非対称凸形クロソイド曲線の接線長の新しい解析

道都短期大学　正会員　今井芳雄

§1. 前言　非対称凸形クロソイドについては、日本道路協会クロソイドポケットブックに便利な解析があるが ΔR_1, ΔR_2 を求めてからの操作がやや手間がかゝるので筆者はすこし別な観点から ΔR_1, ΔR_2 は直ちに数値化せず、しばらく温存しておき、最終式で X_M と合算する方式とし、最小限の変数で一挙に接線全長 D_1, D_2 を決定する新しい解析を得たので発表するわけであります

§2. クロソイド曲線諸元の概要

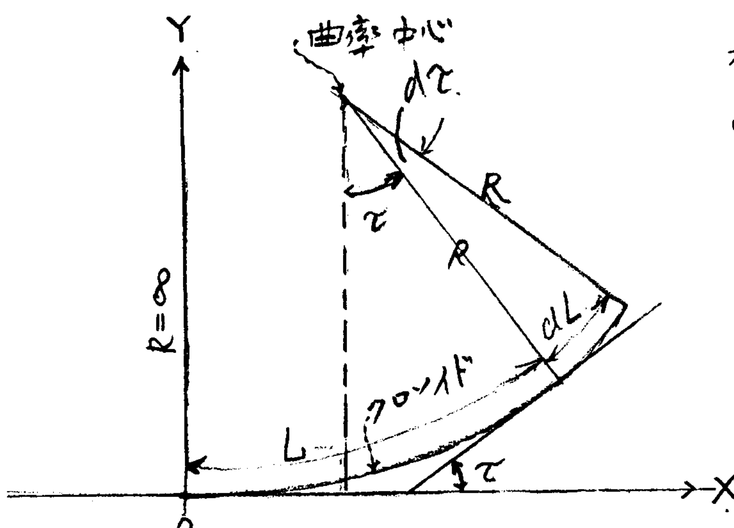


Fig: 2·1

クロソイド曲線の半径∞から半径 R になる迄の曲線長を L (Fig; 2·1) とすれば

$$R \cdot L = \text{constant}$$
$$= C \quad \cdots\cdots (2.1)$$
$$= A^2 \quad \cdots\cdots (2.2)$$
$$\therefore \frac{1}{R} = \frac{L}{C} \quad \cdots\cdots (2.3)$$

又 $dL = R \cdot d\tau \quad \cdots (2.4)$

$$\therefore d\tau = \frac{1}{R} dL \quad \cdots (2.5)$$
$$= \frac{L}{C} dL \quad \cdots (2.6)$$

$$\therefore \tau = \int d\tau \quad \cdots\cdots (2.7)$$
$$= \frac{1}{C}\int L \cdot dL \quad \cdots\cdots (2.8)$$
$$= \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{2}L^2 + C_1 \quad \cdots\cdots (2.9)$$

ここに C_1 は積分常数であり $\tau = 0$ のときクロソイド長 $L = 0$ である　∴ 積分常数 $C_1 = 0$　$\therefore \tau = \frac{1}{C}\cdot\frac{1}{2}L^2 \cdots\cdots (2.10)$

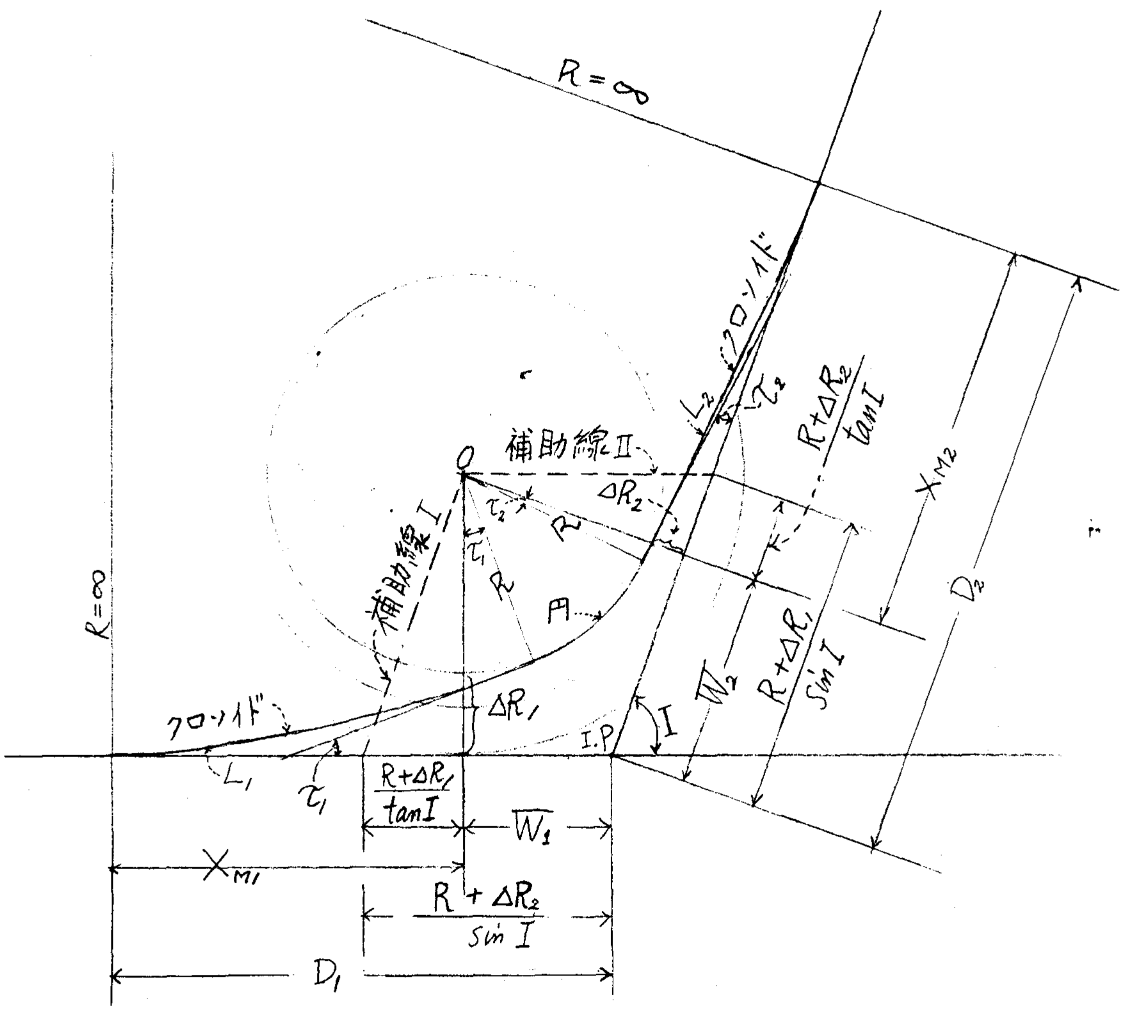
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{L^2}{R \cdot L} \quad \cdots\cdots (2.11)$$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R}$ ……(2.12)

$= \frac{1}{2} \cdot l^2$ ……(2.13)．ここで $l \equiv \frac{L}{\sqrt{C}} = \frac{L}{A}$ ……(2.14)

従って $R \cdot l = \sqrt{C}$ ……(2.15)．(2.13)式よりτは l を知れば直ちに radian として算出出来るわけである．(2.15)式も使い途の多い表現である．

§3. 非対称凸形クロソイド曲線接線長



Fig; 3.1

Fig; 3.1 において円曲線半径 R の両端にクロソイド長 L_1，L_2 を接続させる場合について解析を進める．両接線の交点 I.P における交角を I（アイ）とおく

$l_1 \equiv \frac{L_1}{\sqrt{R \cdot L_1}}$ ……(3.1)，　$Y_1 = \sqrt{C_1} \cdot y_1$ ……(3.2)

$= R \cdot l_1 \cdot y_1$ ……(3.3)

$$X_{M_1} = X_1 - R\cdot \sin \tau_1 \cdots\cdots (3.4)$$
$$= \sqrt{C}\cdot x_1 - R\cdot \sin \tfrac{1}{2} l_1^2 \cdots (3.5)$$
$$= R\cdot l_1 \cdot x_1 - R \sin \tfrac{1}{2} l_1^2 \cdots (3.6)$$
$$= R\left\{ l_1 \cdot x_1 - \sin \tfrac{1}{2} l_1^2 \right\} \cdots (3.7)$$

$$l_2 \equiv \frac{L_2}{\sqrt{R\cdot L_2}} \cdots\cdots (3.8)$$
$$Y_2 = \sqrt{C_2}\cdot y_2 \cdots\cdots (3.9)$$
$$= R\cdot l_2 \cdot y_2 \cdots\cdots (3.10)$$

$$X_{M_2} = X_2 - R\cdot \sin \tau_2 \cdots\cdots (3.11)$$
$$= \sqrt{C_2}\cdot x_2 - R\cdot \sin \tfrac{1}{2} l_2^2 \cdots (3.12)$$
$$= R l_2 \cdot x_2 - R\cdot \sin \tfrac{1}{2} l_2^2 \cdots (3.13)$$
$$= R\left\{ l_2 \cdot x_2 - \sin \tfrac{1}{2} l_2^2 \right\} \cdots (3.14)$$

ここで x_1・x_2・y_1・y_2はl_1，l_2に対応する単位クロソイド表の数値である

Fig; 3.1 から

$$\Delta R_1 = Y_1 + R\cdot \cos \tau_1 - R \cdots\cdots (3.15)$$
$$= \sqrt{C_1}\cdot y_1 + R \cos \tau_1 - R \cdots\cdots (3.16)$$
$$= R\cdot l_1 \cdot y_1 + R\cdot \cos \tfrac{1}{2} l_1^2 - R \cdots (3.17)$$
$$= R\left\{ l_1 \cdot y_1 + \cos \tfrac{1}{2} l_1^2 - 1 \right\} \cdots (3.18)$$

$$R + \Delta R_1 = R\left(l_1 \cdot y_1 + \cos \tfrac{1}{2} l_1^2 \right) \cdots\cdots (3.19)$$

同様に

$$R + \Delta R_2 = R\left(l_2 \cdot y_2 + \cos \tfrac{1}{2} l_2^2 \right) \cdots\cdots (3.20)$$

Fig: 3.1 において半径Rの円の中心から交角I（アイ）の接線に互に平行に補助線Ⅰ，補助線Ⅱを下すと $\dfrac{R+\Delta R_1}{\tan I}$，$\dfrac{R+\Delta R_2}{\tan I}$ の長さがW_1，W_2に接続して得られる。補助線Ⅰ，補助線Ⅱの長さを用いて

$$W_1 = \frac{R+\Delta R_2}{\sin I} - \frac{R+\Delta R_1}{\tan I} \cdots\cdots (3.21)$$
$$= \frac{R+\Delta R_2}{\dfrac{\tan I}{\sqrt{1+\tan^2 I}}} - \frac{R+\Delta R_1}{\tan I} \cdots (3.22)$$
$$= \frac{\sqrt{1+\tan^2 I}\,(R+\Delta R_2) - (R+\Delta R_1)}{\tan I}$$
$$= \frac{R\left[\sqrt{1+\tan^2 I}\left(l_2 \cdot y_2 + \cos \tfrac{1}{2} l_2^2 \right) - \left(l_1 \cdot y_1 + \cos \tfrac{1}{2} l_1^2 \right)\right]}{\tan I} \cdots\cdots (3.23)$$

ここで．$l_2 \equiv \dfrac{L_2}{\sqrt{R\cdot L_2}}$，$l_1 \equiv \dfrac{L_1}{\sqrt{R\cdot L_1}}$，　I…交点における接線交角

$$W_2 = \frac{R+\Delta R_1}{\sin I} - \frac{R+\Delta R_2}{\tan I} \cdots\cdots (3.24) = \frac{R+\Delta R_1}{\dfrac{\tan I}{\sqrt{1+\tan^2 I}}} - \frac{R+\Delta R_2}{\tan I} \cdots\cdots (3.25)$$

前頁(3.25)式より．W_1 同様の式変化をすることによって

$$W_2=\frac{R\left[\sqrt{1+\tan^2 I}\,(l_1\cdot y_1+\cos\frac{1}{2}l_1^2)-(l_2\cdot y_2+\cos\frac{1}{2}l_2^2)\right]}{\tan I}\cdots\cdots\cdots(3.27)$$

$$D_1=X_{M1}+W_1\cdots\cdots(3.28)$$

$$=R\{l_1\cdot x_1-\sin\frac{1}{2}l_1^2\}+\frac{R\left[\sqrt{1+\tan^2 I}\,(l_2\cdot y_2+\cos\frac{1}{2}l_2^2)-(l_1\cdot y_1+\cos\frac{1}{2}l_1^2)\right]}{\tan I}\cdots(3.29)$$

$$=R\left[(l_1\cdot x_1-\sin\frac{1}{2}l_1^2)+\frac{\sqrt{1+\tan^2 I}\,(l_2\cdot y_2+\cos\frac{1}{2}l_2^2)-(l_1\cdot y_1+\cos\frac{1}{2}l_1^2)}{\tan I}\right]\cdots(3.30)$$

$$D_2=R\left[(l_2\cdot x_2-\sin\frac{1}{2}l_2^2)+\frac{\sqrt{1+\tan^2 I}\,(l_1\cdot y_1+\cos\frac{1}{2}l_1^2)-(l_2\cdot y_2+\cos\frac{1}{2}l_2^2)}{\tan I}\right]\cdots(3.33)$$

ここで $\sqrt{1+\tan^2 I}$ の＋，－の符号は $\tan I$ の符号と同じにとるものとする．

§4. 計算例

接線交角 I（アイ）$=67°08'03''$，円半径 $R=480^m$．
クロソイド長 $L_1=83.^m3333\cdots$，クロソイド長 $L_2=67.^m500$ が与えられたものとする．(解) $\sqrt{C_1}=A_1=\sqrt{R.L_1}=\sqrt{480^m\times 83.^m333\cdots}=200^m$．

$\sqrt{C_2}=A_2=\sqrt{R.L_2}=\sqrt{480^m\times 67.^m500}=180^m$．　(2.15)式により $l_1=\frac{\sqrt{C_1}}{R}=\frac{200^m}{480^m}=0.416667$　y_1＝単位クロソイド表から補間法によって l_1 に対応するものとし，0.012050．　x_1＝単位クロソイド表から補間法によって 0.0416353，　$\tau_1=\frac{1}{2}l_1^2=\frac{1}{2}\left(\frac{200^m}{480^m}\right)^2=0.0868055$ radian

$\cos\tau_1=\cos 0.0868055$ radian $=0.9962348$

$\sin\tau_1=\sin 0.0868055$ radian $=0.0866966$

$\tan I=\tan 67°08'03''=2.3712754$，$\sqrt{1+\tan^2 I}=\sqrt{1+5.622947}$ $=2.5735087$．　$l_2=\frac{\sqrt{C_2}}{R}=\frac{180^m}{480^m}=0.375000$

y_2＝単位クロソイド表から直ちに 0.008786

x_2 = 単位クロソイド表から $l_2 = 0.375000$ に対応するものとし 0.374815

$\tau_2 = \frac{1}{2} l_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{180^m}{480^m}\right)^2$ (2.15)式による

$= \frac{9}{128} = 0.0703125$ radian　　∴ $\cos\tau_2 = 0.9975291$

$\sin\tau_2 = 0.070254577.$

$l_1 \cdot x_1 = 0.1734806,\ l_2 \cdot y_2 = 0.008786,\ l_1 \cdot y_1 = 0.0050209.\ R = 480^m.$

(3.30)式から

$$D_1 = 480^m \left[(0.1734806 - 0.0866965) + \frac{2.5735086\,(0.008786 + 0.99753)}{2.3712754}\right. ※$$

$$※ \left.\frac{-(0.0050209 + 0.9962348)}{2.3712754}\right] = 480^m\left[0.08678406 + 0.66393503\right]$$

$= 480^m \times 0.75071908 \qquad = 360^m.345$

$$D_2 = 480^m \times \left[0.07030105 + 0.664585900\right]$$

$= 480^m \times 0.73488695 \qquad = 352^m.746$

§5. 結言

非対称凸形クロソイド曲線の接線長 D_1，D_2 (Fig. 3.1) を求めるための (3.30) 式，(3.33) 式を導いたが $\tau = \frac{1}{2} l^2$ を用いることによって単位クロソイド表から補間法で τ を求める手数が省け解析が単純になっている。補間法で求めた x_1，x_2，y_1，y_2 もいづれは座標値 X_1，X_2，Y_1，Y_2 を求めるため入用な数値である。特別なものは $\tan I$，$\sqrt{1+\tan^2 I}$ の2つにすぎない。(2.15)式も割合に有用である。