

I-11 弾性固定を有する平板の弾性座屈について

北海道大学 正員 能町 純雄
 北海道大学 正員 角田 与史雄
 北海道大学 学生員 ○高橋 義裕

1. ま え が き

I型断面部材等の腹板の座屈安定を論ずる場合、しばしば弾性固定という条件でフランジのモデル化を行ない有益な結果を得ている²⁾。しかしフランジ剛度によっては、梁としての全体座屈が優先することは、良く知られている通りである。本論文では、純曲げを受けるI型断面部材を対象としてそのフランジ剛度によるウェブの局部座屈と部材全体が横方向に移動する横だおれ座屈との連成状況を明確にするためウェブとフランジ部を多数の帯板要素に分割する有限帯板法^{3,4)}により解析し、ウェブ高さと径間長との比をパラメータとして比較検討したものである。

2. 解 析 方 法

断面を構成する平板要素の幅方向を分割し、その1つの幅を b 、長さを l とする、 $b \times l$ を1つの帯板要素を考え、その要素に関する局所座標をFig-1(a)に示す。また $y=0$ と $y=b$ は連続している次の要素との節線であり、それぞれ r 辺、 $r+1$ 辺とする。座屈応力として r 辺、 $r+1$ 辺にそれぞれ $\sigma_x^{r,r+1}$, $\sigma_x^{r+1,r}$ が作用し、その境界断面力 $T_{r,r+1}$, $S_{r,r+1}$, $Q_{r,r+1}$, $M_{r,r+1}$, $T_{r+1,r}$, $S_{r+1,r}$, $Q_{r+1,r}$, $M_{r+1,r}$ でつり合っており、その境界断面力に対応する境界変位を u_r , v_r , w_r , θ_r , u_{r+1} , v_{r+1} , w_{r+1} , θ_{r+1} とすると、帯板要素の座屈変形にともなうポテンシャルエネルギー π は、変形が微小で、面外と面内の変形の連成がないものとして以下のように表わされる。

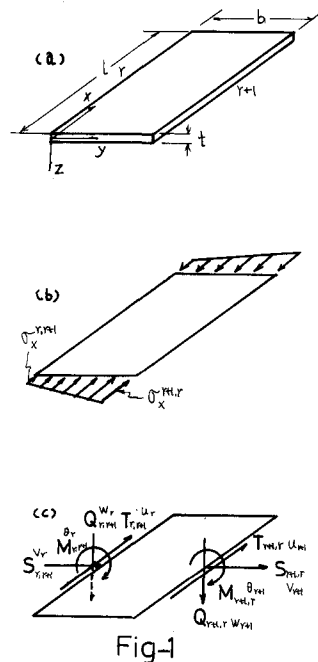


Fig-1

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ & + \frac{Et}{2(1-\nu^2)} \int_0^l \int_0^b \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2}(1-\nu) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \sigma_x \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \int_0^l \left\{ (T_{r,r+1} u_r + S_{r,r+1} v_r + Q_{r,r+1} w_r + M_{r,r+1} \theta_r) \right. \\ & \quad \left. + (T_{r+1,r} u_{r+1} + S_{r+1,r} v_{r+1} + Q_{r+1,r} w_{r+1} + M_{r+1,r} \theta_{r+1}) \right\} dx \end{aligned} \quad \dots \dots (1)$$

次に帯板要素内に作用する座屈応力 σ_x は、その要素では幅方向に関し1次式とし、また座屈変形により生じる面外変位 w 、面内変位 u 、 v の分布もそれぞれ幅方向に関しての、面外は3次式、面内は1次式と仮定する。以上仮定された座屈応力分布、面外変位、面内変位のそれぞれを(1)に代入し変分をとることにより境界断面力が軸方向、すなわち x に関する微分形で次の様に得られる。

$$T_{r,r+1} = -D \left\{ \frac{2b}{l^2} (2\dot{u}_r + \dot{u}_{r+1}) + \frac{6\nu}{l^2} (\dot{v}_{r+1} - \dot{v}_r) + \frac{3(1-\nu)}{l^2} (\dot{v}_r + \dot{v}_{r+1}) + \frac{6(1-\nu)}{b l^2} (u_{r+1} - u_r) \right\}$$

$$+\frac{b^2}{12}\{(\partial\sigma_x^{r,r+1}+\sigma_x^{r+1,r})\ddot{u}_r+(\sigma_x^{r,r+1}+\sigma_x^{r+1,r})\ddot{u}_{r+1}\} \quad \dots \quad (2-a)$$

$$S_{r,r+1}=-D\left\{\frac{12}{b^2}(V_{r+1}-V_r)+\frac{6\nu}{t^2}(\dot{u}_{r+1}-\dot{u}_r)+\frac{3(1-\nu)}{t^2}(\dot{u}_{r+1}-\dot{u}_r)+\frac{1-\nu}{t^2}b(2\dot{v}_r-\dot{v}_{r+1})\right\}$$

$$+\frac{b^2}{12}\{(\partial\sigma_x^{r,r+1}+\sigma_x^{r+1,r})\ddot{v}_r+(\sigma_x^{r,r+1}+\sigma_x^{r+1,r})\ddot{v}_{r+1}\} \quad \dots \quad (2-b)$$

$$Q_{r,r+1}=D\left\{\frac{1}{t^2}b(26\ddot{w}_r+9\ddot{w}_{r+1})+\frac{12}{420}b^2(22\ddot{\theta}_r-13\ddot{\theta}_{r+1})+\frac{12}{5b}(\dot{w}_{r+1}-\dot{w}_r)-\frac{1}{5}(\nu_5\ddot{\theta}_r+\ddot{\theta}_{r+1})\right.$$

$$+\frac{12}{b^2}(w_r-w_{r+1})+\frac{6}{b^2}(\theta_r+\theta_{r+1})\left.\right\}+\frac{b^2}{85}(10\sigma_x^{r,r+1}+3\sigma_x^{r+1,r})\ddot{w}_r+\frac{9}{140}bt(\sigma_x^{r,r+1}+\sigma_x^{r+1,r})\ddot{w}_{r+1}$$

$$+\frac{1}{420}bt(15\sigma_x^{r,r+1}+7\sigma_x^{r+1,r})\ddot{\theta}_r-\frac{b^2}{420}(7\sigma_x^{r,r+1}+6\sigma_x^{r+1,r})\ddot{\theta}_{r+1} \quad \dots \quad (2-c)$$

$$M_{r,r+1}=D\left\{\frac{1}{420}b^2(22\ddot{w}_r+13\ddot{w}_{r+1})+\frac{1}{420}b^2(4\theta_r-3\theta_{r+1})+\frac{1}{5}(-\nu_5\ddot{w}_r+\ddot{w}_{r+1})+\frac{1}{5}b(-4\ddot{\theta}_r+\ddot{\theta}_{r+1})\right.$$

$$+\frac{6}{b^2}(w_r-w_{r+1})+\frac{2}{b^2}(2\theta_r+\theta_{r+1})\left.\right\}+\frac{b^2}{420}(15\sigma_x^{r,r+1}+7\sigma_x^{r+1,r})\ddot{w}_r+\frac{b^2}{420}(6\sigma_x^{r,r+1}+7\sigma_x^{r+1,r})\ddot{w}_{r+1}$$

$$+\frac{1}{840}bt(5\sigma_x^{r,r+1}+3\sigma_x^{r+1,r})\ddot{\theta}_r+\frac{b^2}{280}(\sigma_x^{r,r+1}+\sigma_x^{r+1,r})\ddot{\theta}_{r+1} \quad \dots \quad (2-d)$$

ここで $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$, $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$, $f'' = \frac{d^2f}{dx^2}$, $\nu_s = 1 + 5\nu$ 。同様にして $r+1$ 辺についての境界断面力 $T_{r+1,r}$, $S_{r+1,r}$, $Q_{r+1,r}$, $M_{r+1,r}$ についても得られるがここでは、省略する。

今、軸方向すなわち x 方向両端、 $x=0, 1$ での境界条件として面内変位に対して自由、面外変形に対して単純支持の場合について考える。そこで上記境界条件を満足するように各節線断面力とそれに対応する境界変位を下記のフーリエ級数で表わす。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i \cos \frac{i\pi}{l} x, \quad v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad w = \sum_{i=1}^{\infty} w_i \sin \frac{i\pi}{l} x \\ \theta &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad T = \sum_{i=1}^{\infty} T_i \cos \frac{i\pi}{l} x, \quad S = \sum_{i=1}^{\infty} S_i \sin \frac{i\pi}{l} x, \quad Q = \sum_{i=1}^{\infty} Q_i \sin \frac{i\pi}{l} x \\ M &= \sum_{i=1}^{\infty} M_i \sin \frac{i\pi}{l} x \end{aligned} \right\} \quad \dots \quad (3)$$

(3) 式を (2-a)~(2-d) 式に代入し、面内せん断力を与える節線断面力 $T_{r,r+1}$ (同じく $T_{r+1,r}$) に対しては $\cos \frac{m\pi}{l} x$ を、その他の式には $\sin \frac{m\pi}{l} x$ を乗じ $0 \leq x \leq 1$ で有限フーリエ変換を行なえば、(2-a)~(2-d) 式は、それぞれのフーリエ係数で示される。従って得られた式よりフーリエ係数で与えられる剛性マトリックスと座屈応力を含む安定係数マトリックスとからなる剛性方程式を組み立てることができる。すなわち

$$\{f_m\}_e = [K_m]_e \{\delta_m\}_e - \sum_{i=1}^{\infty} [K_i^Q] \{\delta_i\}_e \quad \dots \quad (4)$$

となる。ここで $\{f_m\}_e$, $\{\delta_m\}_e$ は、それぞれ帯板要素のフーリエ係数で与えられる節線断面力ベクトルと節線変位ベクトルであり、 $[K_m]_e$, $[K_i^Q]_e$ も同じくフーリエ係数で与えられる帯板要素の要素剛性マトリックスおよび要素安定係数マトリックスである。

以上求められた帯板要素の要素剛性マトリックスと要素安定係数マトリックスのおのおのについて、その要素の位置に応じて、局所座標系から全体座標系への座標変換を行い、境界条件を考慮しつつ足しこんで系

全体の剛性方程式を得る。すなわち

$$\{F_m\} = [K_m]\{\Delta_m\} - \lambda \sum_{i=1}^n [K_i^e]\{\Delta_i\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

ここでλは、座屈応力を与える係数である。座屈問題は、(5)式の安定限界を求めることであるから次の同次式を扱うことになる。

$$[K_m]\{\Delta_m\} - \lambda \sum_{i=1}^n [K_i^e]\{\Delta_i\} = \{0\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

3. 数 値 計 算

Fig-2で示される I - 型断面部材に対し、ウェブ高さHとウェブ高さとウェブ
 壁厚との比 $\frac{H}{t_w}$ を一定とし、フランジ幅B、フランジ厚 t_f 、ウェブ高さと径間
 長 l との比 $\frac{l}{H}$ 等をパラメーターとし計算を行なった。また要素分割は、フラン
 ジ部は2分割、ウェブ部は8分割とした。座屈係数としては、次式を用いた。

$$K = \sigma_{cr} \frac{t_w H^2}{D \pi^2} \quad \text{ただし} \quad D = \frac{E t_w^3}{12(1-\nu^2)} \quad \dots \dots \dots (7)$$

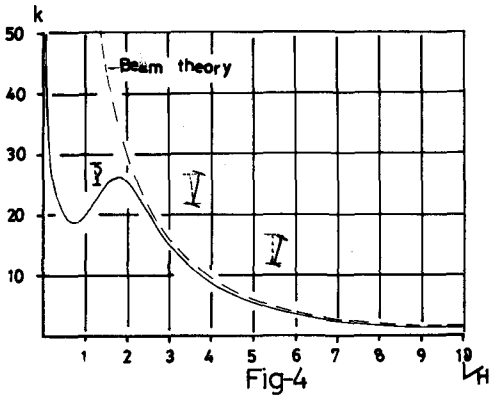
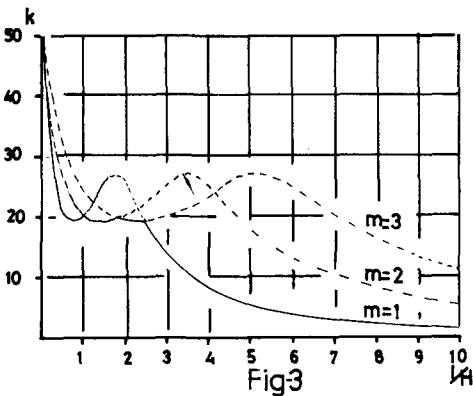
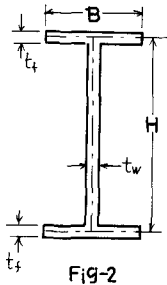


Fig-3は $\frac{B}{H} = 0.85$ について仮定する座屈半波数mのそれぞれに対応する座屈係数kの値を、横軸に $\frac{l}{H}$ をと
 りプロットしたものである。これらの曲線より比 $\frac{l}{H}$ が任意の値をとるとき、座屈係数kと座屈半波数の数m
 とを容易に定めることができる。Fig-4は、Fig-3で示される断面に対し座屈半波数m=1としたときの本
 解析方法により計算された座屈係数と梁理論¹⁾により計算された座屈係数を、横軸に $\frac{l}{H}$ をとりプロットしたも
 のである。Fig-5は、 $\frac{B}{H} = 0.15, 0.25, 0.35$ のそれ
 ぞれについて仮定する座屈半波数m=1としたときの座
 屈係数kを、横軸に $\frac{l}{H}$ をとりプロットしたものである。
 Fig-4の図中に示された座屈モードのスケッチより $\frac{l}{H}$
 が比較的小さい所では、ウェブの座屈が、また十分に
 大きい所では、部材全体が横方向に移動する横だおれ
 座屈が見られる。Fig-5よりフランジ幅がせまくなると
 プロットされる座屈曲線が一樣に減少しウェブ座屈
 と横だおれ座屈を分けるはっきりとしたピーク値が出
 ない。また横だおれ座屈には、フランジ幅の影響がか
 なりはっきりと見られる。

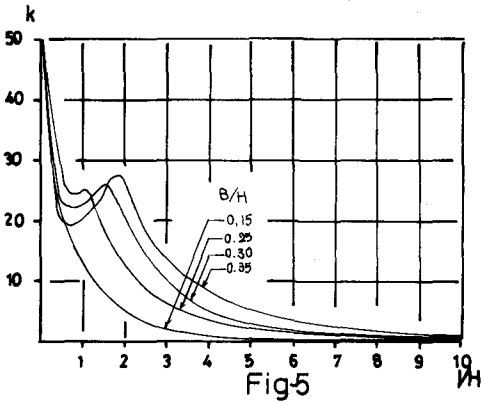
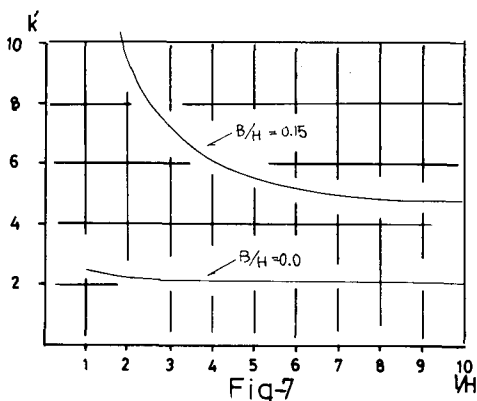
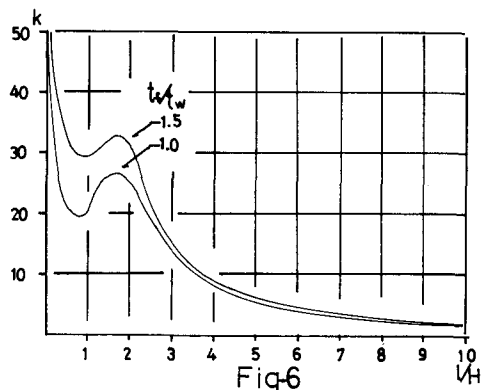


Fig-6は、フランジ幅とウェブ高さとの比 $\frac{B}{H}=0.35$ の場合について、フランジ厚とウェブ厚との比 $\frac{t_f}{t_w}$ をそれぞれ1.5、1.0としたときの座屈係数 k を横軸に $\frac{1}{H}$ をとりプロットしたものである。今の場合ウェブ厚 t_w を一定としているのでフランジ厚のみを変化させたことになるがその変化の座屈係数に及ぼす影響は、ウェブの座屈領域では、かなり大きく影響しているが、横だおれ座屈領域では、それほど大きく影響していない。またウェブの座屈する領域と横だおれ座屈を分ける $\frac{1}{H}$ の値にも、フランジ厚の変化は、それほど大きく影響していない。Fig-5とFig-6から横だおれ座屈領域ではフランジ幅が、またウェブの座屈領域ではフランジ厚が、その座屈係数に大きく影響していることが分かる。Fig-7は、フランジを有しない平板とフランジ幅とウェブ高さとの比 $\frac{B}{H}=0.15$ の場合について横軸に $\frac{1}{H}$ を、縦軸に $k'=\frac{1}{H}k$ をとりプロットしたものである。



4. あ と が き

以上有限帯板法を用いて I-型断面部材に純曲げが作用する場合について、ウェブ高さウェブ厚を一定とし、フランジ幅 B 、フランジ厚 t_f 、径間長 l を変化させてその座屈係数の計算を行なった。計算結果から I-型断面部材においてウェブ座屈する場合は、フランジ幅の影響よりもそのフランジ厚の影響の方が大きい、横だおれ座屈領域においては、逆にフランジ厚の影響よりもそのフランジ幅の影響の方が大きい。本解析方法は、断面変形を考慮しているので、断面変形を無視する梁理論により得られる座屈係数とは、ウェブの座屈領域においては、その差がはっきりとみられる。しかし横だおれ座屈領域においては、両者の座屈係数は、ほぼ一致してくる。

本論文に示した解析方法は、帯板要素からなる任意断面部材に適用可能であるが、実際的には、構成される全体剛性方程式の大きさ、それに伴う固有値、固有ベクトルを求める計算時間などにある程度制限を受ける。本数値計算では、フランジ部を 2 分割、ウェブ部を 8 分割の計 12 要素に分割し計算を行なった。

数値計算は、北海道大学大型計算機センター F A C O M 2.30-75 を使用した。

参 考 文 献

- 1) Timoshenko, S. P. and Gere, J. M. : Theory of Elastic Stability, 2nd ed. McGraw Hill, KOGAKUSHA, Tokyo.
- 2) 小西一郎・米沢 博・三上市蔵：プレートガーダーの曲げ弾性座屈、土木学会論文集、第 143 号、1967 年、7 月
- 3) 吉田宏一郎：帯板要素による平板構造の座屈解析、日本造船学会論文集、第 130 号、1971 年
- 4) 長谷川彰夫・大田孝二・西野文雄：補剛された板要素の座屈強度に関する二、三の考察、土木学会論文報告集、第 232 号、1974 年、12 月