

日本道路公団試験所 正員 酒井 秀昭
函館工業高等専門学校 正員 ○藤井 卓

1. まえがき

現行の鉄筋コンクリート構造物の設計法としては、設計荷重および材料強度・断面寸法等々を確定値として、許容応力度設計法・終局強度設計法・極限設計法等が行なわれており、いずれの場合も所要の安全度を確保して、社会的経済的に所要の役割をはたしていると考えられている。しかし、構造物に作用する実際の荷重は、設計荷重とは異なり一般にランダム値であり、また、構造物を構成する材料の強度および断面寸法もランダム値である。したがって、構造物の強度は不規則な確率現象であって、確定論に基づく現行設計法における安全度が必ずしも合理的とは言えず、安全度を確率論的な観点から検討する段階に来ていると思われる。本研究においては、構造物の曲げ強度を不規則現象としてとらえ、その破壊確率を安全度の指標として、現行の許容応力度法および終局強度法によって設計されたはりにおいて期待される安全度に検討を加えようとするものである。

鉄筋コンクリートはりの曲げ強度を確率論的に扱った研究としては、まずJ.F.Costelloらの研究¹⁾があげられる。Costelloらは材料強度の確率分布を正規分布と仮定して、長方形はりの強度が指定された値を下まわる確率、すなわち破壊確率を解析的に求める方法論を示した。D.E.Allen²⁾は、材料強度および有効高さ・鉄筋量などの断面寸法を、正規分布と仮定して長方形はりの終局曲げ強度をランダムサンプリングし、その結果 ACI規準の規定にしたがって設計された低鉄筋比の場合でも、コンクリートの圧壊によるはりの破壊が相当に生じること、およびコンクリート断面が小さい場合あるいは鉄筋量が大きい場合には、終局強度の変動が増大することなどを明らかにした。山中ら³⁾は材料強度を正規確率値として長方形およびT形はりを対象に、モンテカルロ法を用いて終局強度を求め、材料強度の期待値およびばらつきによる曲げ強度の変動および破壊形式に検討を加えた。この結果材料のばらつき特に鉄筋の降伏強度のばらつきが、実用される低鉄筋比において、曲げ強度の変動に大きく影響すること、またACI規準に規定される最大鉄筋比以下においても、はりの圧縮破壊が相当に生じingことを明らかにした。また、山根ら⁴⁾は作用荷重および強度の構成要因を正規定常確率過程として、破壊確率を解析的に求める算定式を提案し、これを単鉄筋長方形はりに適用して、鉄筋およびコンクリート強度の変動が破壊確率に与える影響を検討した。この結果、鉄筋比の増大とともに圧縮破壊が支配的となり、この傾向はコンクリート強度の変動の大きい場合に著しいこと、また、中央安全率を大きくとる程、破壊確率は小さくなるが、その値はコンクリート強度の変動が大きい程、大きくなることなどがわかった。

本研究においては支間中央に一個の集中荷重および支間全長に等分布死荷重をうける単鉄筋長方形断面を有する単純はりを対象とし、はりを構成する材料強度を確率値としてはりの曲げ強度を、モンテカルロ法により求める。これによって、現行設計法により設計されたはりの安全度と材料強度のばらつきの程度、および鉄筋比等と破壊確率との関係を検討し、また、コンクリートの圧壊によるはりの破壊状態についても考察を加える。

2. 破壊確率の計算

部材断面強度を構成する材料強度等の確率値を、 n 成分を有するランダムベクトル $X (X_1, X_2, \dots, X_n)$ とすれば、確率密度関数は次式で表わされ

$$f_X(X) = f(x_1, \dots, x_n) \quad (1)$$

部材強度 Y が、 X の関数で表わされるときは次式となる。

$$Y = \Phi(X) \quad (2)$$

したがって、部材強度 Y が特定の値 y を下まわる確率、すなわち y の非超過確率(破壊確率)は、

$$P_f = P_r(Y < y) = P_y(y) = \int_D \cdot \int f_X(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \quad (3)$$

ここに、 $F_y(y)$: y の分布関数、 $D : \Phi(x_1, \dots, x_n) < y$ 、で求められる¹⁾ (3) 式は領域 D についての多重積分であるから、ランダムベクトル X に対して $\Phi(x_1, \dots, x_n) < y$ なる条件を満足する密度関数 $f_y(y)$ の面積を求める問題に帰着され次式で表わされ、したがってモンテカルロ法が適用できる。

$$P_f = \int_0^y f_y(y) dy \quad (4)$$

ところで、現行設計法で設計された構造物の実際の安全度を破壊確率で表わせば $10^{-3} \sim 10^{-6}$ といわれ⁵⁾、上記の方法により直接破壊確率を求めようとするれば、 $10^{+3} \sim 10^{+6}$ の数倍の試行回数が必要となり適当でない⁶⁾。これはいわゆる tail 問題であって、いくつかの解決方法が提案されている^{7,8,9,10)} が、ここでは次に示す方法による。

強度の密度関数 $f_y(y) = f_{y_1}(y)$ は領域 $0 \leq y < +\infty$ で定義されており、 $P_r(0 \leq y < +\infty) = 1.0$ である。いま、 $y_1 > y$ なる y_1 を定めれば、

$$P_r(0 \leq y < y_1) = \int_0^{y_1} f_{y_1}(y) dy \quad (5)$$

ここで、 $P_r(0 \leq y \leq y_1) = 1.0$ となる新しい密度関数 $f_{y_2}(y)$ を定義し、ランダムベクトル $X(x_1, \dots, x_n)$ に対して $\Phi(X) < y_1$ となるような重みづけを行ない、領域 $0 \leq y < y_1$ に $y_2 < y_1$ なる値 y_2 を定め、

$$P_r(0 \leq y < y_2) = \int_0^{y_2} f_{y_1}(y) dy \int_0^{y_2} f_{y_2}(y) dy \quad (6)$$

以下同様にして、 $P_r(0 \leq y \leq y_{n-1}) = 1.0$ で定義される $f_{y_n}(y)$ の領域 $0 \leq y \leq y_{n-1}$ に y_n があれば、

$$P_r(0 \leq y < y_n) = \int_0^{y_1} f_{y_1}(y) dy \cdots \int_0^{y_n} f_{y_n}(y) dy = \prod_{i=1}^n \int_0^{y_i} f_{y_i}(y) dy \quad (7)$$

で表わすことができる。また、一般に密度関数 $f_{y_1}(y)$ の定義領域 $0 \leq y \leq y_{1-1}$ における全試行回数を N_1 とし、 $\Phi(X) < y_1$ を満す回数を N'_1 とすれば、 $\int_0^{y_1} f_{y_1}(y) dy$ は N'_1/N_1 に等しいから、破壊確率は次式で表わされる。

$$P_f = P_r(0 \leq y < y_n) = \prod_{i=1}^n \int_0^{y_i} f_{y_i}(y) dy = \prod_{i=1}^n N'_i/N_i \quad (8)$$

ここに、 $f_{y_1}(y)$: $i=1$ のとき、 $P_r(0 \leq y < +\infty)$ で、また、 $i \geq 2$ のとき、 $P_r(0 \leq y < y_{i-1})$ で定義される密度関数、 N_i : $f_{y_i}(y)$ の定義領域における試行回数、 N'_i : 試行回数 N_i のうち $\Phi(X) < y_i$ を満す回数を示す。

ところで、単鉄筋長方形断面を有する単純ばりが支間中央に集中荷重をうけ、支間全長に等分布死荷重をうける場合の、支間中央における荷重に変換した部材強度は、断面が鉄筋の降伏による引張破壊およびコンクリートの圧壊による圧縮破壊の場合に対して、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_t(\sigma_{sy}, \sigma_{cb}, A_s, b, d, w, L) \\ Y_c &= Y_c(\sigma_{cb}, E_s, \epsilon_u, A_s, b, d, w, L) \end{aligned} \quad (9)$$

ここに、 σ_{sy} : 鉄筋の降伏強度、 σ_{cb} : コンクリートの圧縮強度、 A_s : 鉄筋断面積、 b : はり断面の幅、 d : はりの有効高さ、 E_s : 鉄筋の弾性係数、 ϵ_u : コンクリートの終局圧縮ひずみ、 w : 死荷重、 L : 支間
実際の強度は、 $Y = \min(Y_t, Y_c)$ で与えられる。なお、終局曲げ強度は、鉄筋を完全弾塑性体と仮定して計算でき^{11, 12)}、また、鉄筋の降伏強度およびコンクリートの圧縮強度を、調査結果^{13, 14, 15)} から正規分布とする。したがって、部材強度 Y のランダムサンプリングを行なうことにより、(8)式から破壊確率 P_f が求められる。

3. 計算手順

支間中央に集中荷重をうける単純ばりに、所要の安全度を確保して許容される荷重は、許容応力度法および終局強度法で設計された場合、それぞれ次式で求まる。

$$Y_w = 4(M_r - M_d) / L \quad (10)$$

ここに、 M_r : 断面の抵抗モーメント、 M_d : 死荷重による曲げモーメント

$$Y_u = 4(M_u - \gamma_d \cdot M_d) / \gamma_L / L \quad (11)$$

ここに、 M_u : 断面の終局曲げモーメント、 γ_d , γ_L : それぞれ死・活荷重係数

一方、材料強度をランダム値とした場合のはりの実際の強度は、確率値であり次式で表わされる。

$$Y^* = 4(M_u^* - M_d) / L \quad (12)$$

したがって、それぞれの方法で設計されたはり安全であるための条件は、 $Y < Y^*$ ($Y = Y_w$ または Y_u) で

示めされる。したがって、鉄筋の降伏によるはりの破壊確率は、次式で求められる。

$$P_{ft} = N'_t / N \quad (13)$$

ここに、 N : 試行回数、 N'_t : ($p < p_b$ かつ $Y > \bar{Y}$) を満す Y^* の個数、 p : A_s / bd 、 p_b : つりあい鉄筋比。同様にしてコンクリートの圧壊によるはりの破壊確率は、次式により求められる。

$$P_{fc} = N'_c / N \quad (14)$$

ここに、 N'_c : ($p > p_b$ かつ $Y > \bar{Y}$) を満す個数。ところで、前述のとおり (13) (14) 式の値は極わめて微小なため非常に多くの試行を必要とする。したがってここでは (8) 式を用いるが、この場合、 P_f ($0 \leq y \leq y_1$) = 1.0 となる新たに定義された密度関数 $f_{y1+1}(y)$ に対して、 $\Phi(X) < y_1$ となるような重みづけを行なう。すなわち、鉄筋およびコンクリートの確率値を次式で与える場合、

$$\sigma_{sy} = S_{ds} \cdot \cos(2\pi \cdot r_1) \sqrt{-2 \ln(r_2)} + E_{xs} \quad (15)$$

$$\sigma_{cb} = S_{dc} \cdot \cos(2\pi \cdot r_3) \sqrt{-2 \ln(r_4)} + E_{xc} \quad (16)$$

ここに、 E_{xs} 、 E_{xc} : それぞれ鉄筋およびコンクリート強度の期待値、 S_{ds} 、 S_{dc} : それぞれ鉄筋およびコンクリート強度の標準偏差、 r_1 、 r_2 、 r_3 、 r_4 : (0, 1) 間の Weibull の一様分布¹⁶⁾ より決る値。

上式において $r_1 = 0.25 \sim 0.75$ 、 $r_2 = 0$ をとらせることにより引張破壊を、また、 $r_3 = 0.25 \sim 0.75$ 、 $r_4 = 0$ をとらせることにより圧縮破壊を、それぞれ多発させるための重みづけが可能である。また、はりの破壊確率 P_f は、引張破壊確率 P_{ft} と圧縮破壊確率 P_{fc} の和として求められる。

4. 結果および考察

数値計算には次に示す値を入力として用いた。すなわち、鉄筋の降伏強度および許容応力度を、それぞれ $\sigma_{sy} = 3000$ ㎏ および $\sigma_{sa} = 1800$ ㎏、コンクリートの圧縮強度および許容応力度を、それぞれ $\sigma_{cb} = 240$ ㎏ および $\sigma_{ca} = 80$ ㎏ とし、鉄筋およびコンクリート強度の変動係数を、それぞれ $V_B = 4, 8, 12$ および $V_C = 10, 15, 20, \%$ とし、支間 10m、断面の幅および有効高さを、それぞれ 55、101cm、実鉄筋比とつりあい鉄筋比の比 p/p_b を 21.2, 30.0, 37.0, 44.6, 53.2, 62.5, 75.0% とし、一定とする場合は、21.2% を用いた。また、死荷重係数 γ_d を 1.4 とし、活荷重係数 γ_L は 1.4 から 2.5 (2.2) まで 0.1 キザミとした。

(1) 現行設計法における安全度と破壊確率

材料強度の変動と P_f との関係を図 1 および Fig. 2 に示す。 V_B が大きい場合は、 V_C の変化にかかわらず同一の γ_L に対して、 P_f はほぼ一定値をとるが、 V_B が小さくなる程 V_C が大きくなるにしたがって P_f は大きくなる傾向がみられる。また、 V_C が小さい程 P_f に対する γ_L の鋭敏度は大きくなり、 V_B による影響は少ない。

これらのことは、現行設計法で設計されたこの場合のはりの p/p_b が 21.2% と十分に低鉄筋比であり V_B が大きい領域では、降伏破壊が支配的であり、 V_C の影響をほとんどうけないためと思われる。一方、 V_B 、 V_C がともに小さい領域では、当然ながら P_f は小さいが、 V_C が大きい領域においては P_f は大きくなりこの場合の破壊形式としては、コンクリートの圧壊であることが推測される。なお、この例では現行許容応力度法における安全度は、 P_f をパラメータとして、ほぼ終局強度法における $\gamma_d = 1.4$ 、 $\gamma_L = 1.7$ に相当することがわかる。

γ_L と P_f の関係を V_B 、 V_C をパラメータとして示した

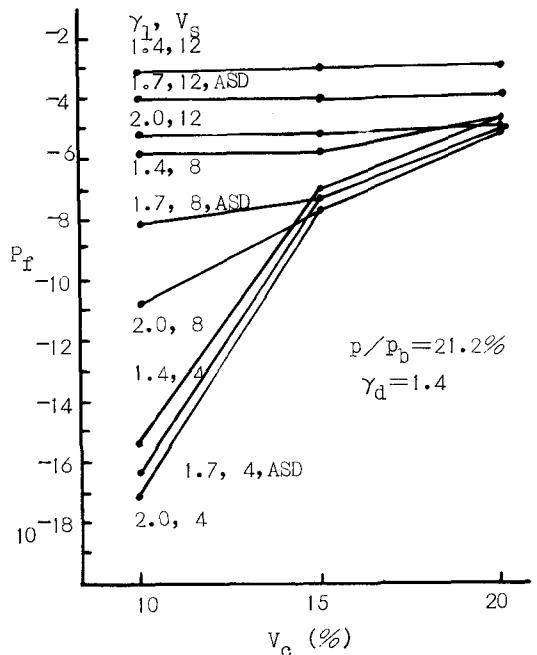


Fig. 1

のがFig. 3であるが、 γ_1 が1.4の場合 P_f のオーダーは 10^{-15} から 10^{-3} まで、また、 γ_1 が2.3の場合では 10^{-17} から 10^{-5} まで変動している。この例の場合、降伏破壊が支配的であるが、一例として $V_c=10\%$ と固定した場合、 V_s の4, 8, 12%に対する $\gamma_1=1.7$ に対応する P_f のオーダーは 10^{-16} , 10^{-8} , 10^{-4} と倍増することが知られる。このことは終局強度法における安全度の指標である γ_1 の同一値に対しても、材料強度の変動によって P_f が大きく変化することを示している。したがって、同一の荷重係数に対しても材料強度の変動によっては、所要の安全度を確保できない場合もあり、材料強度の品質管理の重要性があらためて認識される。

(2) 鉄筋比と破壊確率および破壊形式

Fig. 4は実鉄筋比とつりあい鉄筋比の比率と P_f との関係を示したものである。すなわち、 P_f は p/p_b の増減によって変動し、一般に p/p_b に対する P_f の極小値が存在すると推察される。また、同一の γ_1 に対しても V_c が変化すれば P_f は変動し、たとえば、 $\gamma_1=1.7$ の場合 p/p_b が20%以下では、 P_f はほぼ 10^{-4} 程度のオーダーであり、 V_c の影響はみられないが p/p_b が75%の場合では、 V_c の10, 15, 20%に対して P_f はそれぞれ 10^{-5} , 10^{-4} , 10^{-3} のオーダーとなり、 V_c の変動の影響の大きいことが知られる。またFig. 4において、各々の曲線には降伏および圧壊による破壊確率が等しい p/p_b の値が存在し、当然ながらその点よりも p/p_b の大きい領域では、その P_f において圧壊が支配的となる。また、 γ_1 にかかわりなく V_c が10%程度以下の場合、 p/p_b の75%以内 P_f では降伏破壊が支配的となることが推察される。なお、 γ_1 を大きくとる程 V_c の変化の影響が大きく、 $\gamma_1=2.3$ で $V_c=20\%$ の場合、 $p/p_b \leq 0.75$ の全域にわたって圧縮破壊が支配的となっている。

V_s および V_c の特定値の場合について、 p/p_b と γ_1 との関係において、 P_f におけるコンクリートの圧縮による破壊確率の割合を、等圧壊率線で示したのがFig. 5である。同一の γ_1 に対して p/p_b の値によって圧壊の割合が、大きく異なることが示めされている。また、 γ_1 が1.7の場合、 p/p_b が20%および75%のとき、圧壊の割合はそれぞれ11%および99.1%となり、また、 p/p_b が20~30%の低鉄筋比の領域においても、前述のように γ_1 を大きくとるにしたがって、圧壊の割合は増大する傾向にある。また、Fig. 5には $V_c=15\%$ の場合について、圧壊率が5%および95%の値を破線で示した。なお、 $V_c=10\%$ の場合の圧壊率は、極わめて小さいため図示されていない。Fig. 5から知られるように、当然ながら V_c が圧壊率に大きく影響すると言える。これはFig. 4からも容易に推測されることである。

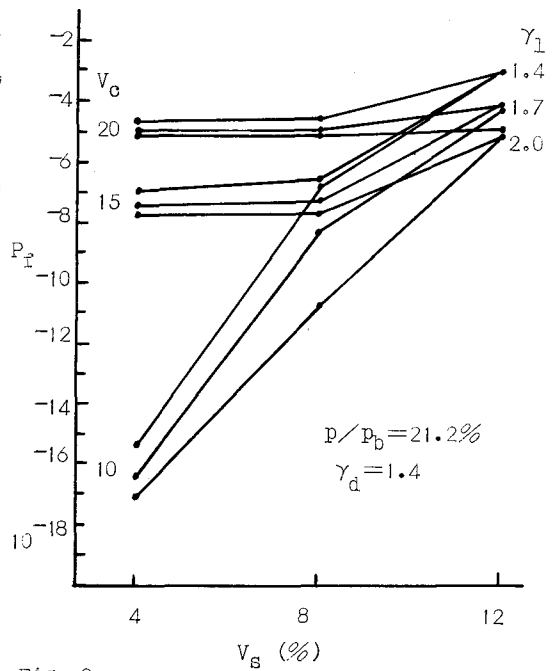


Fig. 2

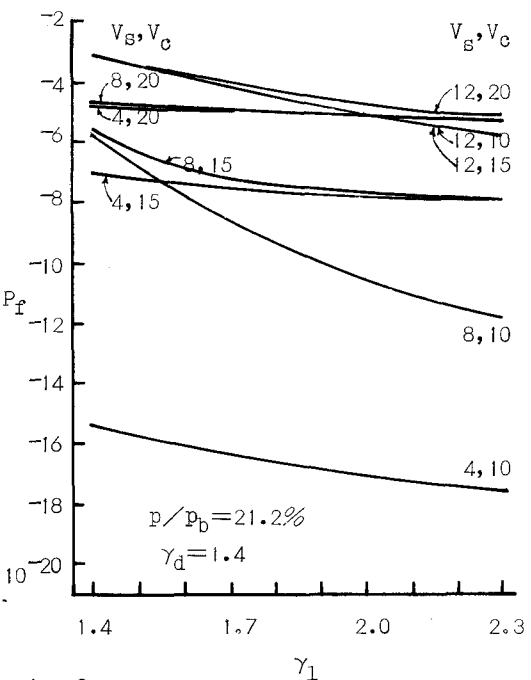


Fig. 3

部材強度の確率密度関数の末端部において、強度が小さくなる程コンクリートの圧縮破壊による圧壊率が高くなることは、安全度を十分に確保しない場合においても知られている^{1,2,3)}が、安全度を大きくとる程、また、 V_c が大きくなる程、この傾向が強くなることがわかる。これらは圧壊率の増大がコンクリート強度の低下にはほぼ比例したつりあい鉄筋比の減少によって生じること、および強度分布の末端に近い程、圧縮支配型の破壊形式が増大することによって説明できる。

以上のことから、降伏破壊を保証する場合、 p/p_b のみでなく材料強度の変動をも考慮した規定の必要なことを示唆するものであり、また、施工の面ではコンクリート強度の変動を小さくすることが必要となり、この例の場合では10%程度以下が一応の目安と思われる。

5. むすび

本研究は現行の確定論的な設計法である許容応力度法、および終局強度法において付与される安全度を、構造物の強度をランダム値とした場合の破壊確率の概念との関連において、材料強度の変動、鉄筋比の影響および破壊形式などを、検討したものである。扱った対象は支間中央に集中荷重をうける単鉄筋長方形断面を有する単純ばりの支間中央断面であり、断面寸法等もまた特定の場合である。したがって、ここでえられた結果は定量的には扱いにくいが一応、一般的な傾向を示すものと思われる。なお、結論として以下のことが言えよう。

- (1) γ_1 を大きくとる程 P_F は小さくなるが、同一の γ_1 に対する P_F は p/p_b 、 V_B 、 V_c によって変動する。
- (2) p/p_b が小さい通常の低鉄筋比の設計の場合 V_B の大きい領域では、 V_c の変化に関係なく同一の γ_1 に対する P_F はほぼ等しいが、 V_B が小さい領域においては、 V_c が大きくなる程 P_F は増大する。
- (3) γ_1 、 V_c および p/p_b が大きい程、また、 V_B が小さい程圧壊率は増大する。
- (4) γ_1 が大きい程圧壊に対する V_c の変化の影響は大きく、 V_c の大きい領域で γ_1 を大きくとった場合、 $p/p_b \leq 0.75$ の全域で圧壊が支配的となる。
- (5) 本例の場合許容応力度法により付与される安全度は、ほぼ終局強度法における $\gamma_d=1.4$ 、 $\gamma_1=1.7$ の場合に相当する。

本研究では荷重を確定値とし、はりの強度のみを確率値として扱った。しかし、荷重それ自体がランダムな不規則現象であり、破壊確率に与える影響の大きいことは容易に推測される。したがって、荷重

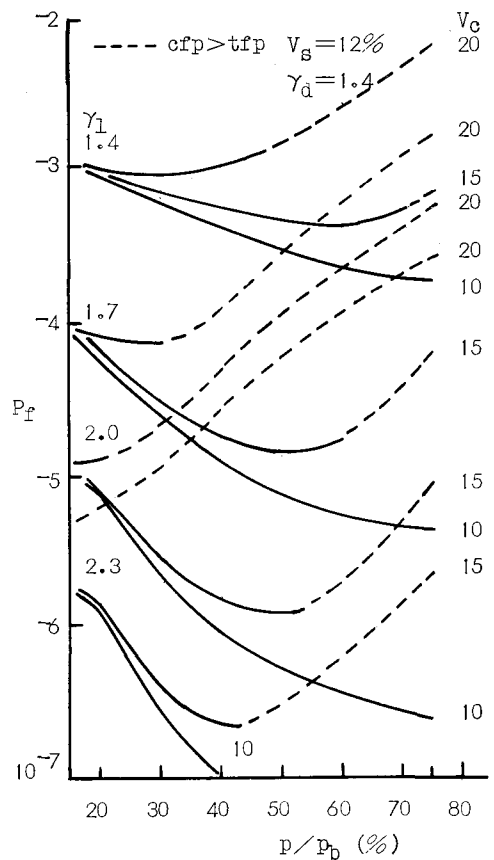


Fig. 4

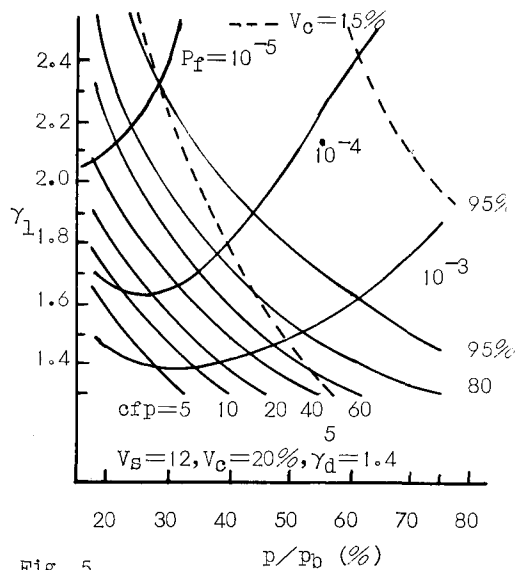


Fig. 5

の確率分布あるいは実働荷重のモデル化など、今後の検討が必要と思われる。

参 考 文 献

- 1) Costello, J.F. and K.Chu: Failure probabilities of reinforced concrete beams, J. of Str. Div., ASCE, vol.95, No.ST10, pp2281~2304, Oct.1969.
- 2) Allen, D.E.: Probabilistic study of reinforced concrete in bending, J. of ACI, vol.67, No.12, pp989~993, Dec.1970.
- 3) 山中治、藤井卓: 鉄筋コンクリートはりの曲げ強度に関する確率論的考察、土木学会北海道支部論文報告集、No.31、pp225~229、1975年2月、
- 4) 山根和弘、白木渡、高岡宣善: 確率過程による鉄筋コンクリートはりの信頼性解析、土木学会第31回年次学術講演会講演概要集、第1部、pp384~385、1976年10月、
- 5) Freudenthal, A.M.: Critical appraisal of safety criteria and their basic concepts, Preliminary publication of 8th Congress IABSE, pp13~24, 1968.
- 6) 土木学会編: 建造物の安全性・信頼性、p21, 1976、
- 7) Ang, A.H.S. and M.Amin: Safety factors and probability in structural design, J. of Str. Div., ASCE, vol.95, No.ST7, pp1389~1405, July 1969.
- 8) Cornell, C.A.: A probability-based structural code, J. of ACI, vol.66, No.12, pp947~985, Dec.1969.
- 9) Hoshiya, M.: Extended Monte Carlo method in structural reliability, 土木学会論文報告集第220号、pp143~148、1973年12月、
- 10) 沢田勉、宇都宮英彦: 層別サンプリングによる破壊確率の算定、土木学会論文報告集、第237号、pp1~9、1975年5月、
- 11) Building code requirements for reinforced concrete (ACI 318-68), 1963.
- 12) 横道英雄: コンクリート橋、技報堂、1967、
- 13) 宮崎修輔: 材料の力学的特性 (その1) -鉄筋-, 土木学会コンクリート・ライブラリー第41号、pp23~29、1975年11月、
- 14) 藤井卓、太田利隆、前川静男: シミュレーションによる既設鉄筋コンクリート橋の耐荷力の評価、土木学会論文報告集、第226号、pp73~80、1974年6月、
- 15) 藤井卓、松尾徹郎、太田利隆: 既設鉄筋コンクリート橋の材料特性について、土木学会第30回年次学術講演会講演概要集、第5部、pp224~225、1975年10月、
- 16) 山内二郎、森口繁一、一松信: 電子計算機のための数値計算法 (II)、培風館、1972、