

I - 3 新茂岩橋の全体座屈解析

北海道大学 正員 能町 純雄
 北海道開発局帯広開建 〃 清崎 晶雄
 北海道開発コンサルタント(株) 〃 ○金沢 義輝

1. まえがき

茂岩橋は一般国道38号(滝川～釧路間)帯広市・豊頃町地内で十勝川を全長約1kmで横断している。現橋の車道幅員が6mと狭く、架橋地点の交通量の増大と車輛の大型化に伴い、交通流のネックとなっている。今回、道路整備計画の一環として新茂岩橋(仮称)が計画された。

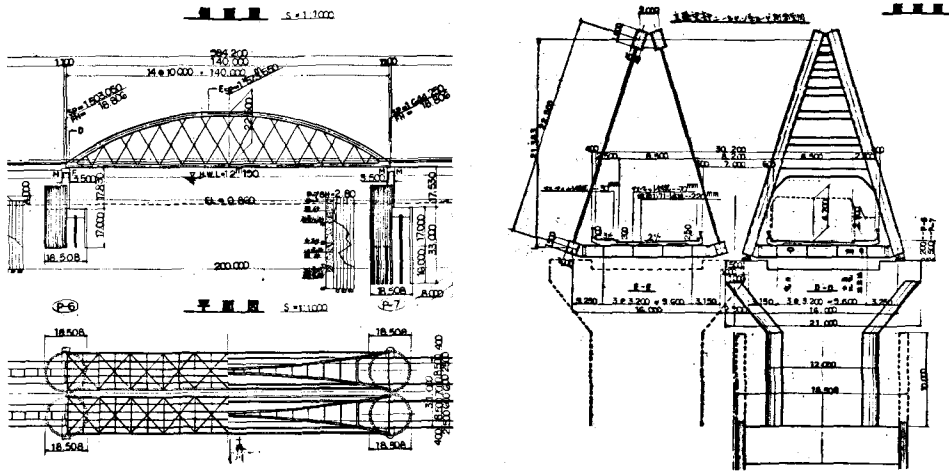


図-1. 新茂岩橋主橋梁部一般図

新茂岩橋は3径間連続鋼桁4連とニールセン・ローゼ桁1連とからなり、主橋梁部の一般図を図-1. に示す。主橋梁部は両アーチ構面をおがませたバスケット・ハンドル型のローゼ桁であり、道内では実例がなく多くの問題点が考えられるが、アーチ系の橋梁であること、高強度鋼材を使用していることからポイントは全体座屈である。全体座屈について道路橋示方書・同解説(以下、道示と略す)では「特殊な構造型式のアーチについては別途、照査すること」とあることを考慮し、立体骨組としての座屈基本式を誘導して解析し、安全性を確認することとした。

2. 基礎方程式

1) 部材の非線形方程式

解析上の仮定は次の通り。

- (1) 材料は弾性である。
- (2) 部材は等断面直線材で、断面は2軸対称である。
- (3) 断面の形状は変化しない。
- (4) 曲げによるせん断変形および曲げねじりの影響は無視する。
- (5) 応力とひずみの関係は線形である。

部材座標系は図-2. に示した通りで、ひずみ成分は次のように表わされる。直ひずみに対し、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \epsilon_y &= \epsilon_z = 0 \end{aligned} \right\} \text{-----}(1)$$

せん断ひずみに対し、

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_{yz} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{-----}(2)$$

また、部材の重心軸上の x, y, z 方向の変位成分を u_0, v_0, w_0 とし、 x 軸回りの回転を ϕ_0 、その関数を w とすると、部材断面の任意点 (x, y, z) における変位は、

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 - y \frac{d v_0}{d x} - z \frac{d w_0}{d x} - w \frac{d \phi_0}{d x} \\ v &= v_0 - z \phi_0 \\ w &= w_0 + y \phi_0 \end{aligned} \right\} \text{-----}(3)$$

部材端変位と部材端力の関係は図-3. に示す。部材両端 a, b の変位を次のように表わす。

$$\{d\} = \{u_a, v_a, w_a, \theta_a, w'_a, v'_a, u_b, v_b, w_b, \theta_b, w'_b, v'_b\}^T \text{-----}(4)$$

また、断面重心点の変位は

$$\{d_0\} = \{u_0, v_0, w_0, \phi_0\}^T \text{-----}(5)$$

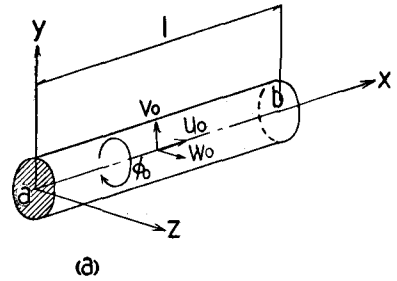
式(4), (5) を次のように関係づける。

$$\{d_0\} = [X] \{d\} \text{-----}(6)$$

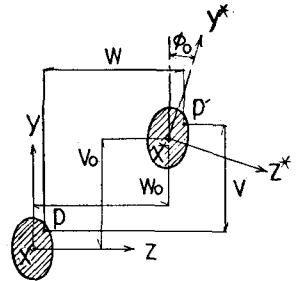
但し、 $\xi = x/l$ として

$$[X] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & 0 & 0 & -l(\xi^2-\xi^3) \\ 0 & 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & 0 & -l(\xi-2\xi^2+\xi^3) & 0 & 0 & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & 0 & l(\xi^2-\xi^3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{-----}(7)$$

部材のひずみエネルギーは



(a)



(b)

図-2. 部材の変位

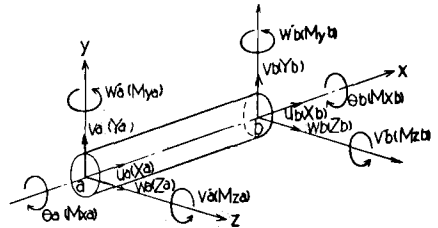


図-3. 部材端変位と部材端力

$$U = \frac{E}{2} \int_V \varepsilon_x^2 dV + \frac{G}{2} \int_V (r_{xy}^2 + r_{zx}^2) dV \quad \text{-----}(8)$$

ひずみは式(1),(2) と式(6) から, $\phi_0'' = 0$ を考慮して,

$$\varepsilon_x = u_0' - v_0'' y - w_0'' z + \frac{1}{2} \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \} - \phi_0' (v_0' z - w_0' y) + \frac{1}{2} (y^2 + z^2) (\phi_0')^2 \quad \text{-----}(9)$$

$$r_{xy} = -\phi_0' (z + \frac{\partial w}{\partial y}) \quad \text{-----}(10)$$

$$r_{zx} = \phi_0' (y - \frac{\partial w}{\partial z}) \quad \text{-----}(11)$$

式(9), (10), (11) を式(8) に代入し,

$$\int_A y dA = \int_A z dA = \int_A y z dA = \int_A y^3 dA = \int_A z^3 dA = \int_A y^2 z dA = \int_A y z^2 dA = 0$$

を考慮すると,

$$\begin{aligned} U = & \frac{EA}{2} \int_0^l [(u_0')^2 + u_0' \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \} + \frac{1}{4} \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \}^2] dx \\ & + \frac{EI_x}{2} \int_0^l [(v_0'')^2 + u_0' (\phi_0')^2 - 2v_0'' w_0' \phi_0' + \frac{1}{2} \{ (v_0')^2 + 3(w_0')^2 \} (\phi_0')^2] dx \\ & + \frac{EI_y}{2} \int_0^l [(w_0'')^2 + u_0' (\phi_0')^2 + 2v_0'' w_0' \phi_0' + \frac{1}{2} \{ 3(v_0')^2 + (w_0')^2 \} (\phi_0')^2] dx \\ & + \frac{GJ}{2} \int_0^l (\phi_0')^2 dx + \frac{EI_r}{8} \int_0^l (\phi_0')^4 dx \end{aligned} \quad \text{-----}(12)$$

但し,

$$\left. \begin{aligned} A &= \int_A dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A z^2 dA \\ J &= \int_A \{ (z + \frac{\partial w}{\partial y})^2 + (y - \frac{\partial w}{\partial z})^2 \} dA, \quad I_r = \int_A (y^2 + z^2)^2 dA \end{aligned} \right\} \quad \text{-----}(13)$$

式(12) でねじり角を含んだ変位の4次の項(下線を施した項)を高次の微小項として無視すると,

$$\begin{aligned} U = & \frac{EA}{2} \int_0^l [(u_0')^2 + u_0' \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \}] dx + \frac{EI_x}{2} \int_0^l [(v_0'')^2 + u_0' (\phi_0')^2 - 2v_0'' w_0' \phi_0'] dx \\ & + \frac{EI_y}{2} \int_0^l [(w_0'')^2 + u_0' (\phi_0')^2 + 2v_0'' w_0' \phi_0'] dx + \frac{GJ}{2} \int_0^l (\phi_0')^2 dx + \frac{EA}{2} \int_0^l [\frac{1}{4} \{ (v_0')^2 + (w_0')^2 \}^2] dx \end{aligned} \quad \text{-----}(14)$$

2) 座屈の条件式

部材端力と材端変位との関係は,

$$\{f\} = [k(d)] \{d\} = ([k_0] + [k_1(d)] + [k_2(d)]) \{d\} \quad \text{-----}(15)$$

また, 増分量に関する式は

$$\{\Delta f\} = [\Delta k(d)]\{\Delta d\} = ([k_0] + 2[k_1(d)] + 3[k_2(d)])\{\Delta d\} \quad \text{----- (16)}$$

座屈時には $\{\Delta f\} = 0$, $\{\Delta d\} \neq 0$ であるから、

$$[k_0] + 2[k_1(d)] + 3[k_2(d)]\{\Delta d\} = 0 \quad \text{----- (17)}$$

ここに、 $[k_0]$ は線形項であり、 $[k_1]$ 、 $[k_2]$ はそれぞれ変位 $\{d\}$ の1次および2次の項を含む非線形項である。ここで、ある基準状態 $\{f_0\}$ における節点の変位を $\{d_0\}$ とし、 $\lambda_{cr}\{f_0\}$ で座屈するものとする。荷重が座屈荷重に達するまでは荷重と変位は比例すると仮定すれば、座屈直前の変位は $\lambda_{cr}\{d_0\}$ であるから、これを式(17)に代入すれば、次の固有方程式が得られる。

$$[k_0] + 2\lambda_{cr}[k_1(d_0)] + 3\lambda_{cr}^2[k_2(d_0)]\{\Delta d\} = 0 \quad \text{----- (18)}$$

座屈前の変形が微小で、左辺第3項は他の2項に比べて小さいとして無視し、式(18)を次のように書き換える。

$$[k_0]\{x\} = -\lambda[k_1]\{x\}, \text{ 且し } [k_1] = 2[k_1] \quad \text{----- (19)}$$

式(19)の固有値問題を解く時、 λ の最小値 λ_{min} が最小座屈荷重を与える。その時の $\{x\}$ が座屈モードを与える。 $[k_1]$ の具体的な数式は[付録]に示す。

3. 全体座屈解析

1) 計算例

上記の解式の計算精度を検討するために平面骨組の数値計算を行なった。対象としたモデル及び荷重状態は図-4.に示した通りで、計算結果を表-1.に示す。表中の解式-1は軸変形 n に対し次式

$$n = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad \text{----- (20)}$$

を用い、解式-2は式(20)の右辺第2項を省略した次式

$$n = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad \text{----- (21)}$$

を用いている。これらの解法は座屈解析に有限変形を考慮した2次理論を適用している。

本解法は平面骨組について言うとき、具体的には式(21)を基に誘導したひずみエネルギーの高次の項を省略し、線形解析の結果を直接用いた“線形座屈解析法”と言える。

表-1.を見ると、本解法による値は荷重-2の場合、基準荷重の値によっては若干精度が落ちる。この点については4. 考察に示す。

固有値の計算はヤコビ法である。

2) 実橋モデル

一般図からもわかる通り、節点数100程度の立体

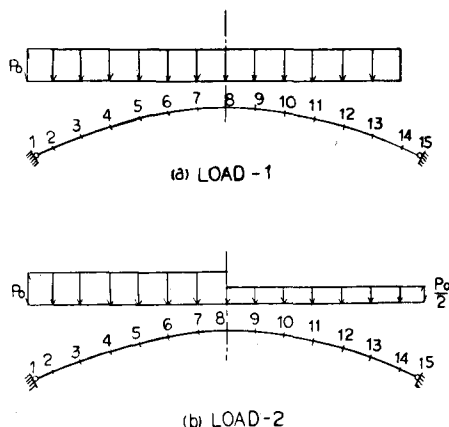


図-4. 荷重状態

表-1. 座屈荷重の比較

BASIC-LOAD		METHOD		"HORI" etc.				THIS METHOD	
				METHOD-1		METHOD-2			
				λ	BUCK. LOAD	λ	LOAD	λ	BUCK. LOAD
LOAD 1	$P_0=10$	NO.1	14.15	141.5 ¹	14.14	141.4 ¹	14.170	141.7 ¹	
		NO.2	30.30	303.0 ¹	30.32	303.2 ¹	30.467	304.8 ¹	
	$P_0=35$	NO.1	4.017	140.6 ¹	4.020	140.7 ¹	4.049	141.7 ¹	
		NO.2	8.523	298.3 ¹	8.530	298.6 ¹	8.707	340.7 ¹	
LOAD 2	$P_0=10$	NO.1	7.987	79.9 ¹	7.996	80.0 ¹	8.500	85.0 ¹	
		NO.2	16.07	160.7 ¹	16.09	160.9 ¹	17.396	174.0 ¹	
	$P_0=20$	NO.1	3.672	73.4 ¹	3.676	73.5 ¹	4.250	85.0 ¹	
		NO.2	7.220	144.4 ¹	7.231	144.6 ¹	8.698	174.0 ¹	

骨組モデルとなり、電子計算機の容量の点からモデルを簡略化することとした。ここに、下記(1),(2)の平面モデルは実例を考慮して設定した。また、初期変位の計算は実橋モデルについて行なった。

(1)面内モデル(平面骨組)

上弦材と下弦材を吊材で結んだ構造で、テーパ角の影響は初期変位を補正することにより考慮した。

(2)面外モデル(平面骨組)

上弦材と上横支材、端横桁で形成されるフィレンティール桁を平面に展開した構造で、この場合上弦材は中間を吊材で支持されているが、これらは面外座屈の拘束に対しては奇与しないものとして無視した。

(3)立体骨組モデル

上弦材と下弦材から成る2主構面が上横支材と端横桁により連結された構造である。吊材は電算容量の点から省略したため、このモデルは面外座屈を対象としたモデルと言える。

以上の3つのモデルについて得られた座屈安全率入を表-2.に、座屈モード図を図-5,6,7に示す。但し、図の左側が荷重-1、右側が荷重-2に対するモード図である。

表-2. 座屈安全率入

MODEL	MODE	LOAD-1	LOAD-2
IN-PLANE	NO.1	13.447	13.885
	NO.2	13.617	16.138
OUT-OF-PLANE	NO.1	3.863	4.223
	NO.2	4.544	5.069
SPACE-FRAME (*)	NO.1	3.936	4.328
	NO.2	5.042	5.574

(*)卓越する座屈変形が面外曲げのもののみ。

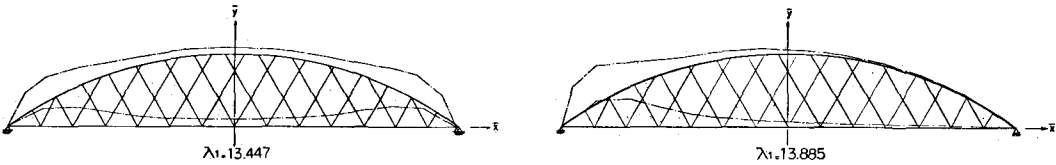


図-5. 面内モデル

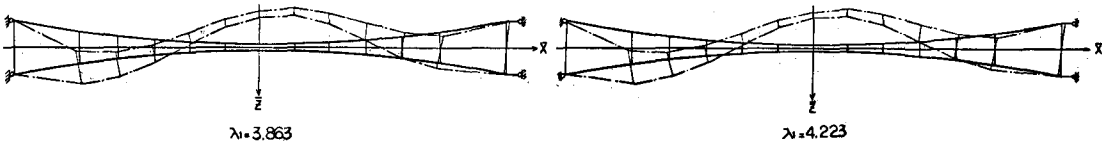


図-6. 面外モデル

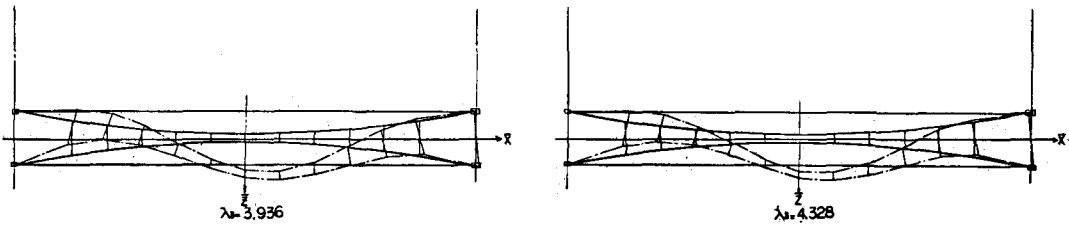


図-7. 立体骨組モデル

4. 考 察

立体骨組を対象に座屈基本式を誘導し、それを基に作製した解析プログラム (SPBUCK) により新茂岩橋の全体座屈解析を行なった。以下に考察を示す。

(1) 計算例で荷重-2 の場合、変位の2次の項の影響が若干現われているが、この誤差は基準荷重の設定に配慮し、構造的に剛となる立体骨組の場合それほど問題にならないと思われる。

(2) 上記(1) から、立体骨組の場合座屈解析に2次理論を適用する必要性は余りない。

また、電算容量の問題から立体骨組モデルを簡略にせざるを得なかったため、既往の解析例を参考に面内モデル、面外モデル (共に平面骨組) についても座屈解析を行ない、その不備を補ったことについて、

(3) 道示によると、面外座屈荷重は吊材のないものより40%以上増大する、とある。この事を吊材を省略した面外モデルと立体骨組モデルに当てはめると、得られた面外座屈荷重は安全側の値であると言える。

(4) 面内モデルはテーパ角を骨組に考慮できないが、初期変位を補正することにより実橋モデルに漸近させた。これにより、面内座屈荷重の真に近い値が得られたものと思われる。

(5) 道示によると、面内座屈、面外座屈に対する所要の安全率がそれぞれ1.7, 2.0であり、座屈に対する安全性が確認された。

[付 録]

式(19)の1次の非線形項は対称行列であるので上三角行列部分のみ示す。 $[k_i] = [b_{i,j}]$, $I_y + I_z = I_p$ として

$$b_{1,2} = -b_{1,8} = -b_{2,7} = b_{7,8} = -\frac{3EA}{5l^2}(v_a - v_b) - \frac{EA}{20l}(v'_a + v'_b), \quad b_{1,3} = -b_{1,9} = -b_{3,7} = b_{7,9} = -\frac{3EA}{5l^2}(w_a - w_b) + \frac{EA}{20l}(w'_a + w'_b)$$

$$b_{1,4} = -b_{1,10} = -b_{4,7} = b_{7,10} = -\frac{EI_p}{2l^2}(\theta_a - \theta_b), \quad b_{1,5} = -b_{5,7} = \frac{EA}{20l}(w_a - w_b) - \frac{EA}{60}(4w'_a - w'_b)$$

$$b_{1,6} = -b_{6,7} = -\frac{EA}{20l}(v_a - v_b) - \frac{EA}{60}(4v'_a - v'_b), \quad b_{1,11} = -b_{7,11} = \frac{EA}{20l}(w_a - w_b) + \frac{EA}{60}(w'_a - 4w'_b)$$

$$b_{1,12} = -b_{7,12} = -\frac{EA}{20l}(v_a - v_b) + \frac{EA}{60}(v'_a - 4v'_b), \quad b_{2,2} = -b_{2,8} = b_{8,8} = b_{3,3} = -b_{3,9} = b_{9,9} = -\frac{3EA}{5l^2}(u_a - u_b)$$

$$b_{2,4} = -b_{2,10} = -b_{4,8} = b_{8,10} = \frac{EI_p}{2l^2}(w'_a - w'_b), \quad b_{2,5} = -b_{5,8} = -b_{2,11} = b_{8,11} = b_{3,6} = -b_{6,9} = -b_{3,12} = b_{9,12} = \frac{EI_p}{2l^2}(\theta_a - \theta_b)$$

$$b_{2,6} = -b_{6,8} = b_{2,12} = -b_{8,12} = -b_{3,5} = -b_{5,9} = -b_{3,11} = b_{9,11} = -\frac{EA}{20l}(u_a - u_b), \quad b_{3,4} = -b_{3,10} = -b_{4,9} = b_{9,10} = \frac{EI_p}{2l^2}(v'_a - v'_b)$$

$$b_{4,4} = -b_{4,10} = b_{10,10} = -\frac{EI_p}{2l^2}(u_a - u_b), \quad b_{4,5} = -b_{5,10} = \frac{EI_p}{2l^2}(v_a - v_b) + \frac{EI_z}{4l}(v'_a + v'_b) - \frac{EI_y}{4l}(v'_a - v'_b)$$

$$b_{4,6} = -b_{6,10} = \frac{EI_p}{2l^2}(w_a - w_b) + \frac{EI_z}{4l}(w'_a - w'_b) - \frac{EI_y}{4l}(w'_a + w'_b), \quad b_{4,11} = -b_{10,11} = -\frac{EI_p}{2l^2}(v_a - v_b) - \frac{EI_z}{4l}(v'_a + v'_b) - \frac{EI_y}{4l}(v'_a - v'_b)$$

$$b_{4,12} = -b_{10,12} = -\frac{EI_p}{2l^2}(w_a - w_b) + \frac{EI_z}{4l}(w'_a - w'_b) + \frac{EI_y}{4l}(w'_a + w'_b), \quad b_{5,5} = b_{6,6} = b_{11,11} = b_{12,12} = -\frac{EA}{15}(u_a - u_b)$$

$$b_{5,6} = -b_{11,12} = -\frac{E(I_y - I_z)}{4l}(\theta_a - \theta_b), \quad b_{5,11} = b_{6,12} = \frac{EA}{60}(u_a - u_b), \quad b_{5,12} = -b_{6,11} = \frac{EI_p}{4l}(\theta_a - \theta_b)$$

$$b_{1,1} = b_{1,7} = b_{2,3} = b_{2,9} = b_{3,8} = b_{7,7} = b_{8,9} = 0$$

[参考文献]

- 1) 日本道路協会；道路橋示方書・同解説，昭48.2.
- 2) 三本木茂夫・吉村信敏；有限要素法による構造解析プログラム，コンピュータによる構造工学講座，I-1-B，培風館，昭49.4.
- 3) 堀井健一郎・斎藤進・川原睦人・森繁；骨組構造の大変形解析，土木学会論文報告集，191号，1971.7.
- 4) 三本木茂喜・大賀康晴；三重県生浦大橋の設計について，橋梁，1972.10.