial r} (X_0 + X_1 z) \\ v &= \frac{1}{E} \left(\eta + \frac{\nu}{2} z^2 \frac{1}{r} \frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} \right) - \frac{1+\nu}{E} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (X_0 + X_1 z) \\ w &= -\frac{1}{E} \left\{ \frac{\beta}{2} (r^2 + \nu z^2) + \nu z \Theta_0 \right\} + \frac{1+\nu}{E} X_1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

ここで

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\eta}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\xi}{r} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \int \omega_\theta dr \right), \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\xi}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\eta}{r} \right) \quad \dots \quad (8')$$

また, E は材料弾性係数である。ここで, $\beta = 0$ とすると, すべての Stress-couple は 0 となり, Stress-resultant は

$$\left. \begin{aligned} T_{rr} &= \int_{-h}^h \sigma_{rr} dz = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left\{ 2h \chi_0 - \frac{\nu h^3 \omega_\theta}{3(1+\nu)} \right\} \\ S_{r\theta} &= \int_{-h}^h \sigma_{r\theta} dz = -\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ 2h \chi_0 - \frac{\nu h^3 \omega_\theta}{3(1+\nu)} \right\} \right], \quad S_{\theta r} = \int_{-h}^h (-\sigma_{r\theta}) dz = -S_{r\theta} \\ T_{\theta\theta} &= \int_{-h}^h \sigma_{\theta\theta} dz = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ 2h \chi_0 - \frac{\nu h^3 \omega_\theta}{3(1+\nu)} \right\}, \quad Q_r = 0, \quad Q_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (9)$$

となる。ここで, 板厚は $2h$ とし, $z=0$ の原点は中央面に置き, 上向きを正と取る。

5. 一般化平面応力解

$\chi_r = \chi_\theta = \chi_z = 0$, $\sigma_{zz} = 0$ および $z = \pm h$ において, $\sigma_{rz} = 0$, $\sigma_{\theta z} = 0$ の条件の下で, 式 (1), (3) および式 (4) より一般化平面応力解を求めると次のようになる。

$$\omega = \omega_1 z, \quad D_1^2 \omega_1 = 0 \quad \dots \quad (10)$$

上式において, ω_1 は, $\omega = \omega_0 + \omega_1 z$ となるのであるが, ω_0 の項は, すでに求めた平面応力解に属するものであるから, 最初よりはずしてゐる。

$$\chi' = z \chi_1' + \frac{2-\nu}{6(1+\nu)} z^3 \omega_1, \quad D_1^2 \chi' = -\frac{1-\nu}{1+\nu} z \omega_1, \quad D_1^2 \chi_1' = -\frac{1-\nu}{1+\nu} \omega_1 \quad \dots \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} T_{rr} &= \frac{z}{1+\nu} \omega_1 + \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \chi_1'}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{z}{1+\nu} \omega_1 + \frac{\partial^2 \chi_1'}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1'}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{rz} &= \frac{1}{2(1+\nu)} (h^2 - z^2) \frac{\partial \omega_1}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{1}{2(1+\nu)} (h^2 - z^2) \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) z \frac{\partial \chi_1'}{\partial r} + \frac{2-\nu}{6} z^3 \frac{\partial \omega_1}{\partial r} \right\}, \quad v = -\frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) z \frac{1}{r} \frac{\partial \chi_1'}{\partial \theta} + \frac{2-\nu}{6} z^3 \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} \right\} \\ w &= \frac{1}{E} \left\{ (1+\nu) \chi_1' + \left(h^2 - \frac{\nu}{2} z^2 \right) \omega_1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (13)$$

Stress-couple および Stress-resultant は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \int_{-h}^h z \sigma_{rr} dz = \frac{2h^3}{3(1+\nu)} \omega_1 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left\{ \frac{2h^3}{3} \chi_1' + \frac{(2-\nu)h^5}{15(1+\nu)} \omega_1 \right\} \\ M_{r\theta} &= \int_{-h}^h (-z \sigma_{r\theta}) dz = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} \right) \left\{ \frac{2h^3}{3} \chi_1' + \frac{(2-\nu)h^5}{15(1+\nu)} \omega_1 \right\}, \quad M_{\theta r} = -M_{r\theta} \\ M_\theta &= \int_{-h}^h z \sigma_{\theta\theta} dz = \frac{2h^3}{3(1+\nu)} \omega_1 + \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left\{ \frac{2h^3}{3} \chi_1' + \frac{(2-\nu)h^5}{15(1+\nu)} \omega_1 \right\} \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= \int_{-h}^h \sigma_{rz} dz = \frac{2h^3}{3(1+\nu)} \frac{\partial \omega_1}{\partial r}, \quad Q_\theta = \int_{-h}^h \sigma_{\theta z} dz = \frac{2h^3}{3(1+\nu)} \frac{1}{r} \frac{\partial \omega_1}{\partial \theta} \\ T_{rr} &= 0, \quad T_{\theta\theta} = 0, \quad S_{r\theta} = 0, \quad S_{\theta r} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (15)$$

板の中央面 ($z=0$) における z 方向の変位成分 $w(r, \theta, 0)$ を w_0 と表わすと, $D_1^2 D_1^2 w_0 = 0$ となり, w_0 は 2 次元の重調和関数となる。 w_0 を用いて, Stress-couple を表わすと次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} \right) \right\} + \frac{8+\nu}{10} D h^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (D_1^2 w_0) \\ M_{r\theta} &= D(1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial \theta} \right) + \frac{8+\nu}{10} D h^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (D_1^2 w_0), \quad M_{\theta r} = -M_{r\theta} \\ M_\theta &= -D \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_0}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w_0}{\partial r^2} \right) + \frac{8+\nu}{10} D h^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} (D_1^2 w_0) \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (16)$$

ここで, D は曲げ剛性であり, 次式で表わされる。

$$D = 2Eh^3/3(1-\nu^2)$$

上式の Stress-couple は, せん断変形の項を含んでおり, $h \ll 1$ とし, h^2 のかかる項を無視すれば, 通

帯の薄板理論における Stress-couple とする。

6. 荷重条件に関する特殊解

平面応力解および一般化平面応力解は、共に、 $\sigma_{zz} = 0$ であるので、板の上、下面における荷重条件を満たす。 σ_{rz} が必要となる。それを3次元解から求めることにし、3次元解の基本解として、Neuber の解に Boussinesq の第2基本解を付加した拡張された Neuber の解

$$2Gu = -\text{grad}(\bar{E}_0 + \nu \bar{E}) + 4(1-\nu)\bar{E} + 2\mu z \varphi \dots \dots \dots (17)$$

$$\therefore u = (u, v, w), \quad \nu = (\nu, 0, z), \quad \bar{E} = (\bar{E}_r, \bar{E}_\theta, \bar{E}_z), \quad \varphi = (0, 0, \varphi_z) \dots \dots \dots (17)'$$

$$\nu^2 \bar{E} = 0, \quad \nu^2 \varphi_z = 0, \quad \nu^2 \bar{E}_0 = 0$$

を用いることにする。式 (17)' より、変位ポテンシャルを求めると次のようである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{E}_{0z} &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega \sin m\theta \left\{ (A_{ts}^{(n)}) \cosh dmsz + L_{ts}^{(n)} \sinh dmsz \right\} J_m(dmsr) + (A_{ts}^{(n)}) \cosh dmsz + \\ &\quad + L_{ts}^{(n)} \sinh dmsz \Big\} Y_m(dmsr) \Big\} \\ \bar{E}_z &= -\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \omega \sin m\theta \left\{ (C_{ts}^{(n)}) \sinh dmsz + M_{ts}^{(n)} \cosh dmsz \right\} J_m(dmsr) + (C_{ts}^{(n)}) \sinh dmsz + \\ &\quad + M_{ts}^{(n)} \cosh dmsz \Big\} Y_m(dmsr) \Big\} \\ \varphi_z &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sin m\theta \left\{ (B_{ts}^{(n)}) \cosh dmsz + G_{ts}^{(n)} \sinh dmsz \right\} J_m(dmsr) + (B_{ts}^{(n)}) \cosh dmsz + \\ &\quad + G_{ts}^{(n)} \sinh dmsz \Big\} Y_m(dmsr) \Big\} \\ \bar{E}_{0r} &= 0, \quad \bar{E}_r = 0, \quad \bar{E}_\theta = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (18)$$

ここで、 $J_m(dmsr)$ および $Y_m(dmsr)$ は、それぞれ第1種および第2種の Bessel 関数を表わし、 $A_{ts}^{(n)}, \dots, G_{ts}^{(n)}$ は境界条件より求められるべき未知定数である。また、 n および dms は、それぞれ境界条件により選ばれる固有値である。式 (17) および式 (18) より変位成分を求め、式 (1) および式 (2) を用いれば、それぞれの応力成分が求められる。板の上、下面に作用する荷重は、全周荷重の場合を考えて

$$(\sigma_{rz})_{z=\pm h} = 0, \quad (\sigma_{\theta z})_{z=\pm h} = 0 \dots \dots \dots (19)$$

の条件を課すると、未知定数の間に次の関係が得られる。

$$\left. \begin{aligned} G_{ts}^{(n)} &= 0, \quad B_{ts}^{(n)} = 0, \quad G_{ts}^{(n)} = 0, \quad B_{ts}^{(n)} = 0 \\ A_{ts}^{(n)} &= \frac{C_{ts}^{(n)}}{dms} (1-2\nu - dms h \coth dms h), \quad L_{ts}^{(n)} = \frac{M_{ts}^{(n)}}{dms} (1-2\nu - dms h \tanh dms h) \\ A_{ts}^{(n)} &= \frac{C_{ts}^{(n)}}{dms} (1-2\nu - dms h \coth dms h), \quad L_{ts}^{(n)} = \frac{M_{ts}^{(n)}}{dms} (1-2\nu - dms h \tanh dms h) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (20)$$

したがって、最初に解に含まれてゐた 12 個の未知定数は、4 個の未知定数 $C_{ts}^{(n)}, M_{ts}^{(n)}, C_{ts}^{(n)}$ および $M_{ts}^{(n)}$ に減少する。この4個の未知定数は、板の周面における境界条件および上、下面における荷重条件より求められる。

7. 部分分布荷重を担う全周単純支持の比較的真円扇形平板の解析

次の図-1 に示したように、内半径 a 、外半径 b および中心角 2δ の全周単純支持の扇形平板が、中央に部分分布荷重を担う場合を考える。その場合の境界条件は、次のようである。

$$\theta = \pm \delta \text{ において } \left. \begin{aligned} w(r, \pm \delta, 0) &\equiv \bar{w}_0(r, \pm \delta) = 0, \quad u(r, \pm \delta, 0) \equiv \bar{u}_0(r, \pm \delta) = 0 \\ M_\theta &= 0, \quad T_{\theta\theta} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

$$r = a \text{ において } \left. \begin{aligned} w(a, \theta, 0) &\equiv \bar{w}_0(a, \theta) = 0, \quad \sigma_r(a, \theta, 0) \equiv \bar{\sigma}_0(a, \theta) = 0 \\ M_r &= 0, \quad T_{rr} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

$$r = b \text{ において } \left. \begin{aligned} w(b, \theta, 0) &\equiv \bar{w}_0(b, \theta) = 0, \quad \sigma_r(b, \theta, 0) \equiv \bar{\sigma}_0(b, \theta) = 0 \\ M_r &= 0, \quad T_{rr} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (23)$$

$$z = h \text{ において } \sigma_{zz} = -p(r, \theta), \quad z = -h \text{ において } \sigma_{zz} = 0 \dots \dots \dots (24)$$

$$\therefore p(r, \theta) = \begin{cases} p & [(a+b-c)/2 < r < (a+b+c)/2, -\delta < \theta < \delta] \\ 0 & \text{その他の領域} \end{cases} \dots \dots \dots (24)'$$

固有値 m を $m = t\pi/2h$ ($t=1, 2, \dots$) と選べば、境界条件 (21) は満たされる。式 (22) および式 (23) の w_0 に関する境界条件より、 $C_{ts}^{(2)} = -\varepsilon C_{ts}^{(1)}$, $M_{ts}^{(2)} = -\varepsilon M_{ts}^{(1)}$, ここで $\varepsilon = J_m(\lambda_{ms})/Y_m(\lambda_{ms})$, また, $\lambda_{ms} = \lambda_{ms}/a$ と, λ_{ms} は $J_m(\lambda_{ms}b/a)Y_m(\lambda_{ms}) - J_m(\lambda_{ms})Y_m(\lambda_{ms}b/a) = 0$ の根として選ぶ, 式 (24)' の $p(r, \theta)$ を Bessel 展開して式 (24) の境界条件を課すると, $C_{ts}^{(1)}$ および $M_{ts}^{(1)}$ が厳密に求められ, 特殊解の未知定数はすべて決定される。

第4章の平面応力解の χ_0 は, $\chi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \{ P_n^{(1)} r^{m+1} + P_n^{(2)} r^{-m} + P_n^{(3)} r^{m+2} + P_n^{(4)} r^{-m+2} \}$ とし,

第5章の一般化平面

応力解の χ_1 は, $\chi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos m\theta \{ Q_n^{(1)} r^{m+1} + Q_n^{(2)} r^{-m} + Q_n^{(3)} r^{m+2} + Q_n^{(4)} r^{-m+2} \}$ として変位成分, Stress-resultant および Stress-couple を求め, 特殊解と重ねて境界条件 (22) および (23) を課すると, 2組の4元連立1次方程式が得られ, それらを解け

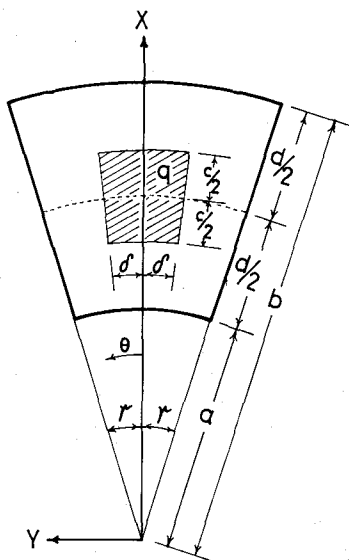
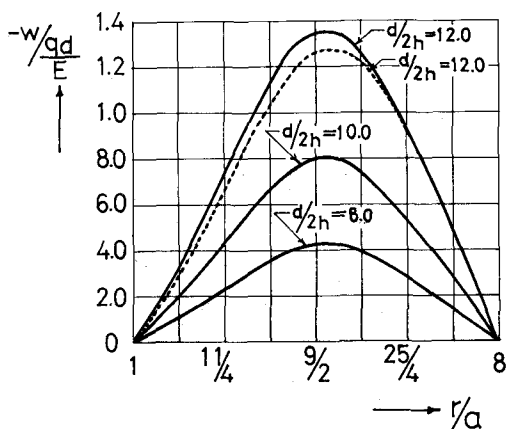


図-1 比較的厚い扇形平板



— : Theory of moderately thick plates

- - - : Theory of thin plates

図-2 $\theta=0$ Kにおける中央面のたわみ

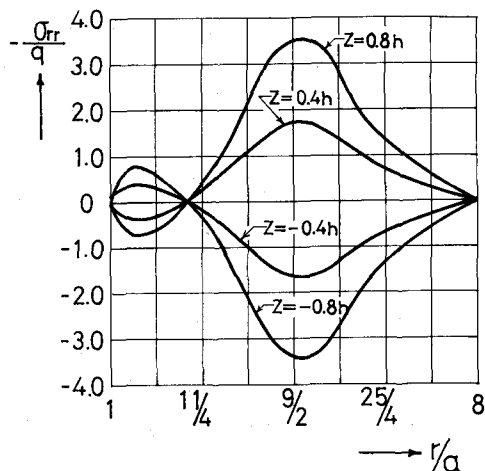


図-3 $\theta=0$ Kにおける σ_{rr} の分布

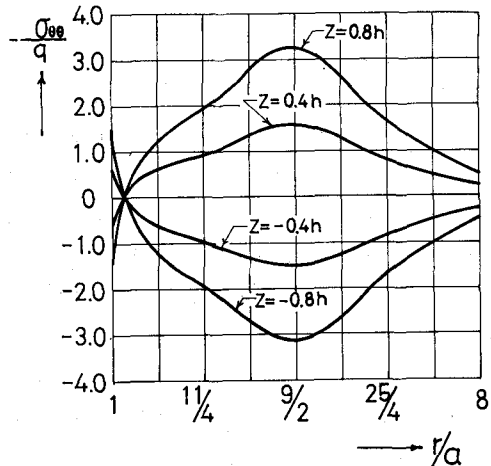


図-4 $\theta=0$ Kにおける $\sigma_{\theta\theta}$ の分布

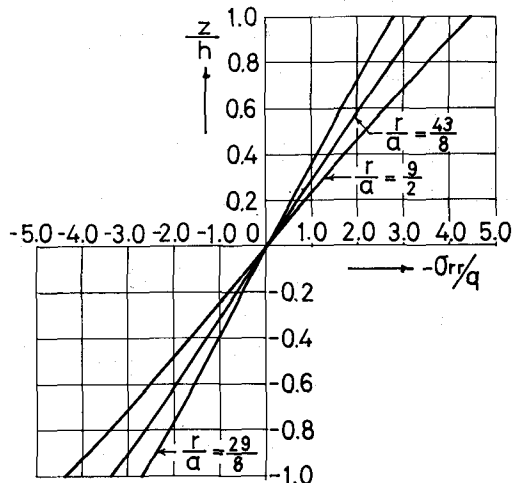


図-5 $\theta=0$ Kにおける σ_{rr} の分布

ば $P_0^{(0)}, \dots, Q_0^{(0)}$ が求められる。数値計算例として、 $\nu = \pi/4$, $S = \pi/16$, $b/a = 8.0$, $c = d/4$, $d/2h = 8.0$, ρ γ ν $\nu = 0.17$ とし、節数の項数は、 b は 15 項、 S は 70 項取り、計算結果の一部を図-2 から図-5 に示した。図-2 には、 $d/2h$ の値を変化させたときの中央面のたわみと薄板理論によるたわみとを示した。

8. 結 語

第7章の扇形平板の解析に関する部分は、数面の都合で、数式を大幅に省略したが、平面応力解、一般化平面応力解および特殊解が求められていれば、境界条件を課して数式を組み立てるだけのことであり、なんらの煩雑もない。厚板の場合の単純支持の条件の取り方は、種々あるが、本報告においては、前述の条件を採用した。

参考文献

- 1) Reissner, E.: The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 12, pp. A69-A77, June, 1945
- 2) Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates, J. Appl. Mech., Vol. 18, pp. 31-38, March, 1951
- 3) Love, A.E.H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, Chap. XXII, 4th ed., Dover Pub., 1944
- 4) Frederick, D.: On some problems in bending of thick circular plates on an elastic foundation, J. Appl. Mech., Vol. 23, pp. 195-200, June, 1956
- 5) Salerno, V.L. and M.A. Goldberg: Effect of shear deformations on the bending of rectangular plates, J. Appl. Mech., Vol. 27, pp. 54-58, March, 1960
- 6) Hirsch, R.A.: The effect of a rigid circular inclusion on the bending of a thick elastic plate, J. Appl. Mech., Vol. 19, pp. 28-32, March, 1952
- 7) 小林道明・石川博将・奈 謹一: 厚板理論による片持板の応力解析, 機械学会北海道支部, 第18回講演文集, pp. 13-16, 1975-10
- 8) Hata, K.: On the circular thick plate stressed by generally distributed normal load, Proc. 2nd Japan Nat. Cong. Appl. Mech., pp. 117-120, 1952
- 9) 園田恵一郎・堀川都志雄: 道路橋床版の輪荷重直下の応力の算定について, 土木学会論文報告集, No. 273, pp. 15-22, 1978-5
- 10) Srinivas, S., A.K. Rao and C.V.J. Rao: Flexure of simply supported thick homogeneous and laminated rectangular plates, Z.A.M.M., Band 49, Heft 8, S. 449-458, 1969
- 11) Kromm, A.: Verallgemeinerte Theorie der Plattenstatik, Ing.-Arch., Band 21, S. 266-286, 1953
- 12) Woinowsky-Krieger, S.: Der Spannungszustand in dicken elastischen Platten, Ing.-Arch., Band IV, Heft 3, S. 203-226, 1933
- 13) Panc, V.: Theories of Elastic Plates, Chap. 2-6, Noordhoff, 1975
- 14) 倉田宗章・堀川都志雄: 厚板の解析における Reissner 理論の改良, 土木学会第29回年次学術講演会, 第1部, pp. 146-147, 88 49-10
- 15) 岡村宏一・島田 功: 薄板および厚板理論の適性について, 土木学会第28回年次学術講演会, 第1部, pp. 318-319, 88 48-10
- 16) 芳村 仁・本多祐世: 部分分布荷重を担う扇形平板の曲げについて, 土木学会第28回年次学術講演会, 第1部, pp. 327-328, 88 48-10
- 17) Saada, A.S.: Elasticity, Theory and Applications, p. 142, Pergamon, 1974