

I-4 有限帯板法による曲線橋の温度応力解析とその応力特性について

北海道大学 正員 芳村 仁
 北海道大学 正員 菲沢 憲吉
 運輸省〇正員 江河 直人

1. まえがき 橋各部分の温度変化は応力を発生させるなどするため、橋の設計等において検討しなければならない問題である。本報告では、直線一室箱桁橋と曲線一室箱桁橋(単線橋)の温度変形と温度応力の解析に有限帯板法を適用して、両者に対する温度の影響を比較してみたものである。

2. 解析方法 解析にあたって、変形、温度分布は橋軸方向にフーリエ級数展開できるものとし、橋軸方向両端部は単純支持されているものとする。また変形は微小であり、材料は等方、等質性を有するものとする。

(1) 長方形板要素について

図-1に示すように 橋軸直角方向(x方向)変位を u 、橋軸方向(y方向)変位を v 、板厚方向変位を w として、次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^n \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right) u_{im} + \frac{x}{d} u_{jm} \right] \sin \frac{m\pi y}{a} \\ v &= \sum_{m=1}^n \left[\left(1 - \frac{x}{d}\right) v_{im} + \frac{x}{d} v_{jm} \right] \cos \frac{m\pi y}{a} \\ w &= \sum_{m=1}^n \left[\left(1 - \frac{3x^2}{d^2} + \frac{2x^3}{d^3}\right) w_{im} + \left(x - \frac{2x^2}{d} + \frac{x^3}{d^2}\right) w_{jm} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3x^2}{d^2} - \frac{2x^3}{d^3}\right) w_{im} + \left(\frac{x^3}{d^3} - \frac{x^2}{d^2}\right) w_{jm} \right] \sin \frac{m\pi y}{a} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

面内ひずみを $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ 、面外ひずみを $\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$ で表わすと、ひずみ-変位関係式は次式で与えられる。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

$$\chi_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \chi_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \chi_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

ここで $\mathbf{e} = \{ \epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}, -\chi_x, -\chi_y, \chi_{xy} \}^T$ (2)
 として これに(1)式を代入すると

$$\mathbf{e} = \sum_{m=1}^n \mathbf{e}_m = \sum_{m=1}^n \mathbf{B}_m \cdot \mathbf{d}_m \quad (3)$$

ここに $\mathbf{d}_m = [u_{im} \ u_{jm} \ v_{im} \ v_{jm} \ w_{im} \ w_{jm}]^T$

$\mathbf{B}_m$ はひずみマトリクス

応力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ として応力-ひずみ関係式は次式で示される。

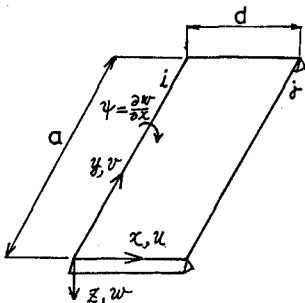


図-1 長方形板要素

※

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{xx} & E_{xy} & 0 \\ E_{xy} & E_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} (\epsilon_x - \alpha \chi_x) - \alpha T \\ (\epsilon_y - \alpha \chi_y) - \alpha T \\ \epsilon_{xy} + \alpha \chi_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

ここに $E_{xx} = E_{yy} = \frac{E}{1-\mu^2}$, $E_{xy} = \frac{\mu E}{1-\mu^2}$, $G = \frac{E}{2(1+\mu)}$
 T は無ひずみ無応力状態からの温度変化

E は弾性係数, μ はポアソン比, α は熱膨張係数

断面力は(4)式より 板厚方向の積分をして

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \\ -\chi_x \\ -\chi_y \\ \chi_{xy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha N_T \\ \alpha N_T \\ 0 \\ \alpha M_T \\ \alpha M_T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここに K は板厚

$$K = \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad K_1 = \mu K, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_1 = \mu D$$

$$N_T = \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^d \sigma_x dx dy = \sum_{m=1}^n N_{Tm} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (6)$$

$$M_T = \frac{1}{a} \int_0^a \int_0^d \sigma_y dx dy = \sum_{m=1}^n M_{Tm} \sin \frac{m\pi y}{a} \quad (7)$$

$$\mathbf{a} = \{ N_x \ N_y \ N_{xy} \ M_x \ M_y \ M_{xy} \}^T \quad (8)$$

$$\mathbf{e}_T = \{ \alpha N_T \ \alpha N_T \ 0 \ \alpha M_T \ \alpha M_T \ 0 \}^T \quad (9)$$

として (5)式をマトリクス表示して

$$\mathbf{a} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_T) \quad (10)$$

要素の内力のポテンシャルエネルギー U は

$$U = \sum_{m=1}^n \left[\frac{1}{2} \mathbf{d}_m^T \int_0^d \int_0^a \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_m dx dy \cdot \mathbf{d}_m - \mathbf{d}_m^T \int_0^d \int_0^a \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_T dx dy + \frac{1}{2} \int_0^d \int_0^a \mathbf{C}(T) dx dy \right] \quad (11)$$

ここで $\mathbf{C}(T)$ は T のみの関数である。

トータルポテンシャルエネルギー最小の原理より

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{d}_m} = \int_0^d \int_0^a \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_m dx dy \cdot \mathbf{d}_m - \int_0^d \int_0^a \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_T dx dy = 0 \quad (12)$$

よって 剛性マトリクス K_m , 温度分布による等価節線熱荷重 Q_{Tm} は

$$K_m = \int_0^R \int_0^A B_m^T \cdot D \cdot B_m \, d\alpha \, d\theta \quad (13)$$

$$Q_{Tm} = \int_0^R \int_0^A B_m \cdot D \cdot \epsilon_{Tm} \, d\alpha \, d\theta \quad (14)$$

したがって長方形板要素の平衡方程式は

$$K_m \cdot d_m = Q_{Tm} \quad (15)$$

(ロ) 扇形板要素について

図-2のように 樞軸直角方向(r 方向)変位を u , 樞軸方向(θ 方向)変位を v , 板厚方向変位を w とし、次式のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^N \left[\left(1 - \frac{R}{2}\right) u_{in} + \frac{R}{2} u_{jn} \right] \sin \frac{n\pi}{A} \theta \\ v &= \sum_{n=1}^N \left[\left(1 - \frac{R}{2}\right) v_{in} + \frac{R}{2} v_{jn} \right] \cos \frac{n\pi}{A} \theta \\ w &= \sum_{n=1}^N \left[\left(1 - \frac{3}{4}R^2 + \frac{1}{4}R^3\right) w_{in} + \theta(R - R^2 + \frac{3}{4}R^3) w_{jn} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{3}{4}R^2 - \frac{1}{4}R^3\right) w_{jn} + \theta\left(\frac{1}{4}R^2 - \frac{1}{2}R^3\right) w_{jn} \sin \frac{n\pi}{A} \theta \right] \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに $R = \frac{r - r_i}{b}$, $\theta = \frac{k - k_i}{2}$

面内ひずみを $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_{r\theta}$, 面外ひずみを $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ とし、ひずみ-変位関係式は次式で示される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \\ \chi_r &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \quad \chi_{r\theta} = -\frac{2}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

として (16) 式を代入して

$$e = \sum_{n=1}^N e_n = \sum_{n=1}^N B_n \cdot d_n \quad (18)$$

ここに $d_n = \{ u_{in} \, v_{in} \, w_{in} \, u_{jn} \, v_{jn} \, w_{jn} \}^T$

長方形板要素と同様に 応力-ひずみ関係式を用いて 断面力は

$$\begin{Bmatrix} N_r \\ N_\theta \\ N_{r\theta} \\ M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K & K_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_1 & K & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}K & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_1 & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2}D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_r \\ \epsilon_\theta \\ \epsilon_{r\theta} \\ \chi_r \\ \chi_\theta \\ \chi_{r\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha N_r \\ \alpha N_\theta \\ 0 \\ \alpha M_r \\ \alpha M_\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ここに $N_r = \frac{1}{A} \int_0^A T \, d\alpha = \sum_{n=1}^N N_{rn} \sin \frac{n\pi}{A} \theta$,

$$M_r = \frac{1}{A} \int_0^A T \, d\alpha = \sum_{n=1}^N M_{rn} \sin \frac{n\pi}{A} \theta$$

$K, K_1, D, D_1, T, E, \mu, \alpha, \epsilon$ などの記号は長方形板要素と同様である。

$$\alpha = \{ N_r, N_\theta, N_{r\theta}, M_r, M_\theta, M_{r\theta} \}^T \quad (20)$$

$$e_r = \{ \alpha N_r \, \alpha N_\theta \, 0 \, \alpha M_r \, \alpha M_\theta \, 0 \}^T \quad (21)$$

として (19) 式をマトリクス表示して

$$\alpha = D \cdot (e - e_r) \quad (22)$$

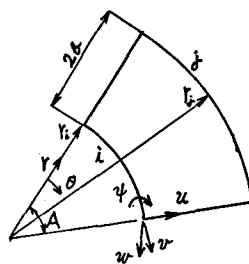


図-2 扇形板要素

* 要素の持つ内力のポテンシャルエネルギーは

$$U = \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} d_n^T \int_{r_i}^R B_n^T \cdot D \cdot B_n \, r \, d\alpha \, dr \cdot d_n - d_n^T \int_{r_i}^R B_n^T \cdot D \cdot \epsilon_{Tm} \, r \, d\alpha \, dr + \frac{1}{2} \int_{r_i}^R c(r) \, r \, d\alpha \, dr \right] \quad (23)$$

トータルポテンシャルエネルギー-最小の原理より

$$\frac{\partial U}{\partial d_n} = \int_{r_i}^R B_n^T \cdot D \cdot B_n \, r \, d\alpha \, dr \cdot d_n - \int_{r_i}^R B_n^T \cdot D \cdot \epsilon_{Tm} \, r \, d\alpha \, dr = 0 \quad (24)$$

剛性マトリクス K_m , 温度分布による等価節線熱荷重

Q_{Tm} は

$$K_m = \int_{r_i}^R \int_{r_i}^A B_m^T \cdot D \cdot B_m \, r \, d\alpha \, dr \quad (25)$$

$$Q_{Tm} = \int_{r_i}^R \int_{r_i}^A B_m^T \cdot D \cdot \epsilon_{Tm} \, r \, d\alpha \, dr \quad (26)$$

扇形板要素の平衡方程式は

$$K_m \cdot d_m = Q_{Tm} \quad (27)$$

以下 K_m の内容を零以外の要素について示す。

$$K_m = \frac{A}{2} \begin{bmatrix} k_{11} & & \\ & \text{Symmetric} & \\ & & k_{22} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$k_{11} = K(1 + k_1/b)/2 - K_1 + b(K + k_m^2 K_2)(I_0 - I_1 + \frac{1}{4}I_2)$$

$$k_{22} = k_m(K_1 - K_2)/2 - b k_m(K + K_2)(I_0 - I_1 + \frac{1}{4}I_2)$$

$$k_{33} = -K(1 + k_1/b)/2 + b(K + k_m^2 K_2)(I_1 - \frac{1}{2}I_2)/2$$

$$k_{41} = k_m(K_1 + K_2)/2 - b k_m(K + K_2)(I_1 - \frac{1}{2}I_2)/2$$

$$k_{22} = b(k_m^2 K + K_2)(I_0 - I_1 + \frac{1}{4}I_2) + k_2(3 + k_1/b)/2$$

$$k_{32} = -k_m(K_1 + K_2)/2 - b k_m(K + K_2)(I_1 - \frac{1}{2}I_2)/2$$

$$k_{62} = b(k_m^2 K + K_2)(I_1 - \frac{1}{2}I_2)/2 - k_2(1 + k_1/b)/2$$

$$k_{33} = 3D(1 + k_1/b)/(2b) + 3k_m^2 D_1(I_0 - I_1 - \frac{3}{4}I_2 + \frac{1}{4}I_4)/b$$

$$+ 9Y_1(I_2 - I_3 + \frac{1}{4}I_4)/(4b) + 3Y_2(J_1 - \frac{1}{2}J_2 - \frac{3}{4}J_3 + \frac{5}{8}J_4 - \frac{1}{8}J_5) +$$

$$bY_3(L_0 - \frac{3}{2}L_2 + \frac{1}{2}L_3 + \frac{1}{8}L_4 - \frac{3}{8}L_5 + \frac{1}{8}L_6)$$

$$k_{43} = D(1 + 3Y_4/(2b))/b + k_m^2 D_1(2I_0 - \frac{9}{2}I_2 + \frac{7}{2}I_3 - \frac{3}{4}I_4)$$

$$+ b^2 Y_5(L_1 - L_2 - \frac{1}{2}L_3 + L_4 - \frac{7}{8}L_5 + \frac{1}{8}L_6) + bY_2(-J_0 + 2J_1 + \frac{3}{2}J_2 - 4J_3$$

$$+ \frac{35}{8}J_4 - \frac{3}{8}J_5) + \frac{3}{2}Y_1(-I_1 + \frac{5}{2}I_2 - \frac{7}{4}I_3 + \frac{3}{8}I_4)$$

$$k_{55} = 3D(1 + k_1/b)/(2b) - 3k_m^2 D_1(I_0 - I_1 - \frac{3}{2}I_2 + 2I_3 - \frac{1}{2}I_4)/(2b) \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
& + 9Y_1(-I_2+I_3-\frac{1}{4}I_4)/(4\delta) + 3Y_2(-J_1+\frac{1}{2}J_2+\frac{3}{2}J_3-\frac{5}{4}J_4+\frac{1}{4}J_5)/2 \\
& + \delta Y_3(3L_2-L_3-\frac{1}{4}L_4+\frac{3}{2}L_5-\frac{1}{4}L_6)/4 \\
& k_{33} = D\{2+3Y_1/(2\delta)\}/\delta + k_m^2 D_1(I_0-\frac{3}{2}I_1-\frac{3}{2}I_2+\frac{5}{2}I_3-\frac{3}{4}I_4) \\
& + 3Y_1(I_2-\frac{1}{4}I_3+\frac{3}{8}I_4)/2 + \delta Y_2(J_1-\frac{3}{4}J_2-\frac{3}{2}J_3+\frac{25}{8}J_4-\frac{3}{8}J_5) \\
& + \delta^2 Y_3(-L_2+\frac{1}{2}L_3+\frac{3}{4}L_4-\frac{5}{8}L_5+\frac{1}{8}L_6)/2 \\
& k_{44} = D(1+2Y_1/\delta) + D_1\{-1+\delta k_m^2(4I_1-7I_2+4I_3-\frac{3}{4}I_4)\} + \\
& \delta Y_1(I_0-4I_1+\frac{1}{2}I_2-3I_3+\frac{7}{8}I_4)+2\delta^2 Y_2(-J_1+3J_2-3J_3+\frac{3}{4}J_4 \\
& -\frac{3}{8}J_5)+\delta^3 Y_3(L_2-2L_3+\frac{3}{2}L_4-\frac{1}{2}L_5+\frac{1}{8}L_6) \\
& k_{74} = -D\{1+3Y_1/(2\delta)\}/\delta + k_m^2 D_1(-3I_1+9I_2-7I_3+\frac{3}{2}I_4)/2 + \\
& 3Y_1(I_1-\frac{1}{2}I_2+\frac{1}{4}I_3-\frac{3}{8}I_4)/2 + \delta Y_2(-\frac{1}{4}J_2+4J_3-\frac{3}{8}J_4+\frac{3}{8}J_5) \\
& + \delta^2 Y_3(\frac{3}{4}L_3-L_4+\frac{7}{8}L_5-\frac{1}{8}L_6) \\
& k_{84} = D(1+Y_1/\delta) + \delta k_m^2 D_1(I_1-\frac{1}{2}I_2+3I_3-\frac{3}{4}I_4) + \delta Y_1(-I_1 + \\
& \frac{1}{4}I_2-\frac{1}{4}I_3+\frac{7}{8}I_4) + 3\delta^2 Y_2(J_2-2J_3+\frac{3}{4}J_4-\frac{1}{4}J_5)/2 + \\
& \delta^3 Y_3(-L_3+\frac{3}{2}L_4-\frac{3}{4}L_5+\frac{1}{8}L_6)/2 \\
& k_{35} = K(1+Y_1/\delta)/2 + K_1 + \delta(K+k_m^2 K_2)I_2/4 \\
& k_{65} = k_m(-K_1+K_2)/2 - \delta k_m(K+K_2)I_2/4 \\
& k_{66} = K_2(-1+Y_1/\delta)/2 + \delta(k_m^2 K+K_2)I_2/4 \\
& k_{77} = 3D(1+Y_1/\delta)/(2\delta^2) + 3k_m^2 D_1(-3I_2+4I_3-I_4)/(4\delta) \\
& + 9Y_1(I_2-I_3+\frac{1}{4}I_4)/(4\delta) + 3Y_2(-3J_3+\frac{5}{2}J_4-\frac{1}{2}J_5)/4 \\
& + \delta Y_3(9L_4-6L_5+L_6)/16 \\
& k_{87} = -D\{2+3Y_1/(2\delta)\}/\delta + k_m^2 D_1(3I_2-5I_3+\frac{3}{2}I_4)/2 \\
& + 3Y_1(-I_2+\frac{1}{4}I_3-\frac{3}{8}I_4)/2 + \delta Y_2(3J_3-\frac{25}{8}J_4+\frac{3}{8}J_5)/2 \\
& + \delta^2 Y_3(-3L_4+\frac{5}{2}L_5-\frac{1}{2}L_6)/8 \\
& k_{88} = D(3+2Y_1/\delta) + D_1\{1+\delta k_m^2(-I_2+2I_3-\frac{3}{4}I_4)\} \\
& + \delta Y_1(I_2-\frac{3}{2}I_3+\frac{7}{8}I_4) + \delta^2 Y_2(-J_3+\frac{3}{4}J_4-\frac{3}{8}J_5) \\
& + \delta^3 Y_3(L_4-L_5+\frac{1}{4}L_6)/4
\end{aligned}$$

ここで、 $k_m = \frac{m^2}{A}$, $Y_1 = D + 4k_m^2 D_2$, $Y_2 = k_m^2(D + 4D_2)$
 $Y_3 = k_m^2(k_m^2 D + 4D_2)$, $K_2 = \frac{1}{2}K$, $D_2 = \frac{1}{2}D$
 $I_0 \sim I_4$, $J_0 \sim J_5$, $L_0 \sim L_6$ は次の積分により得られる。

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_0^2 \frac{R^5}{(R+K_2)} dR \quad (S=0 \sim 4), \quad J_5 = \int_0^2 \frac{R^5}{(2R+K_2)} dR \quad (S=0 \sim 5) \\
L_5 &= \int_0^2 \frac{R^5}{(6R+K_2)} dR \quad (S=0 \sim 6)
\end{aligned}$$

(ハ) ウェブシェル要素について

図-3に示すような要素中が d 、中心角が A のウェブシェル要素を考え、橋道下方向(S 方向)変位を u 、橋軸方向(θ 方向)変位を v 、板厚方向変位を w として次式のように仮定する。

$$\begin{aligned}
u &= \sum_{n=1}^3 \left[(1-\frac{S}{d}) u_n + (\frac{S}{d}) u_n \right] \sin \frac{n\pi}{A} \theta \\
v &= \sum_{n=1}^3 \left[(1-\frac{S}{d}) v_n + (\frac{S}{d}) v_n \right] \cos \frac{n\pi}{A} \theta \\
w &= \sum_{n=1}^3 \left[(1-\frac{3S^2}{d^2} + \frac{2S^3}{d^3}) w_n + (S-\frac{2S^2}{d} + \frac{S^3}{d^2}) \psi_n \right] \sin \frac{n\pi}{A} \theta
\end{aligned} \quad (29)$$

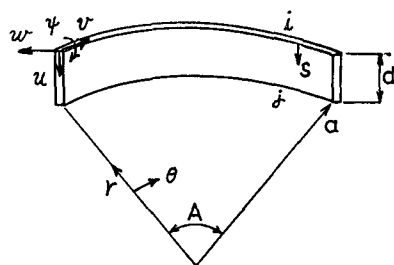


図-3 ウェブシェル要素

$+ (\frac{3S^2}{d^2} - \frac{2S^3}{d^3}) w_n + (\frac{S^3}{d^2} - \frac{S^2}{d}) \psi_n \sin \frac{n\pi}{A} \theta$
 面内ひずみ $\epsilon_s, \epsilon_\theta, \epsilon_{s\theta}$, 面外ひずみ $\chi_s, \chi_\theta, \chi_{s\theta}$ は、

$$\begin{aligned}
\epsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial S}, \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{r}, \quad \epsilon_{s\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial S} \\
\chi_s &= \frac{\partial^2 w}{\partial S^2}, \quad \chi_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \chi_{s\theta} = 2(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial S \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial S}) \\
\mathbf{e} &= \{ \epsilon_s, \epsilon_\theta, \epsilon_{s\theta}, \chi_s, \chi_\theta, \chi_{s\theta} \}^T \quad (30)
\end{aligned}$$

として (29) 式を代入すると

$$\mathbf{e} = \sum_{n=1}^3 \mathbf{e}_n = \sum_{n=1}^3 \mathbf{B}_n \cdot \mathbf{d}_n \quad (31)$$

ここに $\mathbf{d}_n = \{ u_n, v_n, w_n, \psi_n, u_n, v_n, w_n, \psi_n \}^T$
 前記2要素と同じように 応力-ひずみ関係式を用いて断面力は次のようになる。

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D} \cdot (\mathbf{e} - \mathbf{e}_T) \quad (32)$$

以下、前記2要素と同様にして 剛性マトリクス K_m 、等価節線熱荷重 $\mathbf{Q}_{Tm}$ が求まる。

$$K_m = \int_0^A \int_0^{2\pi} \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_m \, ad \, ds \quad (33)$$

$$\mathbf{Q}_{Tm} = \int_0^A \int_0^{2\pi} \mathbf{B}_m^T \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{e}_{Tm} \, ad \, ds \quad (34)$$

ウェブシェル要素の平衡方程式は次式による。

$$K_m \cdot \mathbf{d}_m = \mathbf{Q}_{Tm} \quad (35)$$

以下 K_m の内容を示す。

$$K_m = \frac{A}{2} a d \begin{bmatrix} k_{11} & & & \\ & k_{22} & & \\ & & k_{33} & \\ & & & k_{44} & \\ & & & & k_{55} & \\ & & & & & k_{66} \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\begin{aligned}
k_{11} &= k_{33} = K/d^2 + k_m^2 K_2/(3a^2), \quad k_{21} = k_m(K_1 - K_2)/(2ad) \\
k_{45} &= -k_{21}, \quad k_{31} = k_{77} = -K_1/(2ad), \quad k_{53} = k_{75} = -k_{31} \\
k_{41} &= -K_1/(12a), \quad k_{31} = k_{54} = -k_{41}, \quad k_{65} = k_{41} \\
k_{61} &= k_m(K_1 + K_2)/(2ad), \quad k_{52} = -k_{61} \\
k_{51} &= -K/d^2 + k_m^2 K_2/(6a^2), \quad k_{42} = -dk_m K/(20a^2) - k_m D/(a^2 d) \\
& - dk_m^2 D/(20a^4), \quad k_{66} = -k_{42}, \\
k_{22} &= k_{66} = k_m^2 K/(3a^2) + K_2/d^2 + k_m^2 D/(3a^4) + 4D_2/(a^2 d^2) \\
k_{32} &= k_{76} = -7k_m K/(20a^2) - k_m D/(a^2 d^2) - 7k_m^2 D/(20a^4) - 4k_m D_2/(a^2 d^2) \\
k_{42} &= k_m^2 K/(6a^2) - K_2/d^2 + k_m^2 D/(6a^4) - 4D_2/(a^2 d^2)
\end{aligned}$$

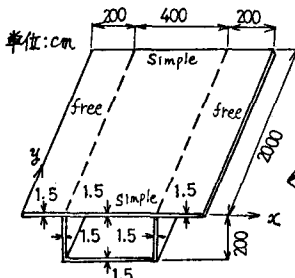


図-4

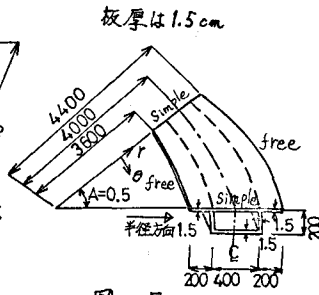


図-5

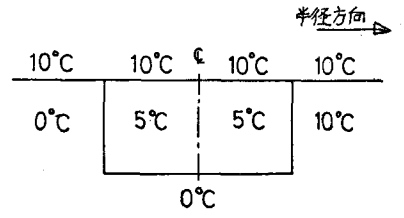


図-6

半径方向

$$\begin{aligned}
 k_{12} &= k_{23} = -3k_m K / (20a^2) + k_m D / (a^2 d^2) - 3k_m^2 D / (20a^2) + 4k_m^2 D / (a^2 d^2) \\
 k_{22} &= dk_m K / (30a^2) + dk_m^2 D / (30a^2), \quad k_{14} = -k_{22} \\
 k_{33} &= k_{17} = 13K / (35a^2) + 12D / (a^4) + 2k_m^2 D / (35a^2) + 13k_m^4 D / (35a^4) \\
 &\quad + 24k_m^2 D / (5a^2 d^2), \quad k_{43} = 11dk_m / (210a^2) + 6D / (a^2) + 6k_m^2 D / (5a^2 d^2) \\
 &\quad + 11dk_m^4 D / (210a^4) + 2k_m^2 D / (5a^2 d^2), \quad k_{37} = -k_{43} \\
 k_{73} &= 9K / (70a^2) - 12D / (a^4) - 12k_m^2 D / (5a^2 d^2) + 9k_m^4 D / (70a^4) - \\
 &\quad 24k_m^2 D / (5a^2 d^2), \quad k_{83} = -13dk_m / (420a^2) + 6D / (a^2) + \\
 &\quad k_m^2 D / (5a^2 d^2) - 13dk_m^4 D / (420a^4) + 2k_m^2 D / (5a^2 d^2) \\
 k_{44} &= k_{88} = dk_m / (40a^2) + 4D / (a^4) + 4k_m^2 D / (5a^2 d^2) + dk_m^4 D / (40a^4) \\
 &\quad + 8k_m^2 D / (5a^2 d^2), \quad k_{84} = -dk_m / (40a^2) + 2D / (a^2) - k_m^2 D / (5a^2 d^2) \\
 &\quad - dk_m^4 D / (40a^4) - 2k_m^2 D / (5a^2 d^2), \quad k_{48} = -k_{84}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{ここに } K &= \frac{Eh}{1-\mu^2}, \quad K_1 = \mu K, \quad K_2 = \frac{1-\mu}{2} K \\
 D &= \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}, \quad D_1 = \mu D, \quad D_2 = \frac{1-\mu}{2} D, \quad k_m = \frac{\pi r}{A}
 \end{aligned}$$

(二) 熱荷重について

温度分布は板厚方向に直線分布するものとする。

3. 解析例 解析例は 図-4、図-5に示す支間 20m の箱桁橋とし、橋軸方向両端部で単純支持されていて、他辺は自由辺とする。温度分布は図-6のように考え橋軸方向には一定とした。材料定数としては $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$, $\mu = 0.3$, $\alpha = 0.12 \times 10^{-4}$ 、分割は断面を 32 等分割して解析を行なった。図-7は上から、それぞれ支間中央断面での面外変形、橋軸直角方向モーメント、橋軸方向面内断面力の分布を、直線箱桁橋と曲線箱桁橋について示している。この場合、面外変形、面外断面力に比べて、面内断面力にちがいがでている事がわかる。

4. あとがき 曲線橋の温度応力解析に有限要素法を用い、種々の温度分布に対して適用可能な手法であることを示した。計算には北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を使用した。

参考文献 1) Y.K. Cheung, *Finite Strip Method in Structural Analysis*, Pergamon Press 1976

2) 三上隆他：弾性基礎上の円筒形タンクの非軸対称温度応力について 道支部論文報告集 第34号 S53年

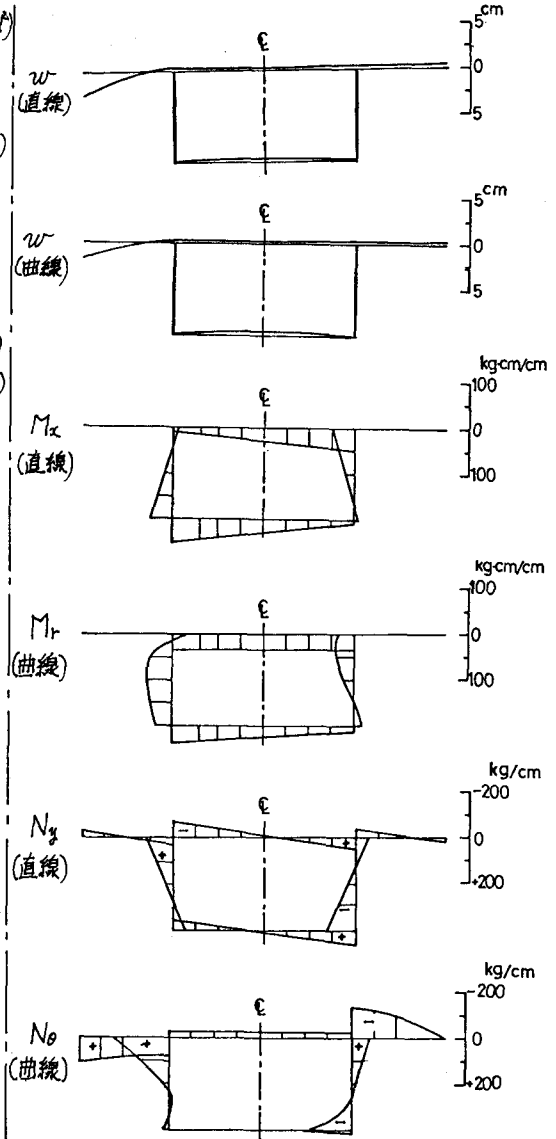


図-7