

I-9 鉄筋コンクリート床版の非線型解析

北 大 ○上田正生・土橋由造

はじめに 平面や曲面版の弾性後の変形挙動を予測するための現在最も信頼し得る解法として、積層化有限要素法がある。この手法は当初、鋼のような等方性の弾-塑性材料を対象として開発されたもので、個々の要素の各薄層ごとに異なった材料性状の設定が可能のため、鉄筋コンクリートのような複合材料に対しても容易に拡張し得るものである。1971年、A.Scanlonは、RC床版のクリープと乾燥収縮による長期撓みの解析を主目的として、この手法に初期歪法を用い、1972年にはF.R.Handかつ又、これと相前後してC.S.Linが、初期応力法により漸増荷重を受けるRC床版と曲面版の材料非線型解析を行った。その後、この積層化手法を用いた同種の研究としては、Wanchoo,前田,Raoや著者等の報告がある。これらの研究のうち、コンクリートの引張り側にも弾-塑性の仮定を使用した著者の解析以外は、凡てHandとLinの研究の流れを汲む初期応力法に基づく変形法によるものであつて、各解法の主要な違いは使用した要素の自由度と、コンクリートの破壊条件の相違にあるが、中でも、コンクリートの2軸圧縮領域に於ける応力-歪関係に、Kupferの示した接線剛性マトリクスを用いた前田の研究が注目される。本報告は、初期応力法の概念を混合型有限要素法に適用し、亀裂の影響を考慮に入れたRC床版の材料非線型解析について述べ、解の妥当性を検証するため、既往の実験及び解析値との比較・検討を行ったものである。

1 解析のための基本仮定

(1) 弾性から破壊に至るまで、法線保持の仮定が成立し、微小変形理論を適用し得る。

(2) 床版を仮想のコンクリート層と、鉄筋の線材層に分割する積層要素で表示し、鉄筋は軸力のみを負担する線材として取り扱い、その位置は任意とする。又、コンクリートと鉄筋の間には生じないものとする。

(3) 鉄筋は弾-塑性体と仮定する。

(4) 層状に仮想分割されたコンクリートの各薄層は平面応力場にあるものと見做し、コンクリートを2軸引張り、引張り-圧縮領域で主応力 σ_1 と、垂直方向に亀裂の発生する脆性材料として取り扱い、以下に示す2種の応力-歪関係を用いて解析を行う。

K-型: KupferとGerstle⁴が、コンクリートブロック供試体の実験結果に基づき、平面応力下にあるコンクリートに対して与えた、非線型応力-歪関係 $[kD_t]$ (接線材料剛性マトリクス)、及び $[kD_s]$ (割線材料剛性マトリクス)を使用し、亀裂や圧壊が生ずる以前の材料非線型性も考慮に入れ、2軸圧縮領域では、歪表示のMikkola³タイプの圧壊条件を設定する。

E-型: 2軸圧縮領域は弾-塑性、他の応力状態では弾性-亀裂材料として取り扱う一般的な応力-歪関係を用い、2軸圧縮領域では、Mikkolaの降伏

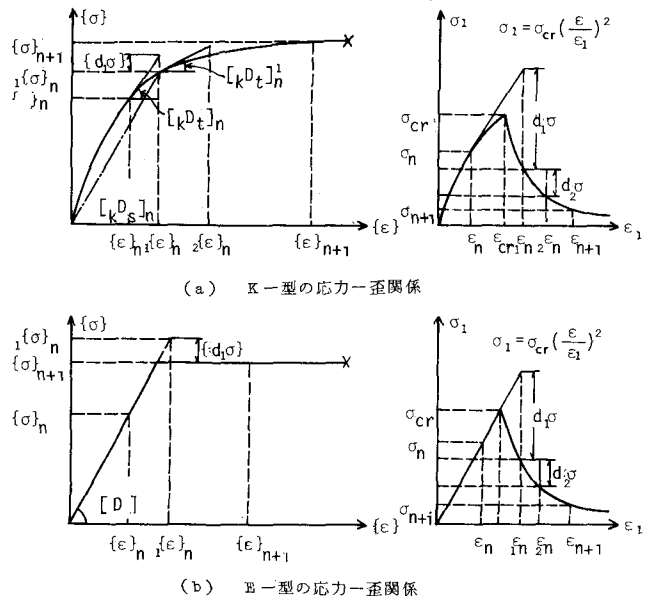


図1 解析に用いた2種の応力-歪関係

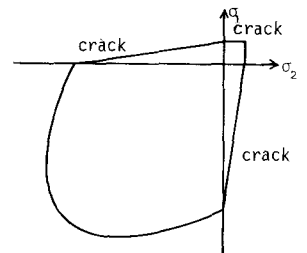


図2 コンクリートの破壊条件

条件⁵、及びこれと相似な K-型と同一圧縮条件を定義する。

(5) コンクリートの亀裂や鉄筋の降伏等による中立軸の (x 及び y 方向) 移動に対処するため、任意位置に基準面 (Reference Surface) を設定し、面内変位増分 ΔU , ΔV , 鉛直変位増分 ΔW , 及びモーメント増分 ΔM_x , ΔM_y , ΔM_{xy} を基本独立変数に選び、混合型変分原理による増分汎関数を用い、有限要素法による解析を行う。但し、変位は要素内線形、モーメント一定の三角形要素を使用する。

2 積層要素のための増分汎関数

基準面の面内歪増分 $\{\Delta \epsilon_0\}$ と曲率増分 $\{\Delta \phi\}$ を用いると、積層要素の膜力と曲げ応力の増分は、次式で表わされる。

$$\{\Delta N\} = \{\Delta N_x \ \Delta N_y \ \Delta N_{xy}\}^T = \{\Sigma \Delta t_i \cdot [D]_i\} \{\Delta \epsilon_0\} + \{\Sigma \Delta t_i \cdot Z_i \cdot [D]_i\} \{\Delta \phi\} \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$\{\Delta M\} = \{\Delta M_x \ \Delta M_y \ \Delta M_{xy}\}^T = \{\Sigma \Delta t_i \cdot Z_i \cdot [D]_i\} \{\Delta \epsilon_0\} + \{\Sigma \Delta t_i \cdot Z_i^2 \cdot [D]_i\} \{\Delta \phi\}$$

但し、 Δt_i : 層のコンクリートまたは鉄筋層の厚さ、 Z_i : 基準面から i 層の中心までの距離、 $[D]_i$: i 層の材料剛性マトリクスで、コンクリート層と鉄筋層では異なる。

(1) 式を膜力増分と曲率増分について解き、整理すると次式を得る。

$$\{\Delta N\} = [\alpha] \{\Delta \epsilon_0\} + [\beta] \{\Delta M\}, \quad \{\Delta \phi\} = -[\beta]^T \{\Delta \epsilon_0\} + [\lambda] \{\Delta M\} \quad \dots \dots \dots (2)$$

$$\text{但し、} [\lambda] = \{\Sigma \Delta t_i \cdot Z_i^2 [D]_i\}^{-1}, [\beta] = \{\Sigma \Delta t_i \cdot Z_i [D]_i\} [\lambda], [\alpha] = \{\Sigma \Delta t_i [D]_i\} - [\beta] \{\Sigma \Delta t_i \cdot Z_i [D]_i\}$$

(2) 式の関係を用いると、積層要素で表示された RC 床版のための増分汎関数は次式で表わすことが出来る。

$$\Delta \Pi = \int \left\{ \left[\frac{1}{2} \{\Delta \epsilon_0\}^T [\alpha] \{\Delta \epsilon_0\} + \{\Delta \epsilon_0\}^T [\beta] \{\Delta M\} + \frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} \frac{\partial \Delta W}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} \frac{\partial \Delta W}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} \frac{\partial \Delta W}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} \frac{\partial \Delta W}{\partial x} - \frac{1}{2} \{\Delta M\}^T [\lambda] \{\Delta M\} - \Delta q \cdot \Delta w \right] dx dy \right. \\ \left. - \oint \left[\Delta M_{ns} \frac{\partial \Delta W}{\partial s} ds - \int_{sp} [\Delta \bar{p}_x \cdot \Delta u + \Delta \bar{p}_y \cdot \Delta v + \Delta \bar{v}_n \cdot \Delta w] ds - \int_{su} \left[\Delta M_n \frac{\partial \Delta W}{\partial n} + \Delta M_{ns} \frac{\partial \Delta W}{\partial s} \right] ds \right. \right\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

3 有限要素法への適用

仮定(6)の形状関数を用いると、基準面の面内歪増分 $\{\Delta \epsilon_0\}$ は、次式で求められる。

$$\{\Delta \epsilon_0\} = \{\Delta \epsilon_{x0}, \Delta \epsilon_{y0}, \Delta \gamma_{xy0}\}^T = \left\{ \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial x} \right), \left(\frac{\partial \Delta V}{\partial y} \right), \left(\frac{\partial \Delta U}{\partial y} + \frac{\partial \Delta V}{\partial x} \right) \right\}^T = [L] \left\{ \begin{matrix} \Delta U_i \\ \Delta V_i \end{matrix} \right\} \quad \dots \dots \dots (4)$$

但し、 $\Delta U_i, \Delta V_i$: 三角形要素の x, y 方向の節点変位増分 (i=1,2,3)

又、要素境界上の接線方向の回転角増分 $(\partial \Delta W / \partial s)$ は、鉛直方向の節点変位増分 $\{\Delta W_i\}$ を用いると次式で表わされる。

$$\frac{\partial \Delta W}{\partial s} = \{S_i\}^T \{\Delta W_i\} \quad \dots \dots \dots (5)$$

次に、モーメント増分 $\{\Delta M\}$ を境界上の法線方向の曲げモーメント $\{\Delta M_{ni}\}$ で表示すると次のようになる。

$$\{\Delta M\} = \{\Delta M_x, \Delta M_y, \Delta M_{xy}\}^T = [F] \{\Delta M_{ni}\} \quad \dots \dots \dots (6)$$

境界边上の振りモーメント増分 $\{\Delta M_{nsi}\}$ は、次式で表示される。

$$\{\Delta M_{nsi}\} = [T] \{\Delta M\} = [T][F] \{\Delta M_{ni}\} \quad \dots \dots \dots (7)$$

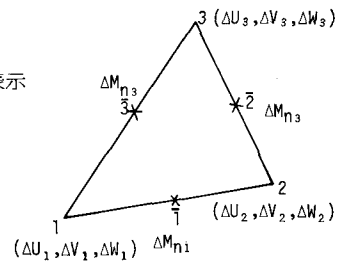


図3 三角形要素

(4)~(7) 式の関係を用いると、節点変位増分 ΔU_i , ΔV_i , ΔW_i 及び節点曲げモーメント増分 ΔM_{ni} によつて離散化された汎関数が得られる。

$$\Delta \Pi = \int \left\{ \left[\frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} \Delta U_i \\ \Delta V_i \end{matrix} \right\}^T [L]^T [\alpha] [L] \left\{ \begin{matrix} \Delta U_i \\ \Delta V_i \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} \Delta U_i \\ \Delta V_i \end{matrix} \right\}^T [L]^T [\beta] [F] \{\Delta M_{ni}\} - \frac{1}{2} \{\Delta M_{ni}\}^T [F]^T [\lambda] [F] \{\Delta M_{ni}\} \right] dx dy - \{\Delta q_i\}^T \{\Delta W_i\} \right. \\ \left. - \oint \{\Delta W_i\}^T \{S_i\} [T] [F] \{\Delta M_{ni}\} ds \right\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

4 非釣合応力の等価節点ベクトルへの変換

コンクリートの亀裂や鉄筋の降伏等により、要素内の各薄層に非釣合応力 $\{d\sigma_{ini}\}_i$ が存在しているものとする。今この状態で全要素の各節点に仮想の変化量 $\delta U_i, \delta V_i, \delta W_i, \delta M_{ni}$ を与えると、要素内にはこの変化量によつて仮想の歪が生ずる。この歪 $\{\delta\epsilon_o\}$ と曲率 $\{\delta\phi\}$ は、(2), (4)式の関係により次式で表わされる。

$$\{\delta\epsilon_o\} = \{\delta\epsilon_{xo}, \delta\epsilon_{yo}, \delta\gamma_{xyo}\}^T = [L] \begin{Bmatrix} \delta U_i \\ \delta V_i \end{Bmatrix} \quad \{\delta\phi\} = -[\beta]^T [L] \begin{Bmatrix} \delta U_i \\ \delta V_i \end{Bmatrix} + [\lambda][F]\{\delta M_{ni}\} \dots\dots\dots (9)$$

従つて、要素内の各薄層に存在している初期応力 $\{d\sigma_{ini}\}_i$ と、(9)式で表わされる歪によつて、全構造系に仮想の内部エネルギーが蓄えられ、等価節点ベクトル $\{d_e P\}$ は、これと等価な外部エネルギーを生ずるものとして定義される。この関係を(8)式の汎関数に基づき表現すると次式となる。

$$\Delta \Pi_{ini} = \int \left\{ \begin{Bmatrix} \delta U_i \\ \delta V_i \end{Bmatrix}^T [L] \{\Delta \epsilon_i \cdot \{d\sigma_{ini}\}_i\} + \begin{Bmatrix} \delta U_i \\ \delta V_i \end{Bmatrix}^T [L][\beta] \{\Delta \epsilon_i \cdot Z_i \cdot \{d\sigma_{ini}\}_i\} - \{\delta M_{ni}\}^T [F]^T [\lambda] \{\Delta \epsilon_i \cdot Z_i \cdot \{d\sigma_{ini}\}_i\} \right\} dx dy$$

$$- \int \left\{ \{\delta W_i\}^T [S_i] [T] \{\Delta \epsilon_i \cdot Z_i \cdot \{d\sigma_{ini}\}_i\} ds - \{\delta U_i\}^T \{d_e P_{U_i}\} - \{\delta V_i\}^T \{d_e P_{V_i}\} - \{\delta W_i\}^T \{d_e P_{W_i}\} - \{\delta M_{ni}\}^T \{d_e P_{M_i}\} \dots (10) \right.$$

5 実験値との比較

本解法の妥当性を評価するため、周辺条件及び載荷状態の異なる5種のRC床版について、既往の実験結果と解析値との比較検討を試みる。

(1) Jofriet と McNeice の正方形床版⁶ 中央集中荷重を受けるこの床版は、既往の理論的研究でも、しばしば引用される著名な実験例である。

図4に、実験値及びK-型とE-型の本解析値を示し、比較のため Hand¹ と Lin² の計算値を併記した。この例では、E-型の本解析値がよく実験曲線に追

随している。

(2) Taylor の正方形床版⁷

Taylor は、種々の配筋状態の周辺単純支持床版を作成し、変形特性と終局耐力について、実験的に詳細な検討を加えている。図5は、これらの床版のうちの一枚を2選び、解析を行つて実験値と比較した。

(3) 前田の矩形床版³ 前田等は

理論値と比較のため、中央部分々

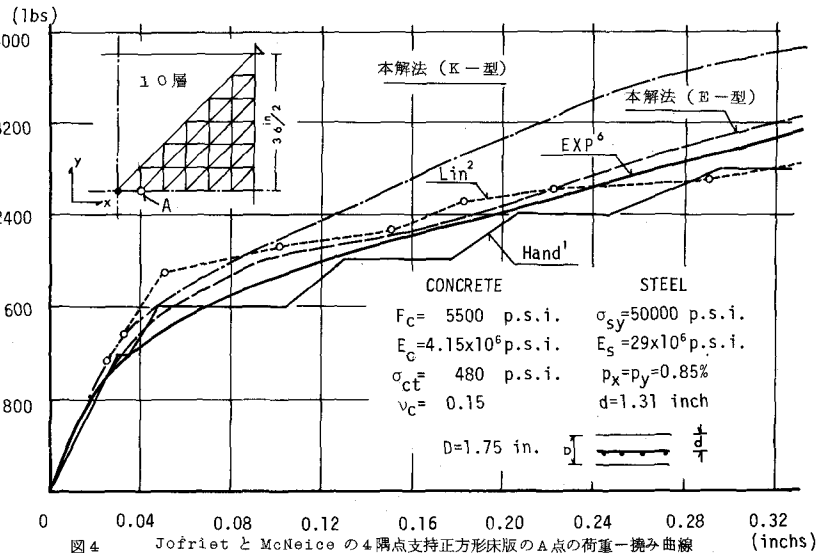


図4 Jofriet と McNeice の4隅点支持正方形床版のA点の荷重一撓み曲線

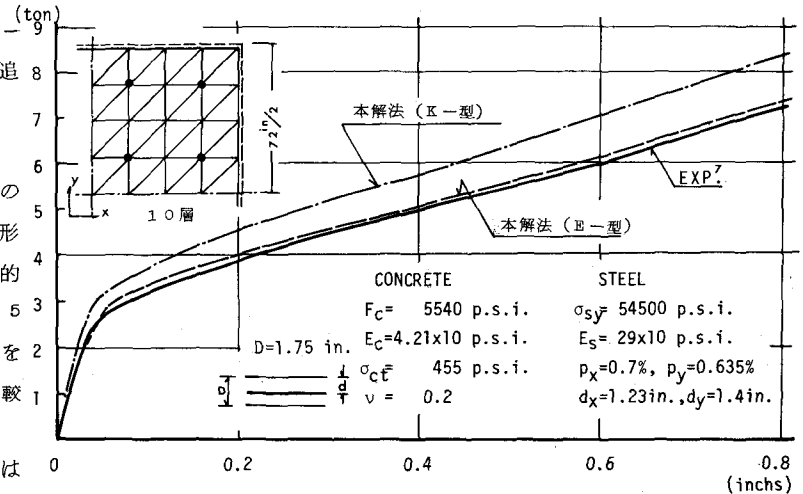


図5 Taylor 等の周辺単純支持正方形床版の中央点の荷重一撓み曲線

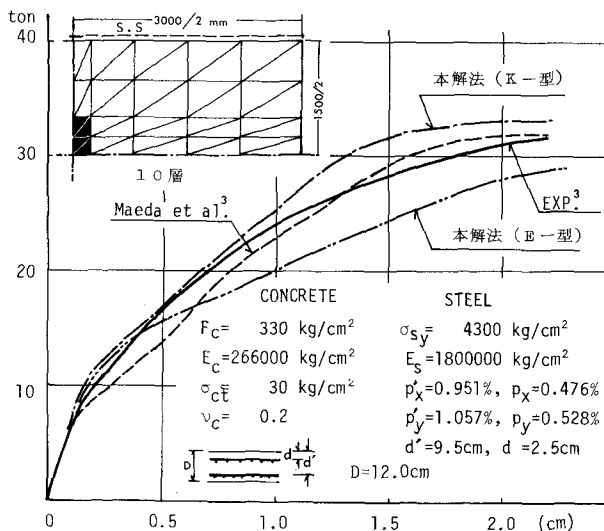


図6 前田等の床版の中央点の荷重一撓み曲線

布荷重の作用する相対する2辺単純支持、他2辺自由の矩形床版の載荷実験を行つている。図6に前田の実験と解析値、及び本解法による計算値を掲げた。この場合は、本解析に於けるK-型の解が全体的に実験曲線をよく表現している。

(4) 著者等の周辺補剛梁を有する正方形床版 9点集中荷重を受けるこの床版は、9区割に分けた柱付補剛フレームと一体打ちされたスラブのうち、中央に位置している最終破壊試験のもので、図7に、実験値と解析値を比較した。

(5) 著者等の片持床版 図8は、2点部分々布荷重を受ける片持床版の解析を行い、実験結果と比較したものである。

尚、本報告の計算は、北大大型計算センターのFACOM 230/75を用いて行つた。

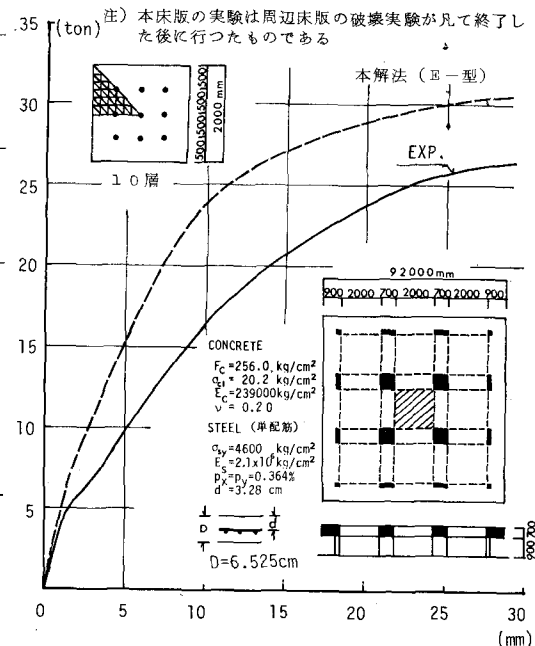


図7 補剛梁を有する正方形床版の中央点の荷重一撓み曲線

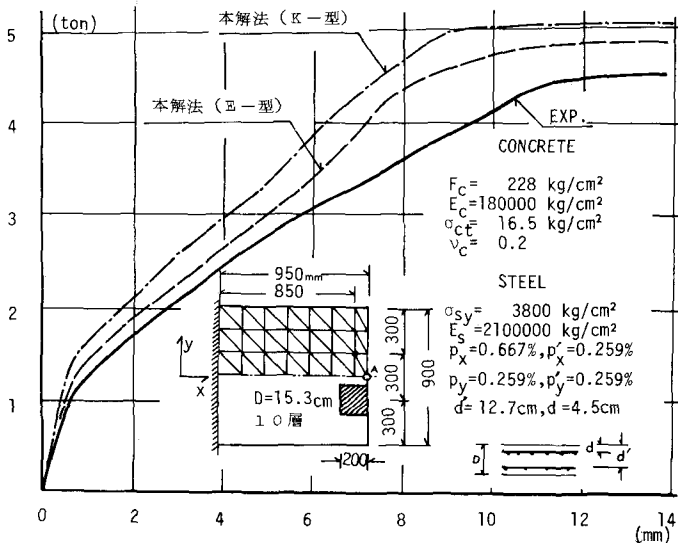


図8 片持床版のA点の荷重一撓み曲線

参考文献

- 1) F.R.Hand, D.A.Pecknold, W.C.Schnobrich [Nonlinear Analysis of RC Plates and Shells], ASCE, AT7, 1973
- 2) C.S.Lin, A.C.Scordelis [Nonlinear Analysis of RC Shells of General form], ASCE, ST3, 1975
- 3) Y.Maeda, S.Matsui, I.Kojima [Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Slabs by Finite Element Method], Technology Reports of the Osaka Univ., Vol.26-2, 1976
- 4) H.B.Kupfer, K.H.Gerstle [Behavior of Concrete under Biaxial Stresses], Journal of ACI, Aug., 1969
- 5) M.J.Mikkola, W.C.Schnobrich [Material Behavior Characteristics for Reinforced Concrete Shells Stressed beyond the Elastic Range], Civ. Engineering Studies, SRS, No.367, Univ. of Illinois, Aug. 1970
- 6) J.C.Jofriet, G.M.McNeice [Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Slabs], ASCE, Vol.97, No.ST3, 1973
- 7) R.Taylor, D.R.H.Mahyes [Effect of the Arrangement of Reinforcement on the Behavior of Reinforced Concrete Slabs], Magazine of Concrete Research, Vol.18, No.55, 1966
- 8) L.R.Herrmann [Finite Element Bending Analysis for Plate], ASCE, EM5, Oct.