

大磯橋(デビダグ方式四径間連続突げたプレストレスト
コンクリート道路橋)のクリープによる不静定力について

北海道開発局 正員 西本 藤彦
 函館開発建設部 渡辺和信
 函館工業高等専門学校 正員 外崎 忍

1 まえがき

大磯橋は国道228号線松前町地内に架設されたデビダグ方式四径間連続突げたプレストレストコンクリート橋である。(函館開発建設部所管、図-1参照)この橋は四年間にわたって分割施工され52年度完成予定のものである。この形式の橋梁の施工方法は周知のように架設作業車により施工された部材を足場にして順次突げたを延ばして行く工法で施工ブロック毎にコンクリートの材令は異なる。このコンクリートの材令の差によって各柱、はり毎にクリープ変形に差異を生じ、これより西端支桌および各支桌間中央ヒンダには新しく不静定力が発生する。これら不静定力の影響は従来の設計法では検討されていなかったが、大磯橋のように支間100mにも達する大橋梁で、しかもコンクリート工事の期間が三年間にもおよび、材令差が著しく大きい場合、クリープによる不静定力ほどの程度のものであるか、またそれが設計上の安全度にどの程度の影響があるか興味ある問題である。本論文ではこの不静定力の一解法について述べ、大磯橋の計算結果を考察するものである。

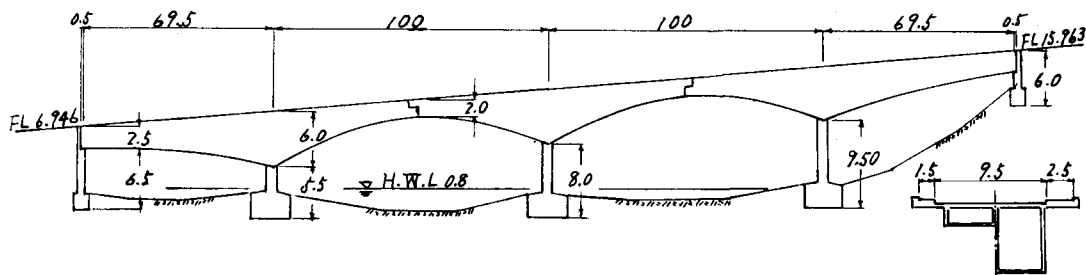


図-1 大磯橋一般図

2 架設順序とクリープによる不静定力の発生の仕組み

コンクリートのクリープにより発生する不静定力は施工方法によって異なるものであり、大磯橋でとられた施工方法とそれの場合のクリープによる不静定力の発生の仕組みについて説明する。施工方法は図-2~5に示すように四段階よりなる。クリープ解析の対象となるのはそれぞれ図-2,3(a)、図-4,5で示される構造系体であり、これが次の段階の構造系体となる期間までクリープによって不静定力を発生し続ける。例へば図-2では(b)に示す左端に不静定力が発生する。第四段階で構造系体が完成するがこの状態からは時間が無限大まで不静定力が増え続ける。この他に静荷重(舗装、高欄)によっても新しくクリープによる不静定力が発生する。

図-2,3(b)はクリープ変形のみに対し支桌および中央ヒンダの拘束をとり去って考えたものでこれはコンクリート自重曲げモーメント、プレストレスによるモーメント(偏心モーメントおよび二次モーメント)、第二段階以降では前段階で発生したクリープによるモーメントおよび柱頭部たわみ角によるクリープ変形を示すものである。中央にヒンダをもつ径間は両端の突げたの力の作用状態、断面、施工時期が同じでないのたわみに食い違いを生ずるが、自重+プレストレスモーメントによるたわみは上向きで柱頭部たわみ角によるものと前段階までのクリープによるたわみは上下両方の場合があり食い違う状態は一概に言ひないが、端支間では端部寄りの

区間でプレストレスによる負のモーメントの影響が大きく下向きに変位を生ずる。実際は支点の変位はなく中央ヒンジでは突げた端の変位は同じであるから新しく生じた不静定力によって実際の状態に戻すものとする。(新しく生じた不静定力によってスクリープ変形が生ずるので弾性的に戻すという意味ではない)

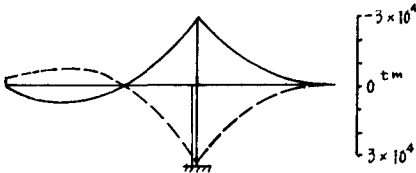


図-2 (a) 第一段階曲げモーメント

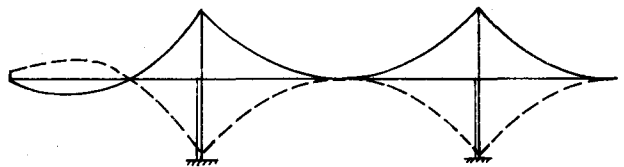


図-3 (a) 第二段階曲げモーメント



図-2 (b) 第一段階変位

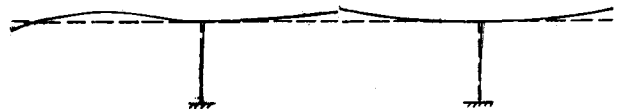


図-3 (b) 第二段階変位

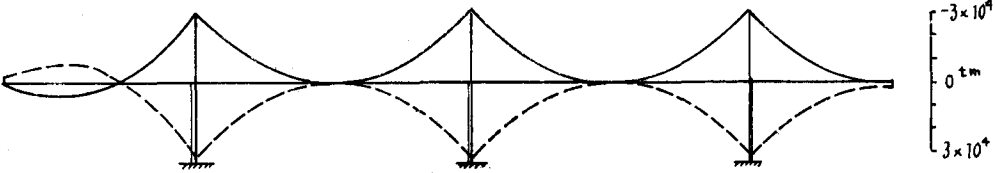


図-4 第三段階曲げモーメント

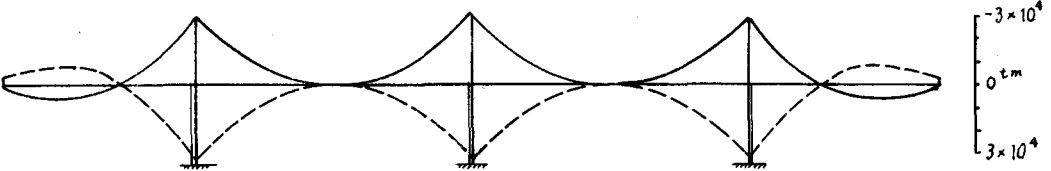


図-5 第四段階曲げモーメント

註) 図-2, 3 (a) および 図-4, 5
 ————— コンクリート自重による曲げモーメント
 - - - - - プレストレスによるモーメント

3 構造解析

構造解析は次の事項を仮定する。1) コンクリートの弾性係数は一定、2) 鉄筋やPC鋼の拘束の影響は無視、3) クリープ関数は $\varphi_t = k \varphi_n (1 - e^{-\lambda t})$ 、ここで φ_n は $t = \infty$ におけるクリープ係数、 t は経過時間、 λ はクリープ速度に関する係数である。また k は載荷時期による補正係数で図-6より次のようになる。

$k = 1$ のとき (プレストレスコンクリート設計施工指針より $\sigma' / \sigma_{\infty} = 0.75$ のとき、 σ' : そのブロックのコンクリートの圧縮強度、 σ_{∞} : そのコンクリートの最終圧縮強度) から t_0 日経過後に載荷したとすると、

$$\varphi_t = \varphi_n (1 - e^{-\lambda(t+t_0)}) - \varphi_n (1 - e^{-\lambda t_0}) = \varphi_n e^{-\lambda t_0} (1 - e^{-\lambda t})$$

$$\therefore k = e^{-\lambda t_0}$$

大橋の場合の載荷する時期は前述のある構造系体ができた時点とする。

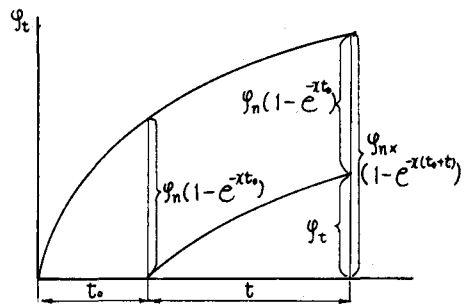


図-6 クリープ関数

構造解析は大橋は径間であるがもっと多径間の橋梁にも適用できるような任意径間について考える。

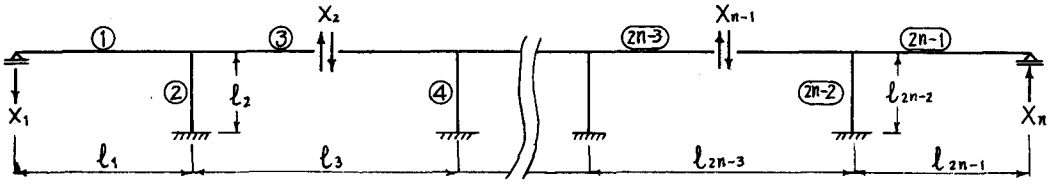


図-7 構造全体と不静定力 註, ④ 部材番号

不静定力 X_1, X_2, \dots, X_n および寸法は図-7に示すようである。これら X_1, X_2, \dots, X_n を未知数とする微分方程式を導く。 t 時間経過後の Δt 時間に生じた不静定力作用点のたわみの釣り合い式は(1)で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} f_{11}dX_1 + f_{12}dX_2 + \dots + f_{1n}dX_n + a'_{11}X_1d\varphi + a'_{12}X_2d\varphi + \dots + a'_{1n}X_nd\varphi + b'_1d\varphi &= 0 \\ f_{21}dX_1 + f_{22}dX_2 + \dots + f_{2n}dX_n + a'_{21}X_1d\varphi + a'_{22}X_2d\varphi + \dots + a'_{2n}X_nd\varphi + b'_2d\varphi &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ f_{n1}dX_1 + f_{n2}dX_2 + \dots + f_{nn}dX_n + a'_{n1}X_1d\varphi + a'_{n2}X_2d\varphi + \dots + a'_{nn}X_nd\varphi + b'_nd\varphi &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

1, 2, ..., n 行目の式はそれぞれ X_1, X_2, \dots, X_n の力の作用方向のたわみの釣り合い式である。 $f_{ij}dX_j$ は t 時間経過後の Δt 間に生じた不静定力 dX_j による X_i 方向のたわみである。 f_{ij} は単位の力 $X_j = 1$ による X_i 方向のたわみである。 $a'_{ij}X_jd\varphi$ は t 時間経過時まで生じた不静定力 X_j によって Δt 間に X_i 方向に生ずるクリープによるたわみである。次に $b'_id\varphi$ は各径間の構造系体が完成した時の自重、プレストレス、前段階まで生じたクリープによるモーメントによって t 時間経過後の Δt 間に X_i 方向に生ずるクリープによるたわみである。式(1)を変形すると次のように X_1, X_2, \dots, X_n に関する n 元の連立微分方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} f_{11} \frac{dX_1}{d\varphi} + f_{12} \frac{dX_2}{d\varphi} + \dots + f_{1n} \frac{dX_n}{d\varphi} + a'_{11}X_1 + a'_{12}X_2 + \dots + a'_{1n}X_n + b'_1 &= 0 \\ f_{21} \frac{dX_1}{d\varphi} + f_{22} \frac{dX_2}{d\varphi} + \dots + f_{2n} \frac{dX_n}{d\varphi} + a'_{21}X_1 + a'_{22}X_2 + \dots + a'_{2n}X_n + b'_2 &= 0 \\ \dots &\dots \dots \\ f_{n1} \frac{dX_1}{d\varphi} + f_{n2} \frac{dX_2}{d\varphi} + \dots + f_{nn} \frac{dX_n}{d\varphi} + a'_{n1}X_1 + a'_{n2}X_2 + \dots + a'_{nn}X_n + b'_n &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots (2)$$

式(2)をマトリックスで表示すると次のようになる。ただし $D = d/d\varphi$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} DX_1 \\ DX_2 \\ \dots \\ DX_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \dots & a'_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \dots \\ b'_n \end{bmatrix} = 0 \dots \dots (3)$$

または $F \frac{dX}{d\varphi} + A'X + B' = 0$

ここで $A = -F^{-1}A'$ $B = -F^{-1}B'$ とすると式(3)の一般解は次のようになる。

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & \gamma_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 \varphi} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 \varphi} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n \varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \dots \\ C_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \dots (4)$$

ここで $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ はマトリックス A の固有値であり、 $(1, \gamma_{21}, \gamma_{31}, \dots, \gamma_{n1})$ は λ_1 に $(1, \gamma_{22}, \gamma_{32}, \dots, \gamma_{n2})$ は λ_2 に、 $(1, \gamma_{n2}, \gamma_{3n}, \dots, \gamma_{nn})$ は λ_n に対する固有ベクトルである。初期条件として $\varphi = 0, X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$ を式(4)に代入して C_1, C_2, \dots, C_n を定めると、解は次式で与えられる。

$$\begin{matrix} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{matrix} \begin{matrix} e^{\lambda_1 y} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 y} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_n y} \end{matrix} \begin{matrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{nn} \end{matrix}^{-1} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}^{-1}$$

$$\begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{matrix}^{-1} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{matrix} \quad \dots \quad (5)$$

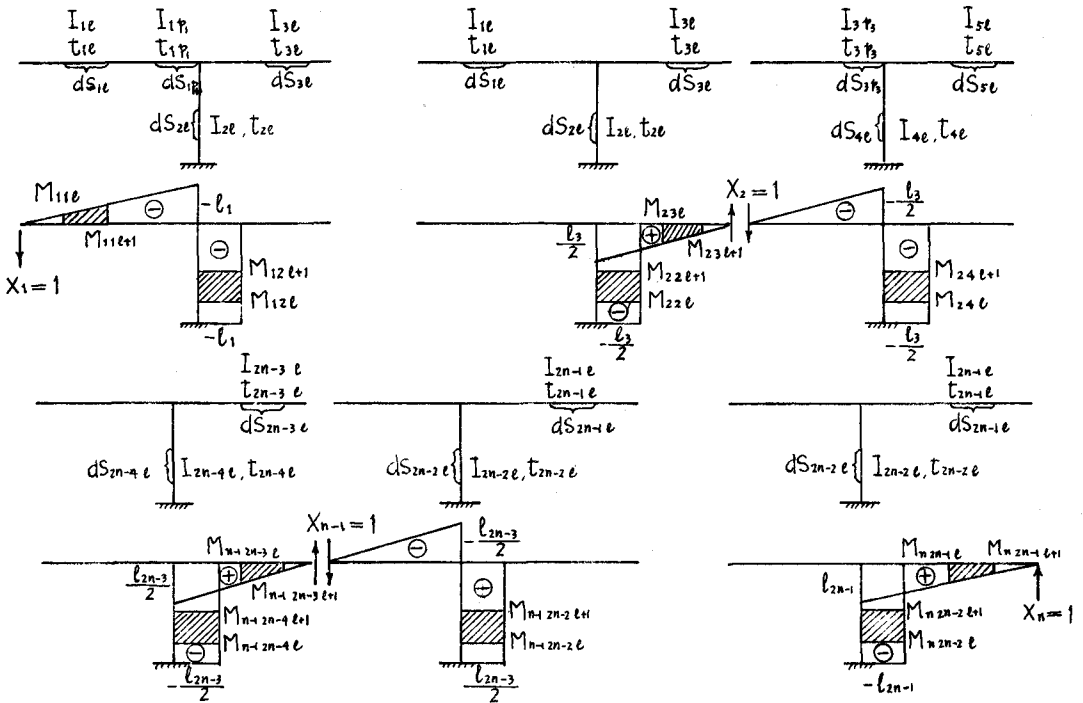


図-8 各部材分割区間の名称と単位の不静定力による曲げモーメント

(2)式の a_{ij} は単位のクリープ、単位の不静定力 ($X_j=1$) によって生じた不静定力 X_i 方向のたわみであり、影響の小さいせん断力、軸力の項を無視すると次式で表される。

$$a_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^{p_k} \frac{\exp(-x t k e)}{E I_{k e}} \left[M_{i k e} (2M_{j k l} + M_{j k l+1}) + M_{i k l+1} (2M_{j k e} + M_{j k e}) \right] dS_{k e} \quad \dots \quad (6)$$

図-8を参照して、 k :部材番号、 p_k : k 番目の部材の分割ブロック数、 l : k 番目の部材の l 番目のブロック番号、 $dS_{k e}$: k 番目の部材の l 番目のブロックの分割区間長、 $I_{k e}$: k 番目の部材の l 番目のブロックの断面二次モーメント、 $M_{i k e}$: $X_i=1$ を作用させたときの k 番目の部材の l 番目のブロックの左(はり)または下(柱)の曲げモーメント、 $M_{i k l+1}$:同じブロックの右(はり)または上(柱)の曲げモーメント、 $M_{j k e}$: $X_j=1$ を作用させたときの k 番目の部材の l 番目のブロックの左または下の曲げモーメント、 $M_{j k l+1}$:同じブロックの右または上の曲げモーメント、 m :部材総数

各ブロックの分割方法は施工するブロック別とし、長すぎる場合は同一施工ブロックを数個に分ける。

f_{ij} は単位の不静定力 ($X_{ij}=1$) によって生じた不静定力 X_{ij} 方向のたわみであり、せん断力、軸力の項を無視すると (6) 式で $\exp(-\alpha x_{k\ell e})$ の代りに 1 とおいた式となる。

次に b_{ij} はある構造系体が完成したときの自重、プレストレス、前施工段階までのクリープにより生じたモーメントによって生ずる単位クリープ当りの不静定力 X_{ij} 方向のたわみで次式で表される。

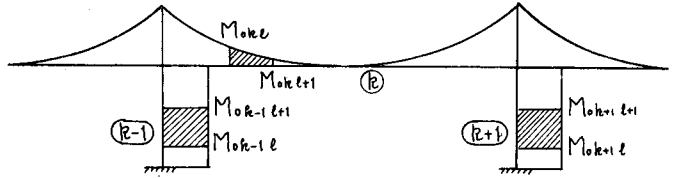


図-9 ある構造系体が完成した時の曲げモーメント

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^m \sum_{\ell=1}^{P_k} \frac{\exp(-\alpha x_{k\ell e})}{E I_{k\ell e}} \left\{ M_{i k\ell e} (2M_{0k\ell e} + M_{0k\ell e+1}) + M_{i k\ell e+1} (2M_{0k\ell e+1} + M_{0k\ell e}) \right\} ds_{k\ell e} \quad (7)$$

4 計算データ (径間、ブロック番号は左から数える。橋脚も左から 1P、2P、3P とする。)

(a) 各施工段階のクリープを生ずる期間、クリープ係数および載荷日までの経過日数

第一段階 クリープを生ずる期間 5.50.7.15 ~ 50.9.3 この間のクリープ係数 0.825, $\alpha = 1/120$

ブロック番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1P
経過日数	0	0	0	0	21	28	33	38	45	49	53	58	64	71	77	245	290

第二段階 クリープを生ずる期間 5.50.9.3 ~ 51.10.3 この間のクリープ係数 2.41, $\alpha = 1/120$

ブロック番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1P	1	2	3	4	5	6
経過日数	48	48	48	48	69	76	81	86	93	97	101	106	112	119	125	293	338	293	124	117	111	106	100
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	2P			
96	90	85	80	76	68	60	0	7	12	21	30	48	67	76	83	89	94	106	273	323			

第三段階 クリープを生ずる期間 5.51.10.3 ~ 51.10.14 この間のクリープ係数 0.22, $\alpha = 1/120$

ブロック番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1P	1	2	3	4	5	6	
経過日数	438	438	438	438	459	466	471	476	483	487	491	496	502	509	515	683	728	683	514	507	501	486	470	
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	2P	1	2	3	4
486	480	475	470	466	458	450	390	377	402	411	420	438	457	466	473	479	484	476	663	713	663	489	480	474
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	3P		
469	459	449	423	421	405	401	385	390	0	8	16	23	28	33	37	45	54	80	87	94	555	690		

第四段階 クリープを生ずる期間 5.51.10.14 ~ ∞ クリープ係数 2.5, $\alpha = 1/120$

ブロック番号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1P	1	2	3	4	5	6	
経過日数	449	449	449	449	470	477	482	487	494	498	502	507	513	520	526	674	729	674	525	518	512	507	501	
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	2P	1	2	3	4
497	491	486	481	477	469	461	401	408	413	422	431	449	468	477	484	490	495	507	674	724	674	500	491	485
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	3P	1	2
480	470	460	454	432	416	412	406	401	11	12	27	34	39	44	48	56	65	91	98	105	566	701	576	108
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16											
102	95	66	56	50	44	40	34	27	22	0	0	0												

注 静荷重の経過日数は第四段階に 330 日を加えたものである。

(b) ブロックの分割区間長および断面二次モーメント (第一径間と第四径間は対称である。)

ブロック番号	第一径間																第二径間			第三径間				
分割区間長 m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	1	2	3	1	2	3		
断面二次モーメント m ⁴	9.7	9.2	10.7	11.7	12.5	14.3	17.3	21.0	25.6	30.9	36.4	42.6	49.8	57.7	66.6	76.5	68.1	57.2	40.3	68.1	57.2	40.3		
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
3.5	4	4	4	4	4	4	3	2	2	4	4	4	4	4	4	4	3.5	3.5	3.5	5.5				
30.4	22.6	16.7	12.2	9.0	6.5	5.4	4.9	4.5	4.5	4.5	4.5	4.8	5.6	7.0	9.7	13.2	18.0	24.4	32.6	43.2	54.6	68.1		

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
3.5	3.5	3.5	4	4	4	4	4	4	4	3	2	2	3	4	4	4	4	4	4	4	3.5	3.5	3.5	6.5
51.1	40.3	30.4	22.6	16.7	12.2	9.0	6.5	4.4	4.7	4.5	4.5	4.5	4.5	4.7	5.4	6.5	9.0	12.2	16.7	22.6	30.4	40.3	51.1	64.1

註 橋脚はブロック数はすべて1個で断面二次モーメントは 22.5 m^4

5 クリープによる不静定力および曲げモーメントの計算結果

第一、二、三段階終了時、第四段階 ($t=\infty$) および静荷重による不静定力、曲げモーメントを次の図に示す。

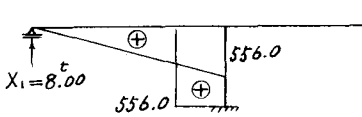


図-10 第一段階不静定力、曲げモーメント

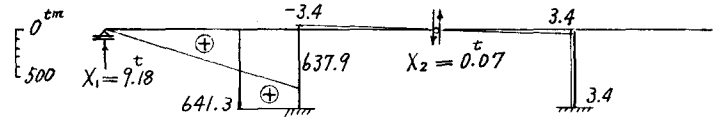


図-11 第二段階不静定力、曲げモーメント

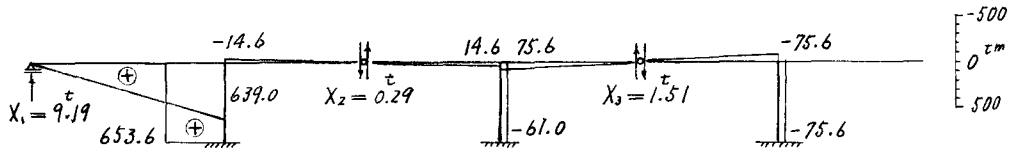


図-12 第三段階不静定力、曲げモーメント

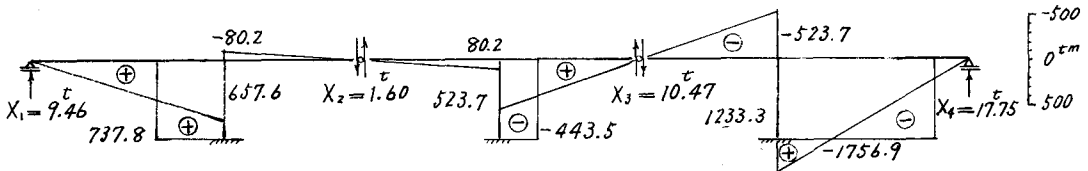


図-13 第四段階不静定力、曲げモーメント

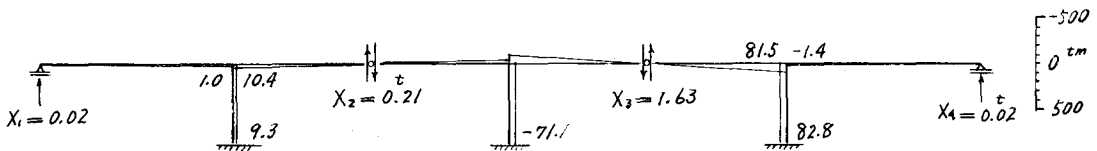


図-14 静荷重による不静定力、曲げモーメント

6 計算結果の考察および結論

はり部では3P柱頭部が最もクリープによる曲げモーメントは大きい、これは荷重によるものと反対向きであり安全側となる。第四径間右支点より20m付近は荷重によるモーメントと同じ向きになり危険側となる。断面上縁、下縁の応力度を検討すると設計荷重時で上縁 67.8 、下縁 9.9 kg/cm^2 である。これに対しクリープによる応力度は上縁 3.1 下縁 -5.1 kg/cm^2 となりクリープ終了時でも下縁で 4.8 kg/cm^2 の圧縮応力度が残り安全である。次に橋脚は設計荷重モーメントに対しクリープによるモーメントは同じ向きに作用し、また値もかなりの割合となる。(1Pでは9.6%、3Pでは29.9%) 従って応力度は設計当初のものよりかなり超過する。(1P 設計 $\sigma_c = 71.9$ 、 $\sigma_s = 1275 \text{ kg/cm}^2$ 、クリープ終了後 $\sigma_c = 82.1$ 、 $\sigma_s = 1640 \text{ kg/cm}^2$ 3P 設計 $\sigma_c = 54.3$ 、 $\sigma_s = 588 \text{ kg/cm}^2$ 、クリープ終了後 $\sigma_c = 72.0$ 、 $\sigma_s = 1175 \text{ kg/cm}^2$) これに対し鉄筋は当初よりSD35を使用していたので許容応力度以内で問題はない。コンクリートは許容応力度が 80 kg/cm^2 であり1Pで僅かに圧縮応力度が超過する。

文献 1) 外崎 忍: コンクリート構造連続桁のクリープによる不静定力の一般式について、プレストレストコンクリート Vol.15, No.2 2) 梶原 二郎: マトリックス算法概説、コンピューターによる構造工学講座