

## I - 2 3-span 連続桁の動的支点反力

北海道大学 正 員 能 町 純 雄

北海道大学 正 員 角 田 与史雄

北海道大学 学生員 ○小田桐 直 幸

## 1 まえがき

本報告は3-span連続桁の走行荷重による動的応答問題を扱ったもので、その主眼は特に中間支点の動的反力を得た所にある。振動形解析法で連続桁の反力を求める場合、解の収束性に難が多いが、近似的手法により比較的収束の良い動的反力及びたわみを導いた。又、本方法は固体粘性を持つ桁の動的問題にも適応可能なため、以下の解析は固体粘性を有する3-span連続桁の問題として取り扱った。

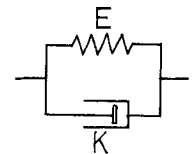
## 2 固体粘性

そのモデルとしては、応力 $\sigma$ とひずみ $\epsilon$ が次式で関係付けられるVoigtモデルを採用した。

$$\sigma = \left( E + K \frac{\partial}{\partial t} \right) \epsilon$$

ここで、 $E(\text{Kg/cm}^2)$ はヤング率、 $K(\text{Kg} \cdot \text{sec/cm}^2)$ はダッシュポットの定数である。これに依れば、桁の曲げ振動方程式として式(1)を得る。

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI \left( 1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] + A \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q(x, t) \quad \dots (1)$$

Voigt model  
Fig - 1

ここで

$$\begin{aligned} y &= \text{動的たわみ} \quad (\text{cm}), & I &= \text{桁の断面二次モーメント} \quad (\text{cm}^4), \\ A &= \text{桁の断面積} \quad (\text{cm}^2), & \rho &= \text{桁の単位体積質量} \quad (\text{Kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4), \\ q &= \text{荷重強度} \quad (\text{Kg/cm}) \end{aligned}$$

## 3 動的たわみ解

動的支点反力を導く前に、その誘導に必要な動的たわみを求める。3-span連続桁上を荷重 $P$ が走行している系を与系とし、これを基本系(0), (1), (2) (Fig-2参照)に分解してそのそれぞれについて動的たわみを求め重ね合わせるにより、与系の動的たわみ解を得る。

3-1 基本系(0)の動的たわみ $y_0$ 

中間支点を取り去った単桁の曲げ振動であり、式(1)を解析的に解いて次式で与えられる。

$$y_0(x, t) = \frac{2P}{A \rho l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x}{l}}{\theta_m} \int_0^t \exp \left[ -\frac{1}{2} \frac{KI}{A \rho} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 \lambda \right] \cdot \sinh \theta_m \lambda \cdot \sin \frac{m\pi}{l} v(t-\lambda) d\lambda \quad \dots (2)$$

ここで

$$\theta_m = \sqrt{\frac{1}{4} \left[ \frac{KI}{A \rho} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4 \right]^2 - \frac{EI}{A \rho} \left( \frac{m\pi}{l} \right)^4}$$

$$l = \text{桁の全長} \quad (\text{cm}), \quad v = \text{荷重の走行速度} \quad (\text{cm/sec})$$

3-2 基本系(1), (2)の動的たわみ $y_1, y_2$ 

これらはいずれも固定点に変動力が作用している系で、その動的たわみを次式で仮定した。

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= h_1(t) \cdot \bar{y}(x, a_1) \\ y_2(x, t) &= h_2(t) \cdot \bar{y}(x, a_2) \end{aligned} \quad \dots (3)$$

ここで $\bar{y}(x, a)$ は、桁の固定点 $a$ に単位荷重 $\bar{1}$ が載荷したときの静的たわみ曲線であり既知量である。一方、 $h(t)$ は時間のみに依存する応答倍率で、これを決定するために与系のふたつの中間支点のたわみが恒等的に0であることを用いて

$$Y_0(a_1, t) + h_1(t) \bar{Y}(a_1, a_1) + h_2(t) \bar{Y}(a_1, a_2) = 0$$

$$Y_0(a_2, t) + h_1(t) \bar{Y}(a_2, a_1) + h_2(t) \bar{Y}(a_2, a_2) = 0$$

とする。従って、上式を解いて得られた応答倍率を式(3)へ代入すれば、式(4)として基本系(1)、(2)の動的たわみが求められる。

$$Y_1(x, t) = -\frac{\bar{Y}(x, a_1)}{\Delta} \begin{vmatrix} Y_0(a_1, t) & \bar{Y}(a_1, a_2) \\ Y_0(a_2, t) & \bar{Y}(a_2, a_2) \end{vmatrix}$$

$$Y_2(x, t) = -\frac{\bar{Y}(x, a_2)}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{Y}(a_1, a_1) & Y_0(a_1, t) \\ \bar{Y}(a_2, a_1) & Y_0(a_2, t) \end{vmatrix}$$

… (4)

ここで

$$\Delta = \begin{vmatrix} \bar{Y}(a_1, a_1) & \bar{Y}(a_1, a_2) \\ \bar{Y}(a_2, a_1) & \bar{Y}(a_2, a_2) \end{vmatrix}$$

既に述べた様に、与系の動的たわみ  $y$  は式(2)と式(4)との和によって与えられる訳である。

#### 4 動的支点反力解

$X_1, X_2$  の誘導には仮想仕事の原理を適用する。

$X_1$  の場合について解析を進めると、基本系(1)から外力と内力を、仮想系(1)から変位とひずみを取って仮想仕事の方程式を立てると (Fig-3 参照)

$$\int_0^l \left[ -X_1(t) \delta(x-a_1) - A\rho \frac{\partial^2 Y_1(x, t)}{\partial t^2} \right] \bar{Y}(x, a_1) dx = \int_0^l \int_A \left[ -E \left( 1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2 Y_1(x, t)}{\partial x^2} \eta \right] \left[ -\frac{d}{dx} \bar{Y}(x, a_1) \eta \right] dA dx \quad \dots (5)$$

となる。右辺において断面内での積分は  $\eta$  についてのみ実行され断面二次モーメントを与え、続く  $x$  についての積分は、部分積分を2回実行し、境界条件(i)  $x=0, l$  で仮想系の曲げモーメント = 0, (ii)  $x=0, l$  で基本系のたわみ = 0, であることから、結局右辺は

$$\int_0^l \left( 1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial x} \right) X_1(x, t) \cdot EI \frac{d^2 \bar{Y}(x, a_1)}{dx^2} dx$$

となり、仮想系での次式の関係

$$EI \frac{d^2 \bar{Y}(x, a_1)}{dx^2} = \bar{I} \cdot \delta(x-a_1)$$

を用いれば、式(5)は

$$\begin{aligned} & -X_1(t) \bar{Y}(a_1, a_1) - A\rho \int_0^l \frac{\partial^2 Y_1(x, t)}{\partial t^2} \bar{Y}(x, a_1) dx \\ & = \left[ \bar{I} \cdot \left( 1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial x} \right) X_1(x, t) \right]_{x=a_1} \end{aligned}$$

と書き換えられる。この式の中で未知量は  $X_1$  のみであるから、 $X_1$  について解けば次式になる。

与系

基本系 (0)

基本系 (1)

基本系 (2)

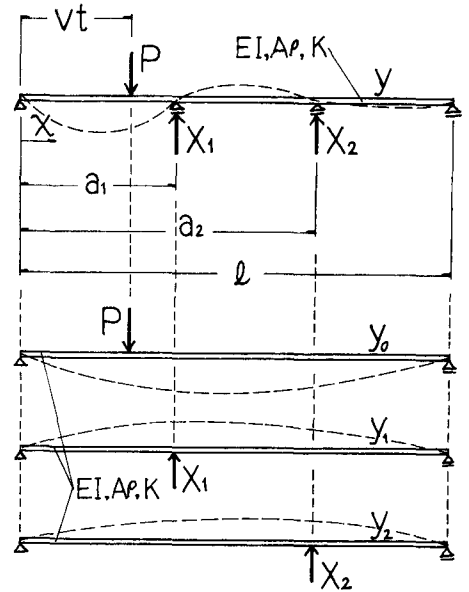


Fig - 2

基本系 (1)

仮想系 (1)

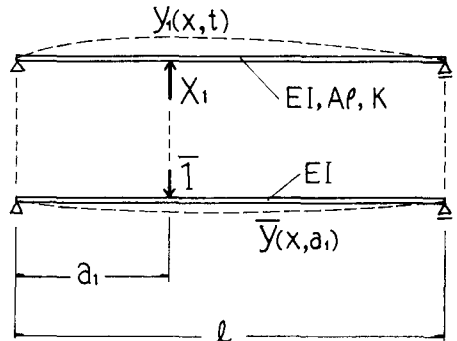


Fig - 3

$$X_1(t) = - \frac{A\rho \int_0^l \frac{\partial^2 Y(x, a_1)}{\partial t^2} \bar{Y}(x, a_1) dx}{\bar{Y}(a_1, a_1)} - \frac{[\bar{I}(1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial t}) Y(x, t)]_{x=a_1}}{\bar{Y}(a_1, a_1)}$$

これに、既に求めた動的たわみ  $y_1$  を代入して整理すれば式(6)として動的支点反力  $X_1$  を得る。

$$X_1(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{I}(1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial t}) Y_0(a_1, t) + \frac{A\rho \int_0^l \bar{Y}(x, a_1)^2 dx}{\bar{Y}(a_1, a_1)} \cdot \frac{d^2 Y_0(a_1, t)}{dt^2} & \bar{Y}(a_1, a_2) \\ \bar{I}(1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial t}) Y_0(a_2, t) + \frac{A\rho \int_0^l \bar{Y}(x, a_1)^2 dx}{\bar{Y}(a_1, a_1)} \cdot \frac{d^2 Y_0(a_2, t)}{dt^2} & \bar{Y}(a_2, a_2) \end{vmatrix} \quad \dots (6)$$

以上が  $X_1$  についての解析であるが、 $X_2$  についても同様で、基本系(2)と仮想系(2)を考慮して仮想仕事の式を立て  $X_2$  について解けば良い。結果を式(7)に示す。

$$X_2(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \bar{Y}(a_1, a_1) & \bar{I}(1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial t}) Y_0(a_1, t) + \frac{A\rho \int_0^l \bar{Y}(x, a_2)^2 dx}{\bar{Y}(a_2, a_2)} \cdot \frac{d^2 Y_0(a_1, t)}{dt^2} \\ \bar{Y}(a_2, a_1) & \bar{I}(1 + \frac{K}{E} \frac{\partial}{\partial t}) Y_0(a_2, t) + \frac{A\rho \int_0^l \bar{Y}(x, a_2)^2 dx}{\bar{Y}(a_2, a_2)} \cdot \frac{d^2 Y_0(a_2, t)}{dt^2} \end{vmatrix} \quad \dots (7)$$

## 5 数値計算例と結果

数値解析は次の諸元を有する I 型断面にモデル化した等径間鋼桁について行った。

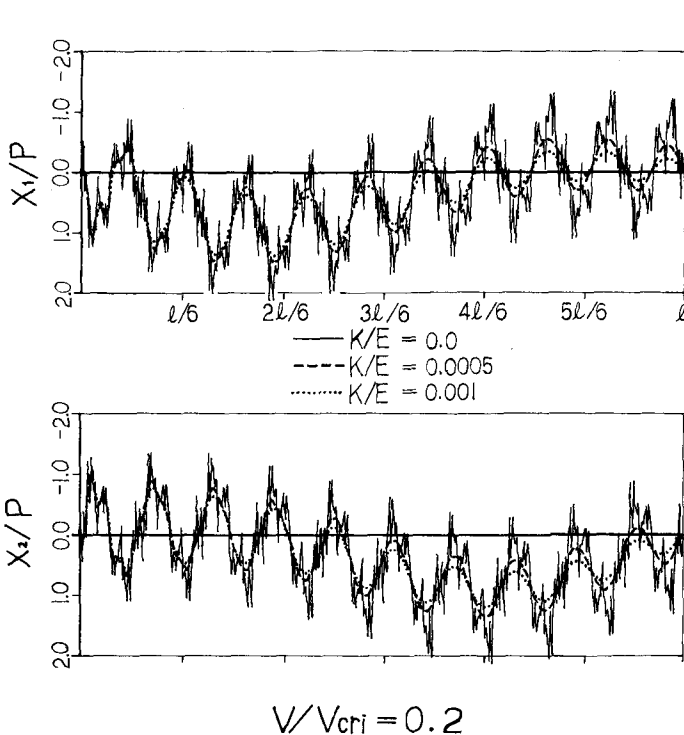


Fig - 4

$$I = 2164395 \quad (cm^4)$$

$$A = 393 \quad (cm^2)$$

$$\ell = 6000 \quad (cm)$$

$$a_1 = 2000 \quad (cm)$$

$$a_2 = 4000 \quad (cm)$$

単位長さ重量

$$= 3.08505 \quad (Kg/cm)$$

荷重の速度は与系の中間支点を取り去った単桁の危険速度  $V_{cri} = 19896 \quad (cm/sec)$  に対する比  $V/V_{cri}$  で表現した。粘性値のパラメータ  $K/E \quad (sec)$  は、その影響が図に現れる程度とし、0.0005, 0.001, 及び 0.0 (粘性無し) を採用した。

Fig-4 に  $V/V_{cri} = 0.2$  (143 Km/h) の時の支点反力影響線を、Fig-5 には 0.3 (215 Km/h) の時の支点反

力及びたわみ影響線を図示した。いずれにおいても粘性無しの場合の支点反力は静的値を中心に激しく変動するが、粘性が有ると高周波成分はカットされ、又粘性が大きいく程反力の変動幅を減少させる傾向にあることが分る。反力の応答倍率  $X_1/P$ ,  $X_2/P$  の最大値を種々の速度に対して図示したのが Fig-6 である。4

個の速度についてのみプロットしたが、速度一倍率関係の概略を知ることが可能である。図によると、粘性が無い桁の場合の反力の最大応答倍率は速度にはほぼ比例し、 $v/v_{cri}=0.2$ で既に2倍を超えている。粘性の存在は明らかに反力の応答倍率の低減をもたらし、 $X_1$ よりも $X_2$ に顕著である。これは、 $\max \cdot X_2$ が、 $\max \cdot X_1$ より時間的に遅れて生ずる事と、粘性の影響は時間の経過とともに大きく現れる事(式(2)参照)から明白である。

一方、各径間中央での動的たわみの応答倍率の最大値を Fig - 6 の速度について調べた所、Table - 1を得た。支点反力の変動の大きさに比較してたわみの変動は著しく小さいことが分る。

6 あとがき

連続桁の支点反力を近似的に静的たわみをバネとする変動力と見なし、仮想仕事及び重ね合わせの原理を用いて動的反力式を導いた。

同時に、桁の固体粘性を考慮し、反力の応答倍率、荷重の速度、粘性値の関係を図示することが出来た。反力の応答倍率はたわみのそれよりもかなり大きい。

(参考文献)能町、角田、小田桐；Voigt モデルによるはりの走行荷重に対する動的応答；土木学会第33回年次学術講演会講演概要集

| $\chi$         | 動的たわみの最大応答倍率                               |
|----------------|--------------------------------------------|
| $\frac{1}{6}l$ | 1.062 ( $V/V_{cri}=0.2$ )<br>( $K/E=0.0$ ) |
| $\frac{3}{6}l$ | 1.124 ( $V/V_{cri}=0.3$ )<br>( $K/E=0.0$ ) |
| $\frac{5}{6}l$ | 1.062 ( $V/V_{cri}=0.2$ )<br>( $K/E=0.0$ ) |

Table - 1

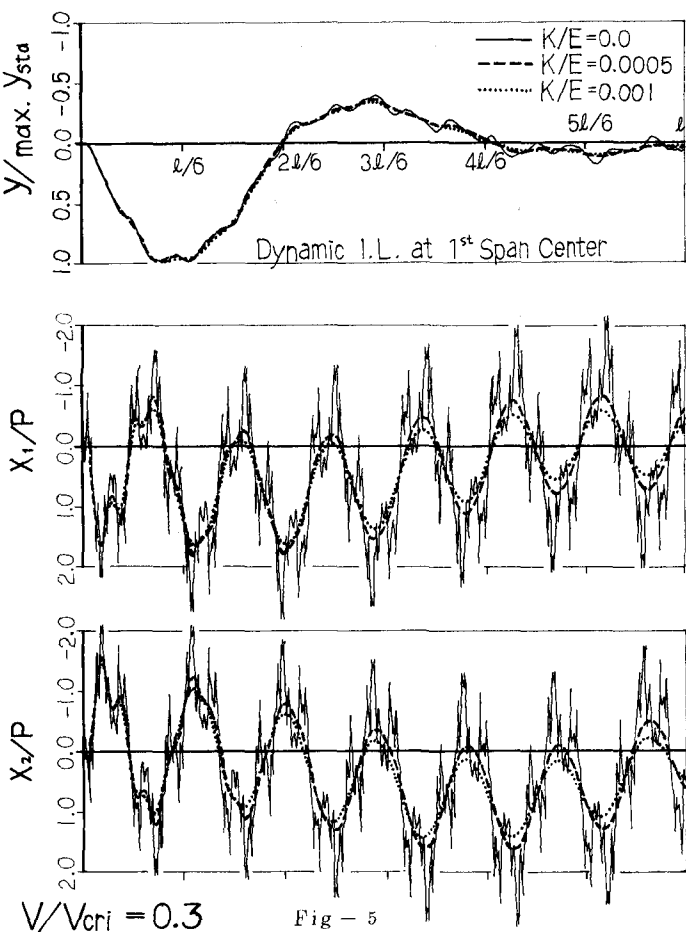


Fig - 5

$V/V_{cri} = 0.3$

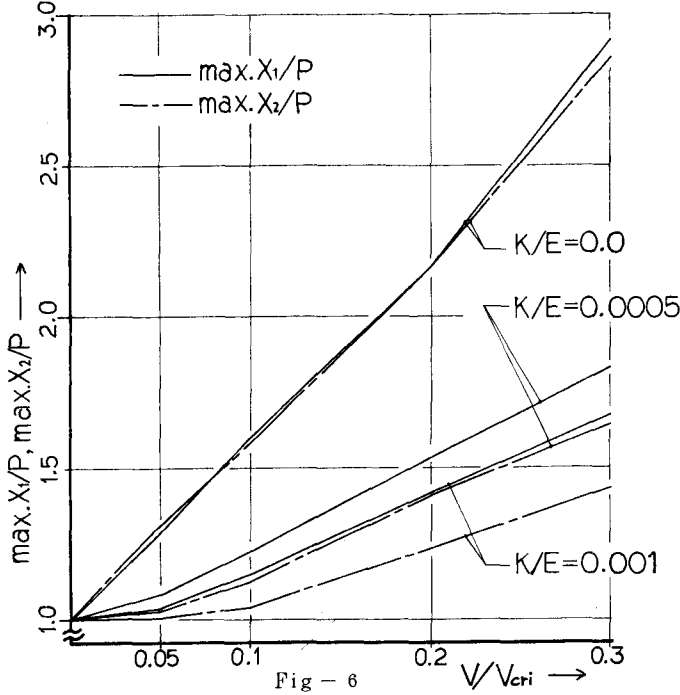


Fig - 6