

# 蛇行流路の経年変動に関する 電算機シミュレーション

北大工 正 長谷川 和義  
同 学〇伊 藤 仁

## 1: はじめに

自然状態にある蛇行流路が、流下方向へ前進しつつ振幅を拡大し、ついには切離にいたるといふ法則的事実は広く知られている。しかし、こうした事実にもとづいて実際の流路の変動を予測しようとする、と、相当な困難をともなう。それは、知られている法則が定性法則にとどまっていて、具体的な数量としてはあくできないこと、流路変動の物理的機構の解明が、いまだ研究途上にあり、もっとも単純な場合についても解析が困難なこと、個々の河川の個性性がつよく、また同一河川においても流域の地質、地形的な条件が一様でないこと、などによる。

著者らは、このような研究の発展段階をふまえて流路変動の予測をおこなう一方法として、水文学などで発展をとげてきた帰納的手法を適用することを提案し、研究をすすめてきた。この方法は、ある河川の二つの異なる年度における平面図にもとづいて、はじめの年度の形状を入力、あとの年度の形状を出力とみなして、この間を結合するシステム関数に相当する関係式を探しだし、第三年度目の推定をこころみようとするものである。しかし、実際現象は、流路の切離をもふくむ、非常に複雑な非線形現象であり、普通に知られている線形理論による同定法は、年度間隔が短く、変形の大きくない場合以外にはほとんど適用が不可能であるので、次のような考えかたをする。

- (1) 流路の変形は、側岸の浸食速度のちがいによって生ずるので、流路形状と浸食速度の関係式を現在までに知られている実験事実や、水理学的な諸関係をもとに仮定を導入しながら決めておき、これにかかる係数を同定すべき量とする。
- (2) 係数を仮定して、初年度形状から短かい期間後の変形量をもとめる計算をくりかえし、第二年度目の推定形状をもとめる。
- (3) 実測の第二年度目形状と、推定形状の誤差をもとめ、これが極小となるように係数を同定する。
- (4) えられた係数をもちいて第三年度目の形状の予測をおこなう。

これは、一種のDP問題になりうるものであるが、現在のところ、この手法には主眼をおかず、基本となる形状と浸食速度の関係式のふさわしい形を追求し、本方法の適用の可能性を検討しているところである。

## 2: 蛇行形状と浸食速度

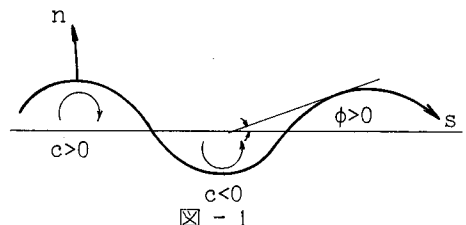
わん曲流路の側岸の浸食は、一様にはおこらず、いわゆる水あたりの生ずるおう岸部頂点よりやや下流の地点において 最大の浸食が生ずることが、古くから経験法則として知られている。

また、木下は、自然河川と実験水路の詳細な観測から、蛇曲流路と迂曲流路の側岸浸食の生起のしかたが異なり、これが流心線の偏倚のしかたにもとづくという重要な事実をあきらかにしている。

これらの事実によれば、側岸浸食は、(1) 流路の平面形状と流心線形状のずれによって生じ、(2) 流心線の偏倚集中の大きいところほど浸食速度が大きい。ということになる。

一方、流心線は、流路の平面形状と底形状によって規定されるので、結局、浸食速度は、流れを介在として流路の平面および底形状によって関係づけられることになる。

こうした側岸の浸食速度と流路形状の関係式を最初にあらわしたのは、奈良井であり、彼は、蛇行水流の河岸に作用する遠心力を浸食の基本的な



力とみなし、河岸法線の曲率と流心線の曲率に位相差を導入して次式をみちびいた。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = K' C (s + \delta') \quad \dots\dots (1) \quad \text{ただし、} n : \text{流路中心線の法線方向にそって測った浸食距離 } s : \text{中心線にそう流路長 } C : \text{曲率}$$

$\delta'$  : 位相差  $K'$  : 比例定数  $t$  : 時間 一方、著者の一人は、当研究室においておこなわれた自由蛇行流の実験をもとに、浸食速度と流路形状の間に次の関係を認めた。

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -K'' \phi (s + \delta'') \quad \dots\dots (2) \quad \text{ただし、} \phi : \text{谷軸に対する流路中心線の偏角 } K'' : \text{比例定数 } \delta'' : \text{位相差}$$

$\delta'$ などは、大きな値ではないので、(1)、(2)式をテーラー展開して一次の項までとると

$$\frac{\partial n}{\partial t} = K' C (s) + K' \delta' \dot{C}(s) \quad \dots (1)' \quad \frac{\partial n}{\partial t} = K'' (-\phi(0) + \int_0^s C(\tau) d\tau) + K'' \delta'' C(s) \quad \dots (2)'$$

ただし、 $\phi$ 、 $C$ は図-1のように符号を定めるものとして、 $C(s) = -\dot{\phi}(s)$ なる関係にあり、また $\tau$ は積分パラメータ、 $\dot{\cdot}$ は $s$ に関する微分をあらわす。これらは、概念式ないしは実験式であるが、これらによって流路の変化を追求すると、ある程度実際現象にみられる変形過程を再現することができる。

最近、池田は、Engelundの方法によって、sine-generated curveであらわされる規則的な蛇行路内の流速の偏倚量をもとめ、これが側岸の浸食を規定するものとして、蛇行の発達限界波長および卓越波長を導きだした。この研究は、流線の偏倚集中を浸食にむすびつけて考えている点ですぐれており、実際現象に近づくものとなっている。そこで、これらの考えを、一般の不規則な形状の流路にまで拡張し、流路形状と浸食速度の関係式を導びいてみよう。

流路横断面を矩形に近似し、水深方向の流速を一様と仮定して、平面的な流速の偏倚量をもとめるものとする、運動方程式ならびに連続の式は、図-2の軸をもちいて次のようにあらわされる。

運動方程式

$$\text{流下方向 : } U_0 \frac{\partial u}{\partial s} = -g \frac{\partial \xi}{\partial s} - \frac{f U_0^2}{2 H_0} \left( 2 \frac{u}{U_0} - \frac{\xi + \eta}{H_0} \right) \quad \dots\dots (3)$$

$$\text{横断方向 : } -\frac{U_0^2}{r_0} = -g \frac{\partial \xi}{\partial n} \quad \dots\dots (4)$$

$$\text{連続式 : } \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u}{U_0} + \frac{\xi + \eta}{H_0} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{v}{U_0} \right) = 0 \quad \dots\dots (5)$$

ただし、 $U_0$  :  $s$ 軸方向の平均流速、 $u$  : 平均流速からの偏倚量 ( $u \ll U_0$ )、 $v$  : 横断方向流速 ( $v \ll U_0$ )、 $\xi$  : 任意点水面の平均水面からの上昇高 ( $\xi \ll H_0$ )、 $\eta$  : 任意点河床の平均河床高からの低下深 ( $\eta \ll H_0$ )、 $H_0$  : 平均水深、 $f$  : まさつ係数、 $g$  : 重力加速度、 $r_0 = 1/C$  :  $s$ 軸上任意点の曲率半径。

これらの諸式は、Engelundあるいは池田とほとんど同じなので、誘導過程は文献4),5)

にゆずる。

次に、水深  $H_0 + \xi + \eta$  に対して、Engelundは

$$H_0 + \xi + \eta = \alpha (r_0 + n)^\beta$$

なる関係をあたえ、これより

$$\frac{\xi + \eta}{H_0} = \left( 1 + \frac{n}{r_0} \right)^\beta - 1 \approx \beta C(s) n \quad \dots (6)$$

を導き、 $\beta$ の値に対して、 $7 \tan \Phi$  ( $\Phi$  : 砂の動

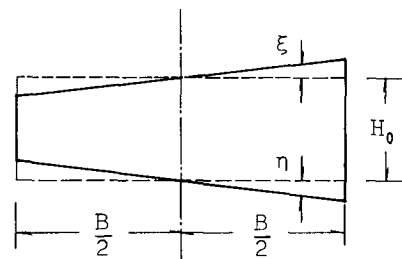
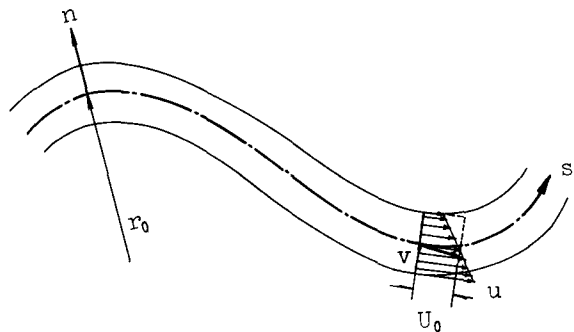


図-2

まさつ係数)をあたえた。一方、池田は、 $\eta \approx 0$ として (4)式からえられる $\xi$ の値をいれて、 $\beta = U_0 / gH_0$ とし、安定論の立場から限界波長、卓越波長をもとめている。

以上の (3)～(6)式を連立することによって、 $u, v$ をもとめることができる。すなわち、(4)式を積分したのち、(6)式とともに (3)式に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{u}{U_0} \right) + \frac{f}{H_0} \frac{u}{U_0} = \left\{ \frac{f\beta}{2H_0} C(s) - \dot{C}(s) \right\} n \quad \dots\dots\dots (7)$$

この式は、 $u$ に関する一階の非同次方程式であり、右辺は、 $u$ に対して入力役をばたしている。いま、これを $\beta$ の遠方 $\beta = -S$ において、 $u/U_0 = F(-S)n$ なる境界条件のもとで解くと、

$$\frac{u}{U_0} = n \left[ \frac{f}{H_0} \left( \frac{\beta}{2} + 1 \right) \int_{-S}^s e^{\frac{f}{H_0}(\tau-s)} C(\tau) d\tau - C(s) + e^{-\frac{f}{H_0}(s+S)} \{ F(-S) + C(-S) \} \right] \quad \dots\dots (8)$$

をうる。境界の始点のとりかたによって、境界条件のおよぶ範囲(いわゆる過渡領域)がかわるので、考えている領域が定常とみなしうるためには $S$ をどのくらいにとればよいかを検討しておこう。ただし、 $C(\beta)$ が一般の不規則な場合には、積分が直接もとまらないので、次の三角関数を入れた場合について考える。

$$C(s) = \frac{1}{R} \cos \frac{2\pi}{L} s \quad \dots\dots (9)$$

ただし、 $R$ : 曲率半径の最小値  
 $L$ : 波長

上式を(8)式に入れ整理すると

$$\frac{u}{U_0} = n \left[ a \cdot \sin \frac{2\pi}{L} s + b \cdot \cos \frac{2\pi}{L} s - e^{-\frac{f}{H_0}(s+S)} \cdot \left\{ a \cdot \sin \left( -\frac{2\pi}{L} S \right) + b \cdot \cos \left( -\frac{2\pi}{L} S \right) - F(-S) \right\} \right] \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{2\pi f}{RH_0 L} \left( \frac{\beta}{2} + 1 \right) / \left\{ \left( \frac{f}{H_0} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right\} \\ b &= \frac{1}{R} \left[ \left( \frac{f}{H_0} \right)^2 \left( \frac{\beta}{2} + 1 \right) / \left\{ \left( \frac{f}{H_0} \right)^2 + \left( \frac{2\pi}{L} \right)^2 \right\} - 1 \right] \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

上式で、 $S \rightarrow \infty$ とすればEngelundのもとめた定常解に一致する。すなわち、

$$\frac{u}{U_0} = n \left[ a \cdot \sin \frac{2\pi}{L} s + b \cdot \cos \frac{2\pi}{L} s \right] \quad \dots\dots\dots (12)$$

両式の比較からあきらかなように、過渡現象は、(10)式右辺〔〕内の第二項によってあらわされ、池田の指摘のごとく、流路の振幅が拡大する状況のもとでは、 $b > 0$ であるから、 $S$ を波長 $L$ 程度にとればこの項は十分に小さくなる。したがって、一般の場合にも $S$ を平均波長程度にとれば、定常解 (13)式をうる。

$$\frac{u}{U_0} = n \left[ \frac{f}{H_0} \left( \frac{\beta}{2} + 1 \right) \int_{-S}^s e^{\frac{f}{H_0}(\tau-s)} C(\tau) d\tau - C(s) \right] \quad \dots\dots\dots (13)$$

(13)式によれば、流速の偏倚は、 $n$ の一次式すなわち横断方向に直線分布することになり、最大流速は河岸においてあらわれる。したがって、流速分布の最大点をつらねた線によって定義される流心線は不連続になってしまうばかりでなく、流心線の流路に対するずれの程度もあきらかにならないのであるが、偏倚量 $u$ の大きさは、とりもなおさず流線間隔の密度にひとしいので、流れの集中の度合をしめすことになり、浸食量がこれに関係するという考えは妥当であろう。

しかし、 $u$ と浸食量の実際関係は、現在のところほとんど解明されていないので、この間のむすびつけは、仮定によるほかはない。ここでは、最も単純な仮定として、浸食速度が $u$ の河岸における値に比例するものとしよう。この場合、 $u$ が正に対して浸食を、負に対して堆積を意味するものとすれば、浸食速度式は

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{Ku}{2} \frac{Q}{H_0} \left[ \frac{f}{H_0} \left( \frac{\beta}{2} + 1 \right) \int_{-S}^s e^{\frac{f}{H_0}(\tau-s)} C(\tau) d\tau - C(s) \right] \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $K_u$ : 比例定数、 $Q$ : 流量。(14)式を(2)式と比較すると興味ぶかい。すなわち、(14)式において、 $\exp\{ f/H_0 \cdot (\tau - s) \} = 1$ とした式は、(2)式と同様な形式をそなえている。

### 3: 流路変動過程の基礎式

浸食速度と流路形状の関係式が一応えられたので、流路の変動  $y$  過程を追跡する。流路の平面的な動きは、中心線によって代表させることができるので、以後、これによって考えることにし、基礎式を誘導する。

一般に、曲線の表示方法は、二通り考えられる。一つは、図-3に示すように、 $x-y$ なる直交座標に対して副変数  $s_0$  を曲線長にえらび、適当な関数  $f_1, f_2$  をもちいて

$$x=f_1(s_0), y=f_2(s_0), ds_0=\sqrt{dx^2+dy^2} \dots\dots (15)$$

のごとくあらわす方法であり、他の一つは、曲率と曲線長によって  $C = f_3(s_0) \dots (16)$ のごとくあらわす方法である。(16)式は、曲線の自然方程式とよばれる。

さて、図に示すように、はじめの曲線がこれに直交する曲線  $n$  にそって、 $\partial n / \partial t$  のはやさで変形をとげたとすると、(15)式の  $x, y$  は時間  $t$  の関数ともなり、その時間変化率は次のようにあらわされる

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial n}{\partial t} \sin\phi(s, t), \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial n}{\partial t} \cos\phi(s, t) \dots\dots\dots (17)$$

さらに、Frenet-Serreの公式をもちいると、

$$-\sin\phi = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \quad \cos\phi = \frac{1}{C} \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \quad C = \sqrt{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2} \dots (18)$$

なる関係をうるので、(17)式は、 $\phi, C$  をふくまない表現にすることができる。このとき新しい曲線の長さ  $s$  はわかり、 $s_0$  との間に

$$\frac{\partial s}{\partial s_0} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial s_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s_0}\right)^2} \dots\dots\dots (19)$$

なる関係をもつ。一方、自然方程式による場合は、曲率の時間変化率が  $\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{\partial n}{\partial t}\right) \dots (20)$ にてあらわされ、 $s$  と  $s_0$  との間に

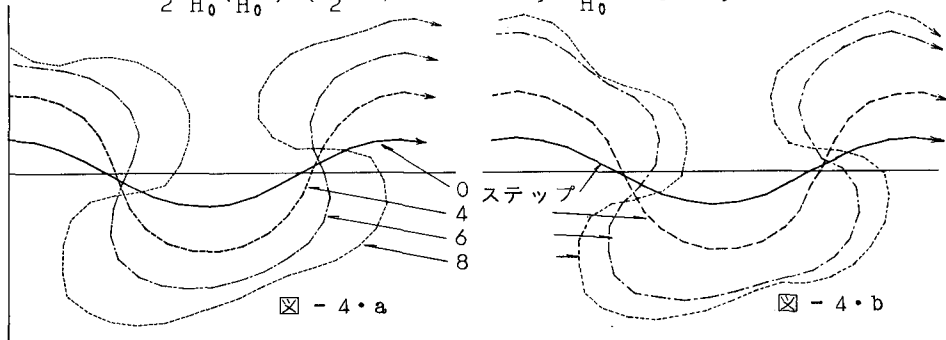
$$\frac{\partial s}{\partial s_0} = \left[ \left\{ \cos\phi(s_0) + \frac{\partial}{\partial s_0} \int_0^t \left(-\frac{\partial n}{\partial t}\right) \sin\phi dt \right\}^2 + \left\{ \sin\phi(s_0) + \frac{\partial}{\partial s_0} \int_0^t \frac{\partial n}{\partial t} \cos\phi dt \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \dots (21)$$

なる関係をもつ。流路変動の基礎式は、(17)あるいは(20)式に(14)式を代入することによってえられるが、いずれも曲線長自体が時間とともに伸縮するので複雑な非線形方程式となっており、解析解をうることは、ほとんど不可能である。そこで、短い時間中には  $ds/ds_0$  の変化が無視しうるものとして、時間に関して前進差分をとることにより数値計算をおこなうことにする。その際、式は曲線形を直接図示できる(17)式をもちいるが、 $\phi, C$  は(18)式によってもとめることをせず、次式によることにする。この方が、計算が簡略になり、精度上も好ましいからである。

$$\phi(s, t) = \tan^{-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_t, \quad C(s, t) = -\frac{\partial \phi(s, t)}{\partial s} \dots\dots\dots (22)$$

すなわち、流路変動の基礎式は、(14) (17)、(19)、(22)の各式によってあたえられる。これらの式の性質をあきらかにする目的で、初期値に  $\phi(s) = -\frac{\pi}{6} \sin \frac{2\pi}{L} s$  を設定した場合の変動の様子は、図-4・a、4・bのごとくである。ただし、係数値は図中に記したのものもちいている。

$$\frac{Ku}{2} \frac{Q}{H_0} \left(\frac{f}{H_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{\beta}{2} + 1\right) \Delta t = 10, \quad \frac{fL}{H_0} = 30, \quad \beta = 4$$



同図のaは、境界点から1波長目を、bは、9波長目をとりだして描いたものであるが、両者のちがいはほとんどあられなく、先述のように、境界端から1波長はなれると、ほぼ定常に達することはあきらかである。変動の様子は、初期の sine-generated curve の振幅が次第にひろがり、やがて自然河川の迂曲流路にみられる独特の耳形状へと変化しており、基礎式は、一応実際現象をあらわすものになっている。流路の変形を規定するものは、(14)式における係数  $K_1 Q / 2H_0 (=K_1とす)$ 、 $f/H_0 (=K_2とす)$ 、 $\beta/2+1 (=K_3とす)$  であり、このうちはじめのものは主に変形の速さに関係し、後二者は、波長と対応で形状のちがいを決定づける。

#### 4：実際河川への適用

前節までの諸式をもちいて実際河川の流路変動の追跡と予測をこころみる。ただし、はじめに述べたように、今考えている方法は帰納的な立場にたつものであり、前節の変動方程式をもちいることは、あくまでも、未知のシステムに一つの関数形を仮定したことにはほかならず、重点は、中にふくまれる未知パラメータを実際にあうように同定し、これを予測にもちいることにある。この意味で、同定すべきパラメータは、 $K_1$ のみにとどめる必要はなく、 $K_2$ 、 $K_3$ をも自由に定めうるものとする。また、局地性を考慮して、対象とする流路範囲をあまりひろげないようにし、一予測区間を一波長程度にかぎることにする。資料としては、同定のために少くとも二つの年度の平面図が、予測値との照合のためにはさらに第三年度目の平面図が必要となるが、これらの経年変化をそろえた貴重なものに、木下による「石狩川河道変遷調査附図」があるのでこれを利用する。すなわち、同図中の雨竜川につき、1912、31、47年の流路の一部地域をとりだして同定と予測をこころみる。同定の方法は、推定曲線と実測曲線における、等間隔対応点の座標誤差の二乗和を極小とするような収れん値を探したす方式により、時間ステップごとには変化をあたえずにおこなう。

図-5は、1912年流路を初期値とし、31年流路に対して9回の時間ステップ後に一致するように係数の同定をこころみた結果であり、12年、31年の実測結果とともに比較して描いてある。結果は、必ずしも良好とはいえないが、これは、収れん方法など同定のしかたに問題があるほか、係数値を時間に対して固定していること、変動方程式が十分な柔軟性をもっていないこと、などによるものと考えられる。同定がうまくいかなければ、予測値の方も期待できないので、今後とくに同定法の改善について検討をくわえたい。

図-6は、このときの係数をもちいて、31年流路から47年流路をシミュレーションしたものであり、実測結果とともに比較して描いてある。結果は、同定が十分でないわりには実際の変化の傾向をあらわしているようであり、係数のとり方次第では、もうすこし予測精度をあげる事が可能のように思える。しかし、細部までの一致は、もとより難しく、変化の重要な傾向を予測しうるか否かが問題となる。

図-7は、同じ雨竜川の12年と31年の間に自然切離が生じている河道部分について、 $K_1 = 120$ 、 $K_2 = 0.03$ 、 $K_3 = 0.09$ とし、計算機内に切離の判別回

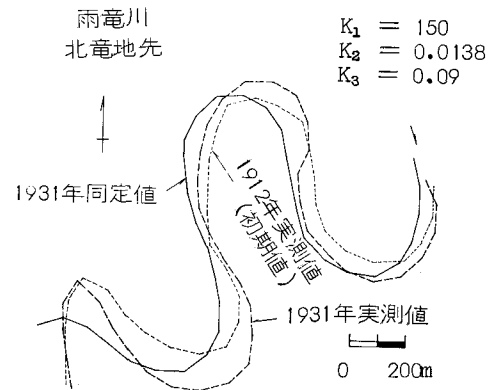


図-5

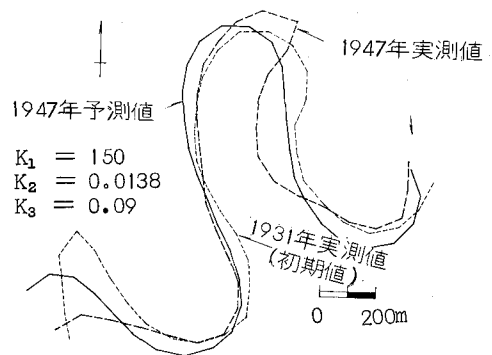


図-6

路をもうけてシミュレーションをこころみたものである。図には切離前後の形状を、12、31年の実測結果とともにのせてある。切離は、第5ステップで発生しており、これが何年に相当するかは実際の切離が12年と31年の間であること以外は不明であるためにわからない。

## 5:まとめ

(1) Engelundの解法を、一般の不規則流路に拡張して一般流路内の平面偏倚流速を導き、これが側岸浸食速度に比例するものとして、平面形状と浸食速度の関係式を仮定した。

(2) 流路中心曲線の時間変化を直交座標をもちいてあらわし、(1)の関係式とともに流路変動の基礎式を導いた。これらの式は、初期波形に、

sine-generated curveをあたえると、自然現象にみられるような変形をとげ、異なる時期の流路間を結びつける方程式としては、一応の妥当性をもつことがあきらかになった。

(3) 雨竜川1912年の流路形状を初期値として、31年の形状に近づく係数を、誤差の極小値を探した方法により求めた結果、この係数による計算形状と実測形状は必ずしも良好な一致をしめさなかった。これは、とくに同定法に問題があるためと考えられ、改善は、今後の課題である。

(4) 上記の係数をもちいて、1932年形状から47年形状を予測した結果、実際の変化の傾向をおおまかではあるがしめすことができた。係数のとり方次第では、精度をあげるようである。

(5) 係数をかえて自然切離発生箇所に関する予測をこころみた結果、シミュレーションにおいても切離が発生した。

(6) 以上により、ここに提案する方法は、係数同定法など、改善すべきことも多々あるが、基本的には実際問題にも適用しうるものとする。

謝辞：本研究をすすめるにあたり、山岡教授より有益な討議と援助をいただいた。また、昭和52年度科学研究費補助金の交付をうけた。末尾ながら、ここに謝意を表する次第である。

なお、計算は、北海道大学大型計算機センターFACOM230 - 75を利用した。

## 参考文献：

- 1) 長谷川和義：蛇行流路のシミュレーション，土木学会第30回年講概要集2 - 173,1975
- 2) 長谷川和義：蛇行流路の変動に関するシミュレーション，同上第31回 2 - 155,1976
- 3) 奈良井修二：河川蛇行の軌跡について，同上第30回 2 - 174,1975
- 4) Engelund,F：Flow and Bed Topography in Channel Bends, Journ. of Hy. Div. Hy11 ASCE,1974
- 5) 池田駿介・日野幹雄・吉川秀夫：河川の自由蛇行に関する理論的研究,土木学会論文報告集, No. 255, 1976 - 11
- 6) 木下 良作：石狩川河道変遷調査,科学技術庁資源局資料第36号,1961

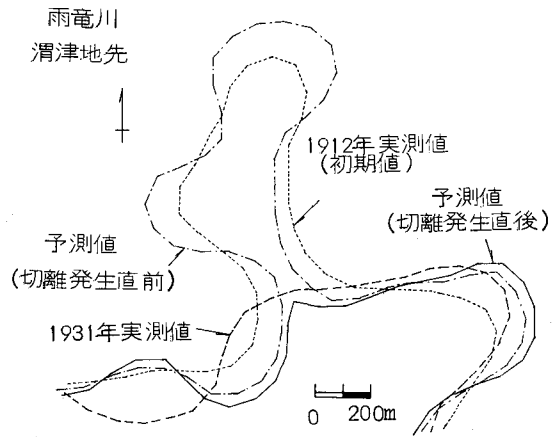


図 - 7