

I - 5 長径間ゲルバートラス橋の三次元応力解析

室蘭工業大学工学部 正員 O中村作太郎
 室蘭工業大学工学部 正員 松岡 健一
 室蘭工業大学工学部 田中 功

1. 緒 言

トラス構造は1518年 Palladio 氏により考案されて以来、土木・建築構造物に盛んに用いられるようになった。トラスが橋梁に用いられたのは1787年に架けられた木造トラスが最初であり、その後鋳鉄・鍛鉄・鋼鉄の進歩発達により、鋼鉄トラス橋が登場するようになり、最近では高張力鋼を用いた長大径間のトラス橋が世界各地に架設されるに至った。

従来トラス橋の応力解析に際しては、トラスの形状・外力の作用状態を考慮し、平面トラスの組合せとして取扱うことが実用上許されて来たが、最近のように各種の長径間トラス橋が登場するようになり、平面トラスの組合せとしては解析不可能な力学的特性を立体トラスとして解析することが行われるようになりつつある。以前は手計算のため立体トラスの解析が非常に困難であったけれども、最近では電子計算機の発達でそれを容易にしたものといえる。また従来短径間のトラス橋では実用上あまり重要視されなかつた二次応力の問題が、トラスの長大立体化にともない大きく取り上げられるようになって来た。

著者等は数年来トラス橋の二次応力と立体解析について種々研究を重ねて来たが、今回は室蘭港に架設計画中の「白鳥大橋」をモデルとし、中央支間 450 m の長径間ゲルバートラス橋について、立体トラスとしての三次元応力解析を試みたものである。「直接剛性法」の解析方法により、北海道大学大型計算機センターの電子計算機 FACOM 230-75 を利用して数値解析を行ない、たわみと各部材応力について、立体と平面の比較検討を行なった。特に平面ピン節トラス・立体ピン節トラス・平面剛節トラス・立体剛節トラスとしての各部材応力の比較検討のほか、一次応力(σ_1)と二次応力(σ_2)の比率がどのような傾向を示すかについて比較吟味・考察を行なった。

2. 構造応力解式

トラスの静的解析法の一つである「直接剛性法」により解析したので、これに関する応力解式について述べる。

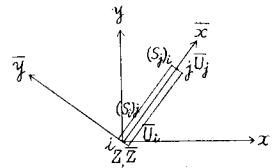
(1) 立体トラス

図-1を参照し、次の記号を用いる。

$\bar{S}_{ij}$: 局所座標系の部材要素 $i-j$ の部材力, $(\bar{S}_i)_j$: 局所座標系の節点 i の断面力, $(S_j)_i$: 局所座標系の節点 j の断面力, $\bar{U}_{ij}$: 局所座標系の変位量, U_i : 局所座標系の節点 i の変位量, U_j : 局所座標系の節点 j の変位量, 図-1 基準, 局所座標系 K_{ij} : 局所座標系の部材要素 $i-j$ の剛性マトリックス, T_{ij} : 座標変換マトリックス, S_{ij} : 基準座標系の部材要素 $i-j$ の部材力, $(S_i)_j$: 基準座標系の節点 i の部材力, $(S_j)_i$: 基準座標系の節点 j の部材力, U_i : 基準座標系の節点 i の変位量, U_j : 基準座標系の節点 j の変位量, K_{ij} : 基準座標系の部材要素 $i-j$ の剛性マトリックス, P : 構造物全体の外力ベクトル, K : 構造物全体の剛性マトリックス, U : 構造物全体の変位マトリックス。

図-1に示す通り、部材要素方向 $i-j$ の軸方向 $\bar{x}$ とこれに直角な2方向 $\bar{y}$, $\bar{z}$ とする局所座標系 $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ を考え、この局所座標系の部材力 $\bar{S}_{ij}$ を次のように定義する。

$$\bar{S}_{ij} = \begin{Bmatrix} (\bar{S}_i)_j \\ (\bar{S}_j)_i \end{Bmatrix} \quad (1)$$



同様に変位量 $\bar{U}_{ij}$ は, $\bar{U}_{ij} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \end{Bmatrix}$ (2), $\bar{S}_{ij} = \bar{K}_{ij} \bar{U}_{ij}$ (3), $\bar{K}_{ij} = \begin{Bmatrix} \bar{K}_{ii} & \bar{K}_{ij} \\ \bar{K}_{ji} & \bar{K}_{jj} \end{Bmatrix}$ (4)

と表示され, K_{ij} は部材要素 $i-j$ の局所座標系に関する剛性マトリックスと呼ばれるものである。

またこの $\bar{S}_{ij}$, $\bar{U}_{ij}$ は次の通り示される。

$$\bar{S}_{ij} = \begin{Bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ P_{iz} \\ M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ P_{jz} \\ M_{jx} \\ M_{jy} \\ M_{jz} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} i \text{ 端における材端力の成分} \\ i \text{ 端における材端モーメントの成分} \\ j \text{ 端における材端力の成分} \\ j \text{ 端における材端モーメントの成分} \end{array} \quad \bar{U}_{ij} = \begin{Bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \delta_{iz} \\ \theta_{ix} \\ \theta_{iy} \\ \theta_{iz} \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \delta_{jz} \\ \theta_{jx} \\ \theta_{jy} \\ \theta_{jz} \end{Bmatrix} \quad \begin{array}{l} i \text{ 端における変位成分} \\ i \text{ 端における回転角成分} \\ j \text{ 端における変位成分} \\ j \text{ 端における回転角成分} \end{array}$$

次に基準座標系 (x, y, z) を考え, 局所座標系となす角度の方向余弦を用いて $\bar{S}_{ij}$, $\bar{U}_{ij}$ を基準座標系の部材力 S_{ij} , 変位 U_{ij} に変換すると, $\bar{S}_{ij} = T_{ij} S_{ij}$, $\bar{U}_{ij} = T_{ij} U_{ij}$ (5)

ここに T_{ij} : 座標変換マトリックス

(5) 式を (3) 式に代入し, $T_{ij} S_{ij} = \bar{K}_{ij} T_{ij} U_{ij}$, $S_{ij} = T_{ij}^{-1} \bar{K}_{ij} T_{ij} U_{ij}$ (6)

$T_{ij}^{-1} = T_{ij}^T$ とし, $S_{ij} = T_{ij}^T \bar{K}_{ij} T_{ij} U_{ij}$ と表示出来る。いま $K_{ij} = T_{ij}^T \bar{K}_{ij} T_{ij}$ (7) とおき,

$$S_{ij} = K_{ij} U_{ij}, \quad \begin{Bmatrix} (S_{ij})_j \\ (S_{ij})_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{ii} & K_{ij} \\ K_{ji} & K_{jj} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad (8)$$

ここに K_{ij} : 部材要素 $i-j$ の基準座標系に関する剛性マトリックス

次に図-2 に示す通り, 節点 i に集合する部材要素を $i-j$, $i-k$, $i-l$,

$i-m$ とするとき, 節点 i における部材力 $(S_{ij})_j$, $(S_{ik})_k$, $(S_{il})_l$, $(S_{im})_m$

は (8) 式より, $(S_{ij})_j = (K_{ii})_j U_i + K_{ij} U_j$, $(S_{ik})_k = (K_{ii})_k U_i$

+ $K_{ik} U_k$, $(S_{il})_l = (K_{ii})_l U_i + K_{il} U_l$, $(S_{im})_m = (K_{ii})_m U_i + K_{im} U_m$ (9)

節点 i においてつり合いの式を立てると,

$$P_i = (S_{ij})_j + (S_{ik})_k + (S_{il})_l + (S_{im})_m \quad (10)$$

(10) 式に (9) 式を代入すると,

$$P_i = (\sum K_{ii}) U_i + K_{ij} U_j + K_{ik} U_k + K_{il} U_l + K_{im} U_m \quad (11)$$

(11) 式は構造物の全節立において成立し, $P = K U$, K : 構造物全体に関する剛性マトリックス (12)

また (12) 式は次の通り表示出来, 構造物全体の各節点変位 U が求まる。 $U = K^{-1} P$ (13)

次に部材要素 $i-j$ の節点変位 U_{ij} を (8), (5) 式に代入すると, $S_{ij} = T_{ij} K_{ij} U_{ij}$ (14) となり, 部材要素 $i-j$ の部材力 $\bar{S}_{ij}$ が求まる。

(a) 立体ピン節トラス

図-3 を参照し, $\theta_{x\bar{x}}$, $\theta_{y\bar{x}}$, $\theta_{z\bar{x}}$ をそれぞれ $\bar{x}$ 軸と x 軸, y 軸, z 軸とのなす角とすれば, $\gamma_x = \cos \theta_{x\bar{x}}$, $\gamma_y = \cos \theta_{y\bar{x}}$, $\gamma_z = \cos \theta_{z\bar{x}}$ とし, 次式を得る。

$$K_{ij} = \frac{EA_{ij}}{L_{ij}} \begin{bmatrix} \gamma_x^2 & \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_z & \gamma_x^2 & \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_z \\ \gamma_y^2 & \gamma_x \gamma_y & \gamma_y \gamma_z & \gamma_x \gamma_y & \gamma_y^2 & \gamma_y \gamma_z \\ \gamma_z^2 & \gamma_x \gamma_z & \gamma_y \gamma_z & \gamma_x \gamma_z & \gamma_y \gamma_z & \gamma_z^2 \\ \gamma_x^2 & \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_z & \gamma_x^2 & \gamma_x \gamma_y & \gamma_x \gamma_z \\ \gamma_y^2 & \gamma_x \gamma_y & \gamma_y \gamma_z & \gamma_x \gamma_y & \gamma_y^2 & \gamma_y \gamma_z \\ \gamma_z^2 & \gamma_x \gamma_z & \gamma_y \gamma_z & \gamma_x \gamma_z & \gamma_y \gamma_z & \gamma_z^2 \end{bmatrix} \quad \text{SYM} \quad (15)$$

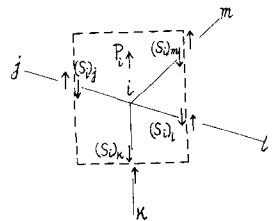


図-2 節点 i に集まる部材力

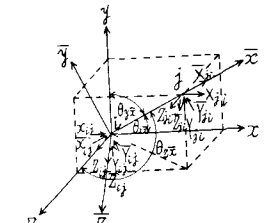


図-3 立体ピン節トラスの構造力解析用図

(b) 立体剛節トラス

図-4 を参照し, $\theta_{x\bar{x}}$, $\theta_{y\bar{x}}$, $\theta_{z\bar{x}}$: x, y, z 軸と $\bar{x}$ 軸とのなす角度, $\theta_{x\bar{y}}$, $\theta_{y\bar{y}}$, $\theta_{z\bar{y}}$: x, y, z 軸と $\bar{y}$ 軸とのなす角度, $\theta_{x\bar{z}}$, $\theta_{y\bar{z}}$, $\theta_{z\bar{z}}$: x, y, z 軸と $\bar{z}$ 軸とのなす角度とし, $\gamma_{x\bar{x}} = \cos \theta_{x\bar{x}}$, $\gamma_{y\bar{x}} = \cos \theta_{y\bar{x}}$

, $\gamma_{2\bar{x}} = \cos \theta_{2\bar{x}}$, $\gamma_{x\bar{y}} = \cos \theta_{x\bar{y}}$, $\gamma_{y\bar{y}} = \cos \theta_{y\bar{y}}$, $\gamma_{2\bar{y}} = \cos \theta_{2\bar{y}}$, $\gamma_{x\bar{z}} = \cos \theta_{x\bar{z}}$, $\gamma_{y\bar{z}} = \cos \theta_{y\bar{z}}$, $\gamma_{2\bar{z}} = \cos \theta_{2\bar{z}}$ とおく。

座標変換マトリックス T_{ij} は, $T_{ij} = \begin{bmatrix} t_{ij} & t_{ij} & t_{ij} \\ 0 & t_{ij} & t_{ij} \\ 0 & t_{ij} & t_{ij} \end{bmatrix}$, $t_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_{x\bar{x}} & \gamma_{y\bar{x}} & \gamma_{z\bar{x}} \\ \gamma_{x\bar{y}} & \gamma_{y\bar{y}} & \gamma_{z\bar{y}} \\ \gamma_{x\bar{z}} & \gamma_{y\bar{z}} & \gamma_{z\bar{z}} \end{bmatrix}$ と表わされ

, t_{ij} の算定は図-4にて, i , j 節点の座標を $i(0, 0, 0)$, $j(X, Y, Z)$ とすると, l : 部材長, l' : 部材の x - y 平面への投影長とすることにより,

$$t_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{X}{l} & \frac{Y}{l} & \frac{Z}{l} \\ \frac{X}{l'} & \frac{Y}{l'} & 0 \\ \frac{X}{l'} & \frac{Y}{l'} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{となる。}$$

(参考)

部材要素 $i-j$ が Y 軸と平行の場合には, $t_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ が得られる。

基準座標系に対する要素の剛性マトリックス

は $K_{ij} = T_{ij}^T K_{ij} T_{ij}$ により算定され, 局部座標系に対する要素の剛性マトリックスは, 次の通り示される。

$$\bar{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{\bar{z}}}{l_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_{\bar{z}}}{l_{ij}^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_{\bar{z}}}{l_{ij}^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_{\bar{z}}}{l_{ij}^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{l_{ij}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_{\bar{z}}}{l_{ij}^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{l_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \end{bmatrix}$$

SYM

図-4 立体剛節トラスの構造応力解析用の図

(注)

部材要素 $i-j$ において,

l_{ij} : 部材長

A_{ij} : 断面積

GJ : ねじり剛性

$EI_{\bar{y}}$: $\bar{x}\bar{z}$ 面内の曲げ剛性

$EI_{\bar{z}}$: $\bar{x}\bar{y}$ 面内の曲げ剛性

(2) 平面トラス

平面トラスの構造応力解析は, 立体トラスと同じプログラムを用い, 平面トラスの剛性マトリックス (ピン節, 剛節) を付加することにより行なつた。拘束条件, 配列順序の相違などがあるが, ここでは剛性マトリックスについてのみ示す。

(a) 平面ピン節トラス

剛性マトリックス $\bar{K}_{ij}$ は, 次の通りである。 $\bar{K}_{ij} = \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{SYM} & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(注)

二次元の(3)式に相当する

式の内容を示せば,

$$\bar{S}_{ij} = \bar{K}_{ij} \bar{U}_{ij}$$

(b) 平面剛節トラス

剛性マトリックス $\bar{K}_{ij}$ を示せば,

$$\bar{K}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & \frac{12EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^3} & \frac{6EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^2} & -\frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & -\frac{12EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^3} & -\frac{6EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^2} \\ 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 & 0 & 0 \\ \text{SYM} & 0 & 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & \frac{12EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^3} & \frac{6EI_{\bar{y}}}{l_{ij}^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA_{ij}}{l_{ij}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{S}_{ij} = \begin{bmatrix} P_{ix} \\ P_{iy} \\ M_{ix} \\ P_{jx} \\ P_{jy} \\ M_{jx} \end{bmatrix}, \quad \bar{U}_{ij} = \begin{bmatrix} \delta_{ix} \\ \delta_{iy} \\ \theta_{ix} \\ \delta_{jx} \\ \delta_{jy} \\ \theta_{jx} \end{bmatrix}$$

3. 解析モデル

解析対象としたモデルは, 室蘭港架橋計画の「白鳥大橋」の設計試案に基づいたもので, 図-5, 図-6および表-1を参照していただきたい。

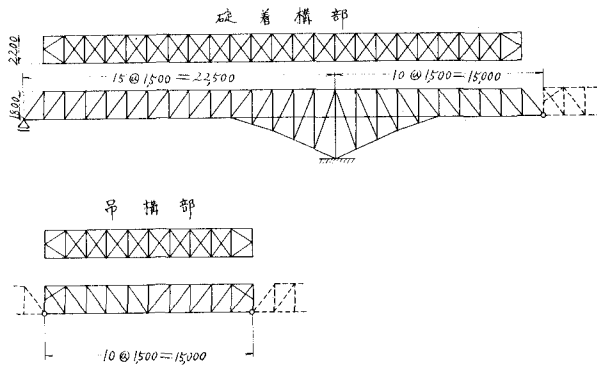


図-5 長径間ゲルバートラス橋(モデル:白鳥大橋)の一般骨組寸法図

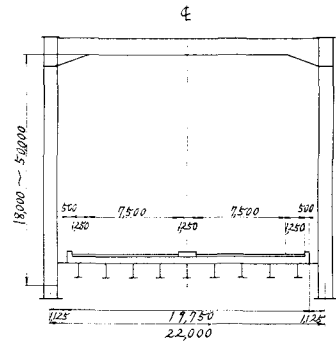


図-6 長径間ゲルバートラス橋(モデル:白鳥大橋)の一般正面図

表-1 設計の示方および基本事項概要

種別	摘要	種別	摘要	種別	摘要
道路の等級	2 種 1 級	舗装	65 mm Asphalt 2.3 t/m ²	桁下空間	平均満潮時位より 60.0 m
活荷重	床組: T-20, 主橋: 本四式	床版	180 mm 鉄筋コンクリート 2.5 t/m ²	主航路中	300.0 m
幅員構成	図-6 参照	構造形式	3径間 Gerber Truss Bridge	使用鋼材	SM50Y, SM58
横断勾配	2 % 放物線	支間割	2250 + 4500 + 2250 = 9000		
縦断勾配	1 % 放物線	雪荷重	100 kg/m ²		

4. 数値解析

(1) 部材番号と節点番号

平面トラスおよび立体トラスの部材番号と節点番号を次に示す。

(a) 平面トラス
モデルに用いたゲルバートラス橋の平面トラスとしての部材番号と節点番号を示せば、図-7の通りである。

(b) 立体トラス
モデルに用いたゲルバートラス橋の立体トラスとしての部材番号と節点番号を示せば、図-8の通りである。

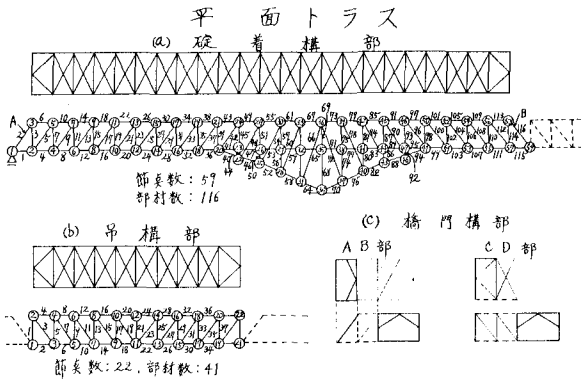
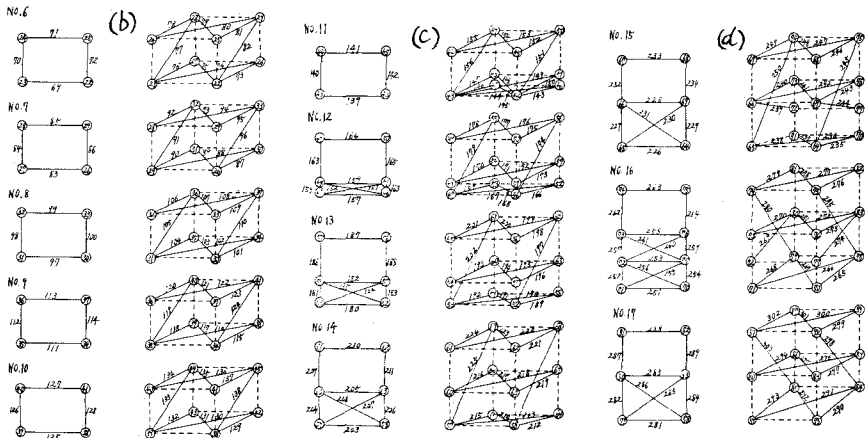
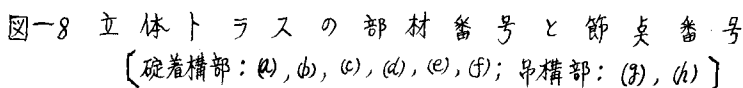
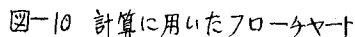
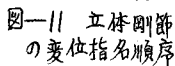


図-7 平面トラスの部材番号と節点番号





数値計算では、立体トラス（剛節，ピン節）および平面トラス（剛節，ピン節）の節点変位，部材応力，部材



— 25 —

端モーメントなどを求め、
図-12～図-18などに示す成果を得た。

図-12は死荷重および活荷重を満載した場合の歪直変位曲線であり、図-13, 14, 15, 16は上弦材, 下弦材, 斜材, 鉛直材の σ_s/σ_p (二次応力/一次応力) の比率を示したものであり、図-17, 18は対候構および横構(上, 下横構共)の同様の比率(σ_s/σ_p)を示したものである。

6. 考察

(1) 一次応力のみの場合

一次応力だけにつき、平面ピン節、平面剛節、立体ピン節、立体剛節の四種類の比較を行なってみると、平面ピン節>立体ピン節>平面剛節>立体剛節の順序となり、立体ピン節と平面ピン節の値はほぼ等しかった。

(2) 二次応力を考慮した場合(合成応力度比較)

二次応力を考慮すると、合成応力度は平面剛節の方が立体剛節に比べ、X方向部材(上, 下弦材)では大きくなり、Y軸方向部材(斜材, 鉛直材)では少くなることとなった。これは立体剛節トラスでは、Z方向部材の端モーメントの影響もあり、立体的応力配分の原理に起因するものと思われる。

本論文で取扱った解析モデルの長径間ゲルバートラスでは、二次応力を考慮すると、立体剛節トラスの方が平面ピン節トラスに比べ、10～45%程度大きな部材応力度を示している。

(3) 歪直変位の比較

歪直変位を比較すると、平面ピン節>平面剛節>立体ピン節>立体剛節の順となり、その最大差はほぼ4%(15cm程度)となった。

7. 終 結

立体トラスとしての解析上の問題とは仮部材の挿入法にあるが、何といつても立体解析の方が力学的経済性からみて合理的であろう。

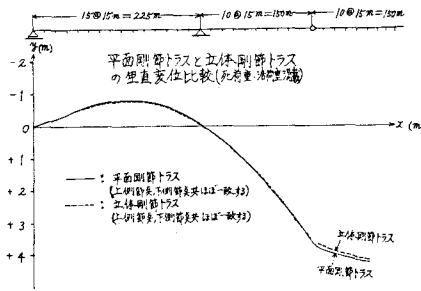


図-12 ゲルバートラス橋の歪直変位(m)

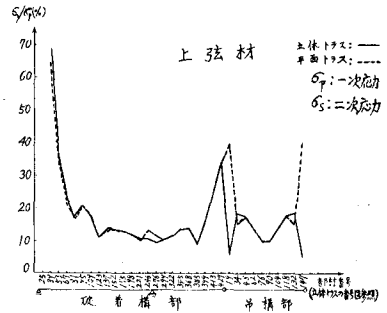


図-13 上弦材の σ_s/σ_p (%)

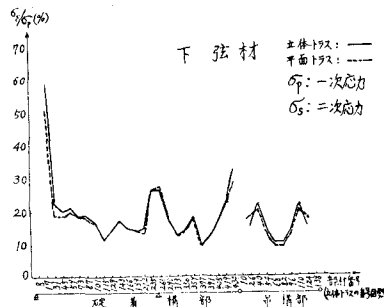


図-14 下弦材の σ_s/σ_p (%)

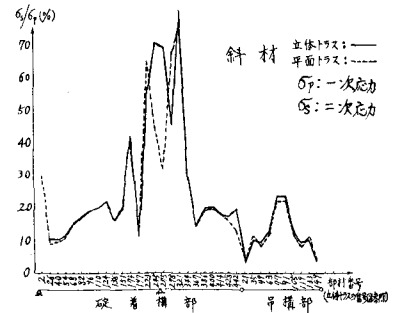


図-15 斜材の σ_s/σ_p (%)

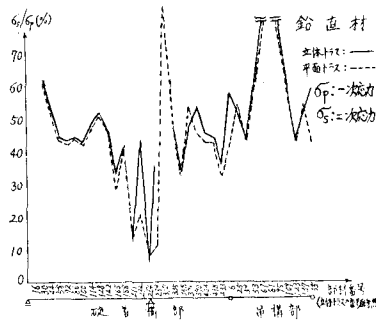


図-16 鉛直材の σ_s/σ_p (%)

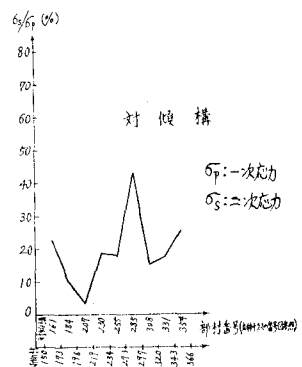


図-17 対候構の σ_s/σ_p (%)

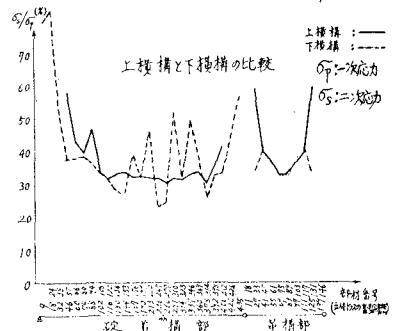


図-18 上横構, 下横構の σ_s/σ_p (%)