

I - 6 剛性マトリックス法による塔のねじれ変形を考慮した吊橋のねじり解析

北海道大学工学部 正 員 渡 辺 昇

北海道大学工学部 正 員 ○ 佐 藤 浩 一

1. まえがき

吊橋の偏心荷重によるねじり解析の研究は種々なされているが、その場合塔頂における塔とケーブルとの結合状態は図-1(a)のようにローラ結合として塔のねじれ変形を考慮していない。考慮した解析例はないようである。本報告では塔とケーブルとの結合状態は図-1(b)のようにヒンジ(ピン)結合とし塔の曲げ剛性およびねじり剛性を考慮し、塔のねじれ変形が吊橋構造全体にどのような影響を及ぼすかを解析しようとするものである。第一にヒンジ結合の場合の微分方程式を誘導し、従来のローラ結合の場合との相互関係を明確にし、第二に剛性マトリックス化して数値計算により吊橋の影響線や M_w -最大図などを求め、変形、断面力にどの程度の差が生ずるかを検討するものである。

2. 微分方程式の誘導

図-1(a)のようなローラ結合の場合においては活荷重によるケーブルの水平張力は図-2(a)のように塔の右側ケーブルでは H_{p1} (非載荷側)、左側ケーブルでは H_{p2} (載荷側)とし、それぞれ全径間にわたって一定としている。吊橋の不静定次数は補剛けたを基本系にとつているので、径間数に関係なく、ケーブルに関して2次不静定構造物として解析している。

図-1(b)のようなヒンジ結合の場合の微分方程式は見あたらないようである。本報告では次のように考えて誘導した。活荷重によるケーブルの水平張力の不均衡から生ずる水平力を塔が負担し、塔は図-2(b)のように立体的に考えた場合、ねじれ変形し、そのために塔頂水平変位が生ずるものとする。即ち、右側塔頂に $(H_{pli} - H_{pli-1})$ の水平力が作用し、左側塔頂に $(H_{p2i} - H_{p2i-1})$ の水平力が作用するものと考え

る。従つて、活荷重によるケーブルの水平張力は塔の右側(添字1)のケーブルと左側(添字2)のケーブルとでは差があり、かつ、各径間ごとに異なり、不静定次数は補剛けたを基本系にとれば、径間数に関係あり、 n 径間吊橋ではケーブルに関して $2n$ 次不静定構造物として解析することになる。

図-3のような門型立体ラーメンの左側塔頂部に $P=1$ を作用させた時の y 方向の変位を $G_{22}(i)$ 、 $G_{21}(i)$ とおく。 $G_{22}(i)$ の添字の最初の2は載荷側であり、次の2は求める側であり、 (i) は第 i 塔を示している。

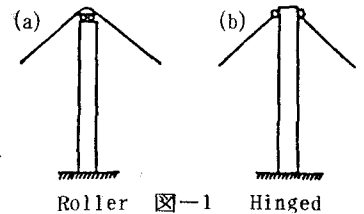
図-2(b)のような状態では左側塔頂部の y 方向変位は

$$(H_{p2i} - H_{p2i-1}) \times G_{22}(i) + (H_{pli} - H_{pli-1}) \times G_{12}(i) \quad (1)$$

同様にして、右側塔頂部の y 方向変位は

$$(H_{p2i} - H_{p2i-1}) \times G_{21}(i) + (H_{pli} - H_{pli-1}) \times G_{11}(i) \quad (2)$$

で求まる。次に、ケーブルの微小要素の水平線への投影と式(1)との和はあるいは式(2)との和はスパン長に等しいという条件を導入する。この条件は著者らが導入したものである。従来の条件は微小要素の水平線への投影はスパン長に等しいというものである(ローラ結合)。式(1)、(2)を用いると、 n 径間吊橋の場合の条件式は式(11・1)～(11・2n)の $2n$ 本となる。



Roller 図-1 Hinged

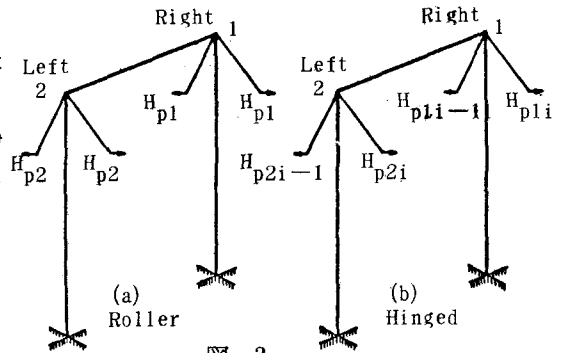


図-2

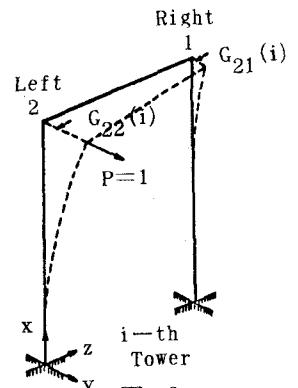


図-3

(イ)．ローラ結合の場合の微分方程式

微分方程式は文献(1)により、径間数に関係なく次の5本の式である。

$$EI \cdot \bar{V}(x) - (H_1 + H_2) \cdot \bar{V}''(x) + (H_1 - H_2) \cdot e \cdot \bar{\theta}''(x) = p_1(x) + (H_{p1} + H_{p2}) \cdot \bar{y}'' \quad (3)$$

$$EC_s \cdot \bar{\theta}(x) - GI_T \cdot \bar{\theta}''(x) - (H_1 + H_2) \cdot e^2 \cdot \bar{\theta}''(x) + (H_1 - H_2) \cdot e \cdot \bar{V}''(x) + EI_y \cdot y_M \cdot \bar{W}''(x) \\ = m_T(x) - p_1(x) \cdot e_2 - (H_{p1} - H_{p2}) \cdot e \cdot \bar{y}'' \quad (4)$$

$$EI_y \cdot y_M \cdot \bar{\theta}(x) + EI_y \cdot \bar{W}(x) = 0 \quad (5)$$

$$H_{p1} \frac{L_c}{E_c A_c} + \bar{y}'' \int_0^L V_1(x) dx = 0 \quad \text{ただし, } H_{p1} \text{ に対しては } V_1(x) \text{ であり,} \quad (6)$$

$$H_{p2} \text{ に対しては } V_2(x) \text{ である} \quad (7)$$

(ロ)．ヒンジ結合の場合の微分方程式 (著者らの誘導した式)

微分方程式は次の(2n+3)本の式になる。

$$EI \cdot \bar{V}(x) - (H_1 + H_2) \cdot \bar{V}''(x) + (H_1 - H_2) \cdot e \cdot \bar{\theta}''(x) = p_1(x) + \sum_{k=1}^n (H_{p1k} + H_{p2k}) \cdot \bar{y}''_k \quad (8)$$

$$EC_s \cdot \bar{\theta}(x) - GI_T \cdot \bar{\theta}''(x) - (H_1 + H_2) \cdot e^2 \cdot \bar{\theta}''(x) + (H_1 - H_2) \cdot e \cdot \bar{V}''(x) + EI_y \cdot y_M \cdot \bar{W}''(x) \\ = m_T(x) - p_1(x) \cdot e_2 - \sum_{k=1}^n (H_{p1k} - H_{p2k}) \cdot e \cdot \bar{y}''_k \quad (9)$$

$$EI_y \cdot y_M \cdot \bar{\theta}(x) + EI_y \cdot \bar{W}(x) = 0 \quad (10)$$

$$H_{pij} \frac{L_{cj}}{E_c A_c} + \bar{y}''_j \int_0^{l_j} V_i(x_j) dx_j \quad \text{ただし, } i=1 \sim 2, j=1 \sim n \quad (11 \cdot 1)$$

$$= (H_{p1j-1} - H_{p1j}) \times G_{1i}(j) + (H_{p2j-1} - H_{p2j}) \times G_{2i}(j) \\ + (H_{p1j+1} - H_{p1j}) \times G_{1i}(j+1) + (H_{p2j+1} - H_{p2j}) \times G_{2i}(j+1) \quad (11 \cdot 2n)$$

H_{pij} の添字の最初のiはi=1の場合は非載荷側であり、i=2の場合は載荷側であり、jは径間数である。

また、 $H_{pi0} = H_{pin+1} = 0$ 、 $G_{1i}(1) = G_{2i}(1) = G_{1i}(n+1) = G_{2i}(n+1) = 0$ である。

以上の諸式において特別の指示のない記号は文献(3)の記号を用いた。

3．ローラ結合とヒンジ結合との相互関係

式(8),(9),(10)は補剛げたに関するものであり、式(11・1)～(11・n)は右側ケーブルに関するものであり、式(11・(n+1))～(11・2n)は左側ケーブルに関するものである。式(11・1)～(11・2n)において、 $H_{p11} = H_{p12} = H_{p13} = \dots = H_{p1n} = H_{p1}$ とおき、また、 $H_{p21} = H_{p22} = H_{p23} = \dots = H_{p2n} = H_{p2}$ とおき、jについてSum Upすれば、 $L_c = L_{c1} + L_{c2} + L_{c3} + \dots + L_{cn}$ であるから

$$H_{p1} \frac{L_c}{E_c A_c} + \bar{y}'' \int_0^L V_1(x) dx = 0 \quad (12)$$

$$(13)$$

となり、式(6),(7)に一致する。即ち、ローラ結合はヒンジ結合の特別の場合として取扱える。

4． H_{pij} の求め方

$$\text{式(8),(9),(10)において} \quad V_1(x) = V(x) + e \cdot \bar{\theta}(x) \quad (14)$$

とし、 $V_B(x)$ 、 $\bar{\theta}(x)_B$ をGreen関数とすれば、

$$V_1(x) = V_B(x) + \sum_{k=1}^n (H_{p1k} + H_{p2k}) \cdot \bar{y}''_k \int_0^{l_k} V_B(\lambda_k) d\lambda_k \quad (15)$$

$$+ e \cdot \left[\bar{\theta}_B(x) + \sum_{k=1}^n (H_{p2k} - H_{p1k}) \cdot e \cdot \bar{y}''_k \int_0^{l_k} \bar{\theta}_B(\lambda_k) d\lambda_k \right] \quad (16)$$

で求まる。しかし、 H_{p1k} 、 H_{p2k} はまだ未知である。式(15),(16)を式(11・1)～(11・2n)に代入して整理すれば、式(17)のようになる。具体的には式(18),(19),(20),(21),(22)である。

ただし、式(17)～(22)において、 $i=1 \sim n$ 、 $j=1 \sim n$ 、 $k=1 \sim 2$ 、 $1=1 \sim 2$ である。

$$\begin{Bmatrix} D_{11}(ij) & D_{12}(ij) \\ \hline D_{21}(ij) & D_{22}(ij) \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{p1j} \\ H_{p2j} \end{Bmatrix} = -y_j'' \left\{ \begin{array}{c} \int_0^{1j} V_B(x_j) dx_j - e \int_0^{1j} \vartheta_B(x_j) dx_j \\ \hline \int_0^{1j} V_B(x_j) dx_j + e \int_0^{1j} \vartheta_B(x_j) dx_j \end{array} \right\} \quad (17)$$

ここで、
$$D_{k1}(ij) = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdots & \delta_{nn} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

ただし、 $i=1 \sim n$, $k=1 \sim 2$
 $j=1 \sim n$, $l=1 \sim 2$

$$\begin{aligned} \delta_{ii} = & y_i'' y_i'' \int_0^{1i} \int_0^{1i} V_B(x_i, \lambda_i) d\lambda_i dx_i \pm e^2 y_i'' y_i'' \int_0^{1i} \int_0^{1i} \vartheta_B(x_i, \lambda_i) d\lambda_i dx_i \\ & + G_{1k}(i) + G_{1k}(i+1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{L_{ci}}{E_c A_c} \pm \frac{1}{2} \cdot \frac{L_{ci}}{E_c A_c} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \delta_{ii+1} = & \delta_{i+1i} = y_i'' y_{i+1}'' \int_0^{1i} \int_0^{1i+1} V_B(x_i, \lambda_{i+1}) d\lambda_{i+1} dx_i \\ & \pm e^2 y_i'' y_{i+1}'' \int_0^{1i} \int_0^{1i+1} \vartheta_B(x_i, \lambda_{i+1}) d\lambda_{i+1} dx_i - G_{1k}(i+1) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji} = y_i'' y_j'' \int_0^{1i} \int_0^{1j} V_B(x_i, \lambda_j) d\lambda_j dx_i \pm e^2 y_i'' y_j'' \int_0^{1i} \int_0^{1j} \vartheta_B(x_i, \lambda_j) d\lambda_j dx_i \quad (21)$$

ただし、 $i \neq j$, $i \neq j-1$, $i \neq j+1$

$$\begin{array}{ll} \text{複合は} & k=1 : + \\ & k \neq 1 : - \end{array} \quad (22)$$

式(17)において、
$$a_{k1} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{k1}(ij) \quad (23)$$

$$b_2 = - \sum_{j=1}^n y_j'' \left\{ \int_0^{1j} V_B(x_j) dx_j \mp e \int_0^{1j} \vartheta_B(x_j) dx_j \right\} \quad (24)$$

とおけば

$$\begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \hline a_{21} & a_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{p1} \\ H_{p2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

となり、文献(3)の式(6)と一致する。式(25)の a_{ij} には塔の影響が入っていないことに注意。

5. 剛性マトリックス

ローラ結合の場合の剛性マトリックスは文献(2)に示してあり、荷重項を含んだ形で要素数を少なくして解析する場合の剛性マトリックスは文献(3)に示してあるので、ここでは省略する。

式(8),(9),(10)において、 H_{pij} を既知として Laplace変換し、逆変換して整理すれば、ローラ結合の場合と同様の形で剛性マトリックスは求まる。本解析での剛性マトリックスは荷重項を含んだ形で求まるので、要素の中間に荷重が作用しても厳密に求まる。また、 H_{pij} を求める場合にもシンプソン公式を用いずに積分値を厳密に求めることができるし、要素数を少なくして解析することができる。

6. 数値計算例

図-4のような三径間単純吊橋と三径間連続吊橋を例にとる。また、塔とケーブルとの結合状態はローラ結合とヒンジ結合とする。従つて、構造上の差異として次の四通りを考える。

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (1) 三径間単純ローラ吊橋 S.R. | (3) 三径間連続ローラ吊橋 C.R. |
| (2) 三径間単純ヒンジ吊橋 S.H. | (4) 三径間連続ヒンジ吊橋 C.H. |

断面諸元

$$f_1 = 3.125\text{m}, f_2 = 50\text{m},$$

$$R_1 = R_2 = 625\text{m}, L_c = 900\text{m},$$

$$H_g = 9375\text{t} (\text{片側ケーブルにつき})$$

$$I = 3.0\text{m}^4 (\text{全断面につき})$$

$$I_y = 150\text{m}^4 (\text{全断面につき})$$

$$I_T = 4.5 \times 10^{-4}\text{m}^4 (\text{全断面につき}), C_s = 525\text{m}^6, y_M = -1.5\text{m}, e = 10.5\text{m}, e_2 = -5.0\text{m}, C_M = 187.5\text{m}^6,$$

$$g = 15\text{t/m} (\text{片側ケーブルにつき}), p_1 = 10\text{t} (\text{全断面につき}), P_1 = 70\text{t} (\text{全断面につき}),$$

$$I_h = 0.51, EI_t = \text{任意} (\text{塔の曲げ剛性}), J_t = 2I_t (\text{塔のねじり抵抗}), E_c = 1.6 \times 10^7\text{t/m}^2,$$

$$A_c = 0.28\text{m}^2$$

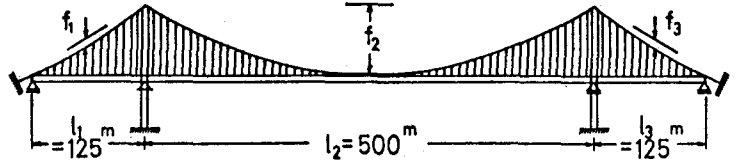


図-4 吊橋の一般図

影響線を求める場合に曲げ解析(剛性マトリックス 4行×4列)の場合の影響線と比較するために $P=2$ とした。本解析では両側ケーブルについてねじり解析をしているのに対して、曲げ解析では片側ケーブルについて解析しているためである。 p, I_h を 2倍 してねじり解析をすれば、変形量は曲げ解析の場合と同じであるが、断面力は両側ケーブルについて求まる。この事実は剛性マトリックスを比較すれば明確であるが、ここでは式の比較は省略する。

H_{pij} を求める場合に Lagrange の補間公式を用い、精度 $\epsilon = 10^{-4}$ とした。

(イ) $H_{pij}, \theta(x), M_w(x)$ の影響線 $I_t = 1000I_h$ の場合

図-5 は連続ローラと連続

ヒンジの H_p の影響線である。

ローラ結合の場合は H_{p1} と H_{p2}

の二つしかないが、ヒンジ結合

の場合は $H_{pij} (i=1\sim 2, j=$

$1\sim 3)$ の六つあることに注意さ

れたい。これは単純の場合も

同様である。図-6 は単純ロ

ーラと単純ヒンジの H_p の影

響線である。図より判明する

ことは連続および単純におい

てローラ結合とヒンジ結合と

では H_p に大きな差異が生じ

ているのがわかる。その中で

H_{p1} と H_{p12}, H_{p2} と H_{p22} はほ

とんど差がないのがわかる。

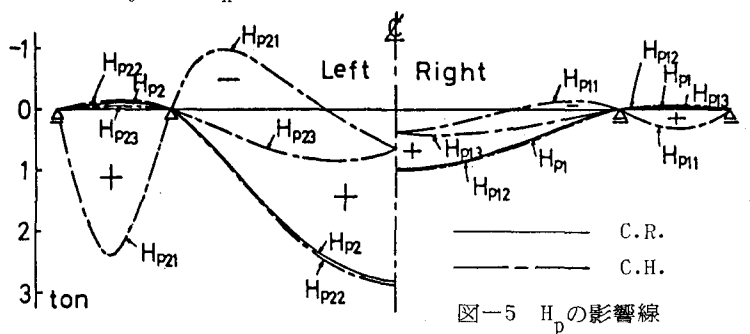


図-5 H_p の影響線

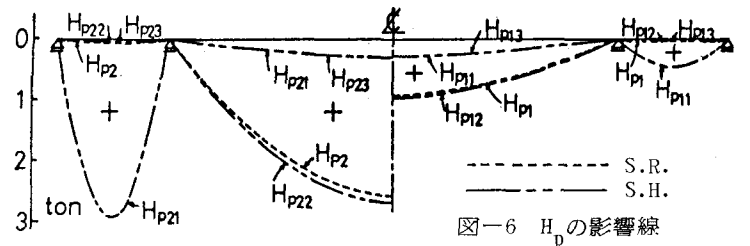


図-6 H_p の影響線

即ち、ローラ結合の場合の H_{p1}, H_{p2} の影響線はヒンジ結合の場合の H_{p12}, H_{p22} の影響線にほぼ等しい。また、ローラ結合およびヒンジ結合において単純吊橋の場合には H_p は決して負はでないが、連続吊橋の場合には H_p が負になることもある。

以上のように、構造上の差による H_p の差異が吊橋全体に影響を及ぼすのである。

図-7 はねじり角 $\theta(0.4 l_1), \theta(0.5 l_2)$ の影響線である。図よりわかるように、構造上の差によりねじり角 $\theta(x)$ にかかなりの差異が生じている。図には示していないがこの影響線は たわみ $V(x)$ の影響線に類似ある。

図-8 は曲げねじりモーメント M_w (中間支点上), $M_w(0.05 l_2)$ の影響線である。図よりわかるように構造上の差により曲げねじりモーメント $M_w(x)$ にかかなりの差異が生じている。図には示していないが、この影響線は 曲げモーメント $M(x)$ の影響線に類似である。図-7, 8 において、点線は S.R., 実線は C.R., 一点鎖線は C.H., 二点鎖線は S.H. である。

影響線は側径間10分割,中央径間40分割して求めた。従つて他の点の影響線も得られているが,ここでは省略する。

(ロ) 塔の曲げ剛性およびねじり剛性が吊橋構造全体に及ぼす影響度

図-9 は中央径間全部に分布荷重 p_1 を載荷した場合の塔の曲げおよびねじり剛性を变化させた時の H_{pij} の变化を示したものである。図よりわかるように,単純ローラと連続ローラの場合は塔のねじれ変形を考慮していないので一直線である。単純ヒンジと連続ヒンジとは I_t/I_h の変化によつて H_{p11} , H_{p13} , H_{p21} , H_{p23} がかなり大きく変化するが, H_{p12} , H_{p22} はそれほど変化しないのがわかる。 $I_t/I_h = 170$ 前後で H_{p11} , H_{p13} が H_{p12}

より値が小さくなつてゐるがこれは注目に値する。左側塔頂部に作用する水平力は図より $(H_{p22} - H_{p21})$ であり常に正である。右側塔頂部に作用する水平力は $(H_{p12} - H_{p11})$ であり 170 前後で零となり,それ以下では負となり,それ以上では正となる。これは図-9 のように塔頂の変位する方向が三種類考えられることである。

図-10 は図-9 と同じ載荷状態の場合のねじり角とたわみの減少率を示したものである。 $9(0.5 I_2)_{c.r.} = 1.0$, $V(0.5 I_2)_{c.r.} = 1.0$ とした時の他の構造上の差が I_t/I_h の変化とともにどのように減少していくかを示したものである。図よりわかることは I_t/I_h が比

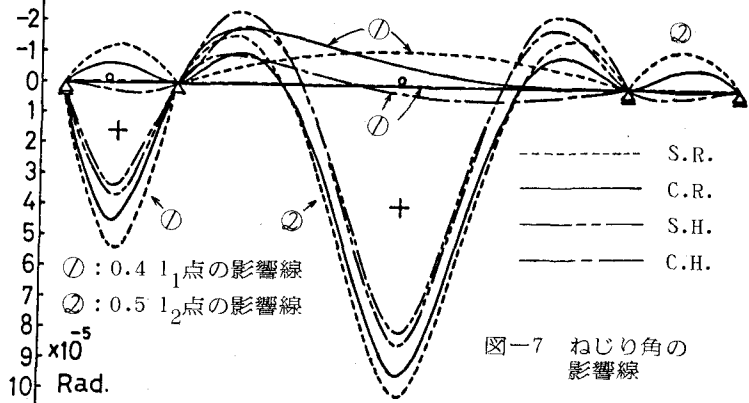


図-7 ねじり角の影響線

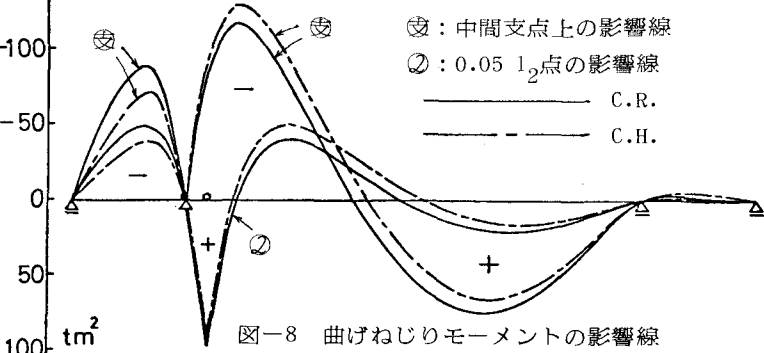


図-8 曲げねじりモーメントの影響線

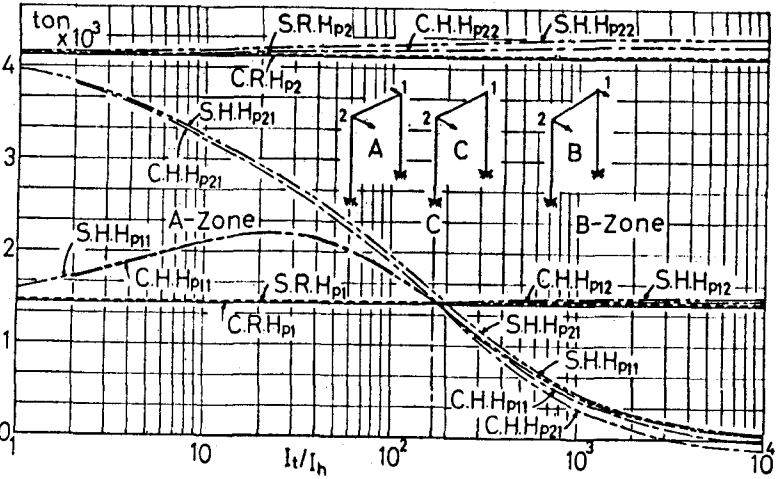


図-9 H_{pij} と I_t/I_h との関係

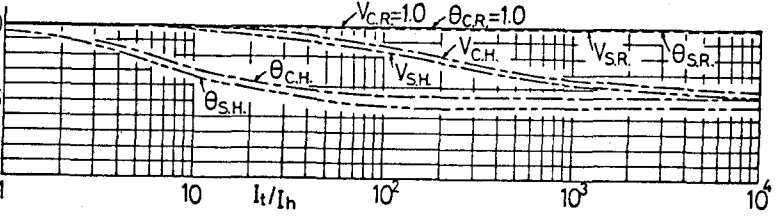


図-10 I_t/I_h による たわみ と ねじり角の減少率

較的小さい場合にねじり角は急速に減少し、たわみはあまり減少しない。逆に、 I_t/I_h が比較的大きい場合にはねじり角はもうほとんど減少しないで、たわみが減少していく。図には示していないが、 M_w は θ と同じ傾向であり、 M は V と同じ傾向を示す。

(ハ) 最大曲げねじりモーメント図 ($M_w - \max.$)

図-5, 6, 7, 8に示した影響線は制限つき影響線であり、最大図を求めるにはそのままでは利用できない。ここでは図-11のように制限つき影響線を求めこれを第一次近似とし、その載荷幅を基準として前後数種類の載荷幅で計算して大きいものを最大値とした。図-12は最大曲げねじりモーメント図である。従つて

図中に示した任意の載荷幅 E1, E2 の場合最大値より大きくなることはない。図からわかるように、中間支点附近と側径間でかなりの差が生じている。また、中間支点の負の値はローラ結合と比較してヒンジ結合の場合は大きくなり、正の値は逆に小さくなる。図に示していないが、この図は最大曲げモーメント図と類似の形状になり、最大ねじり角図は最大たわみ図と類似の形状になることを付記しておく。なお、荷重は L 荷重を載荷した。

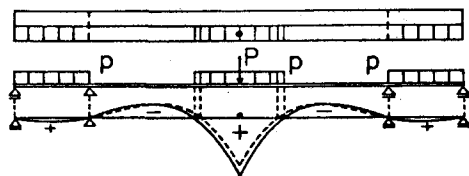


図-11 影響線と最大値との関係

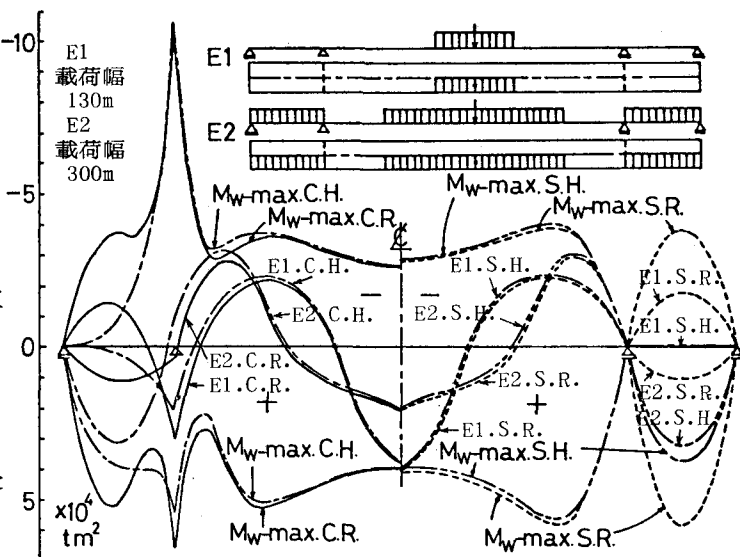


図-12 最大曲げねじりモーメント図 ($M_w - \max.$)

7. あとがき

本報告で次のような結論が得られた。

図-1(b)のようなヒンジ結合の場合の微分方程式を誘導し、従来のローラ結合の場合との相互関係を式の上で明確にできた。解析法は剛性マトリックス法により荷重項を考慮しているので三要素で解析できた。 H_{pij} はシンプソン公式を用いずに厳密に求めた。数値計算でローラ結合とヒンジ結合との差異を示すことができた。それによれば、ローラ結合の H_{p1} , H_{p2} と本報告の H_{pij} ($i=1\sim 2, j=1\sim 3$) を比較すれば、 $H_{p1} \div H_{p12}$, $H_{p2} \div H_{p22}$ であることが判明した。ねじりに関する諸量は I_t/I_h が小さいうちに急速に減少し、曲げに関する諸量は I_t/I_h が大きくならなければ減少しないことが判明した。式(17)よりわかるように H_{pij} は $V(x)$ と $\theta(x)$ とに関連している。 H_{pij} が I_t/I_h によつて図-9のように変化するの I_t/I_h が小さい時は $\theta(x)$ が減少するためであり、 I_t/I_h が大きい時は $V(x)$ が減少するために変化するものと思われる。塔頂水平変位も求めることができた。曲げねじりモーメント M_w の最大図を求め、曲げモーメント M の最大図と類似になることを示し、最大ねじり角図は最大たわみ図と類似の形状になることも示した。最後に、本計算は 北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を利用した。

参考文献

- 1) Hawranek, A., u. Steinhardt, O.: Theorie und Berechnung der Stahlbrücken. Springer 1958.
- 2) 渡辺 昇, 佐藤浩一, 戸田 久: 多径間吊橋のねじりを考慮した剛性マトリックス解析法について。土木学会北海道支部論文報告集 第 34 号, 1978.
- 3) 佐藤浩一, 渡辺 昇, 大島 久: 剛性マトリックス法による吊橋のねじり解析。土木学会第 33 回年次学術講演会講演概要集 第 1 部, 1978.