

有限要素法による貯水池動水圧の三次元解析

北見工業大学 正員 佐渡 公明
北見工業大学 正員 ○ 中尾 隆志

1 まえがき

地震時にダムに作用する動水圧については、従来 Westergaard の解析解¹⁾が一般に用いられてきた。しかしながらこれは、貯水池の長さ L やダム堤体の長さ a を考慮していない。著者は先にダムの加速度や壁面上 S_1 が任意の場合の二次元動水圧問題の数値解析を有限要素法により行った。²⁾ しかし、実際の貯水池は、 $x=0, z=a$ において境界条件をもち二次元問題の動水圧分布と違った分布をすることが考えられる。

本研究は、圧縮性を考慮した貯水池の地震動水圧の三次元問題を余弦関数を用いることにより、二次元化し有限要素法 (FEM) を導入し、境界条件の変化による動水圧変化をシミュレーションしたものである。

2 基礎方程式と FEM による定式化

圧縮性を考慮した地震時動水圧の基礎方程式は次式で示される。

$$\Delta p + \frac{\rho \omega^2}{E} p = 0 \quad (1)$$

ただし、 p : 動水圧, ρ : 水の密度,

ω : 角速度, E : 水の体積弾性率

境界条件は壁面上 S_1 において、法線方向を n 、法線方向の加速度を α とすれば、

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \alpha \quad (2)$$

壁面と水表面を除いた貯水池 V の周囲 S_2 において、加速度が働かないとして、

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

また、水表面 S_3 において

$$\frac{1}{g} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\omega^2}{g} p = 0 \quad (4)$$

がそれぞれ得られる。

式 (1), (2), (3), (4) に対する汎関数は次式で与えられる。

$$\chi = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2}{E} p^2 \right\} dV - \int_{S_1} (p \alpha + \frac{\omega^2}{2g} p^2) dS \quad (5)$$

ただし V : 解析領域, $S := S_1 + S_2 + S_3$

ここで、 $z=0, z=a$ で境界条件、式 (3) を満足するように、

$$p = \sum_{k=1}^L \left\{ \delta(x, y) \cos \frac{k\pi z}{a} \right\} \left\{ p^k \right\}^e \quad (6)$$

なる余弦級数と表わす。

ただし、 δ : 三節点三角形要素の形状関数 $\delta_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta$ など Δ : 要素 e の面積

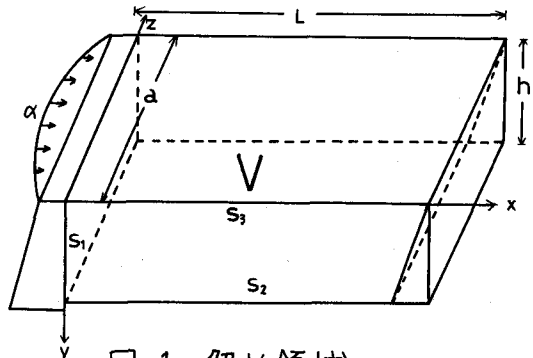


図-1 解析領域

$$a_i = x_i y_i - x_j y_j, \quad b_i = y_i - y_j, \quad c_i = x_k - x_j \quad \text{など}$$

式(6)を式(5)に代入し、極値の条件をとることにより、問題は二次元化され、

$$\frac{\partial X^e}{\partial \{p^m\}^e} = [k^m]^e \{p^m\}^e - \{B_m\}^e - \{f^m\}^e \quad (7)$$

$$[k^m]^e = \frac{a}{8\Delta} \begin{pmatrix} b_i b_j + c_i c_k + 2d & b_i b_j + c_i c_k + d & b_i b_k + c_i c_k + d \\ \text{Sym.} & b_j b_j + c_j c_j + 2d & b_j b_k + c_j c_k + d \\ & & b_k b_k + c_k c_k + 2d \end{pmatrix}$$

$$\text{ただし } d = \frac{\Delta^2}{3} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{\rho \omega^2}{E} \right\}$$

図-2(a)のような、水表面を含む要素e'において三角形要素を用いることより、

$$p = p_r + \frac{p_s - p_r}{L_e} \Delta$$

となり、

$$\{B^m\} = \frac{\omega^2 a L_e}{12g} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} p_r^m \\ p_s^m \\ p_b^m \end{pmatrix} = [h^m]^e \begin{pmatrix} p_r^m \\ p_s^m \\ p_b^m \end{pmatrix}$$

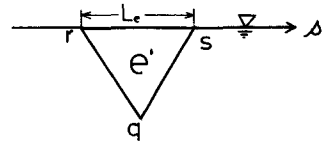


図-2(a) 水表面を含む要素

また、壁体にかかる加速度aを

$$a = a(x, y, z) = \left(a_u + \frac{a_r - a_u}{L_e} \Delta \right) \times f(z)$$

と置くことにより、 $\{f^m\}^e$ の成分は、

$$f_i^m = \rho \int \left(a_u + \frac{a_r - a_u}{L_e} \Delta \right) \times f(z) \times t_i \cos \frac{m\pi z}{a} d\Delta$$

となる。次に、式(7)を全要素について重ね合わせを行えば、次の連立一次方程式が得られる。

$$[K^m] \{p^m\} - \{F^m\} = 0$$

$$K_{ij}^m = \sum_e (k_{ij}^m + h_{ij}^m) \quad \text{ただし } h_{ij}^m \text{ は水表面を含む要素のみ, } F_i^m = \sum_e f_i^m \quad m=1, \dots, L$$

式(8)で解いたL組($m=1, 2, \dots, L$)の解 p^m を式(6)に代入することにより、任意の点の動水圧 p を求めることができる。

3 数値解析例

図-1に示す解析領域を要素数212、節点数145の要素に分割し、貯水池の標準規模を水深 $h=100$ m、ダム堤体長 $a=200$ m、貯水池の長さ $L=1000$ mとし、加速度として最大1なる水平な加速度を水深方向に一樣な場合、水面で1底部で0となる線形に変化する場合、またz方向には、 $f(z) = 1 - \frac{z}{a}$, $f(z) = \sin \frac{\pi z}{a}$ の4通りの組み合わせについて行った。

図-3は加速度周期 $T=1$ sec、水深方向に一樣、z方向に $f(z) = 1 - \frac{z}{a}$ 、貯水池が

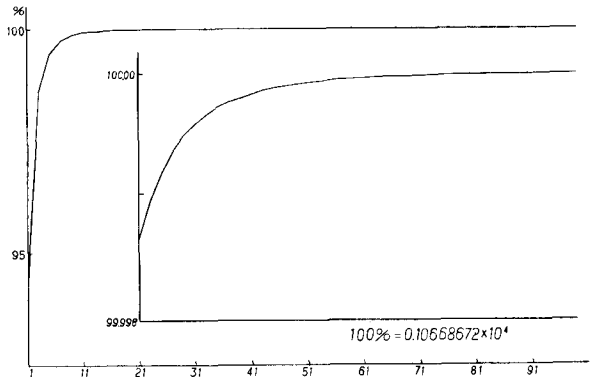


図-3 堤体底部での収束状況

標準規模の時の h の収束の状況をダム堤体底部の点をもつて示したものである。

図-4, 5は貯水池を標準規模とし, 4通りの加速度をかけた場合のダム堤体部の動水圧が z 方向にどのような変化を示すかを表わしたものである。結果は汎用性をもつように無時元化して示してある。

図からわかるように, $f(z) = 1 - \frac{z}{h}$ なる加速度を受けた場合, 堤体中心部 $a = 100\text{m}$ で動水圧は, ほぼ 0 に近い値を得た。

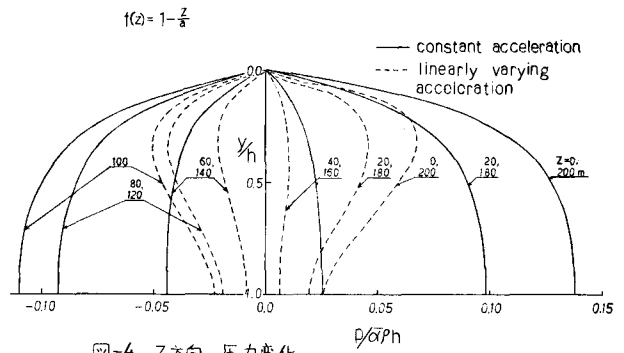


図-4 Z方向の圧力変化

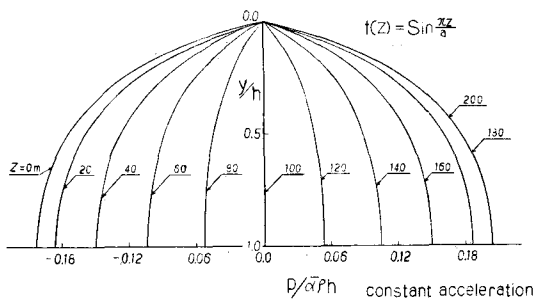


図-5(a) Z方向の圧力変化

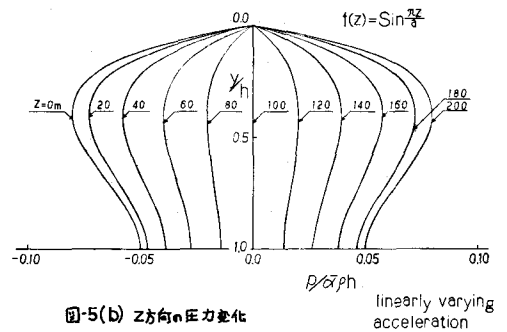


図-5(b) Z方向の圧力変化

一方, $f(z) = \sin \frac{\pi z}{2h}$ なる加速度において動水圧は, ダム堤体中心部に向うにつれて減少している。また水深方向に線形に変化する加速度の場合, いずれの場合も動水圧の最大値は水面から割とくらの地点で発生していることがわかる。

図-6, 7は水深方向に一樣な加速度の場合における貯水池の長さ L の影響を調べるため, 加速度の大きき 1 , 周期 1sec , 水深 100m , 堤体長さ $a = 200\text{m}$ の時の $z = 0\text{m}$ における堤体部の動水圧の変化をシミュレーションさせたものである。

当然のことながら, L が大きくなるにつれて動水圧が減少している。

図-8, 9は貯水池の規模を標準規模とし, 水深方向に一樣な加速度における加速度周期の影響をダム堤体部の地点で示したものである。

周期の変化に伴って, 動水圧の分布に大きな変動をきたしていることがわかる。

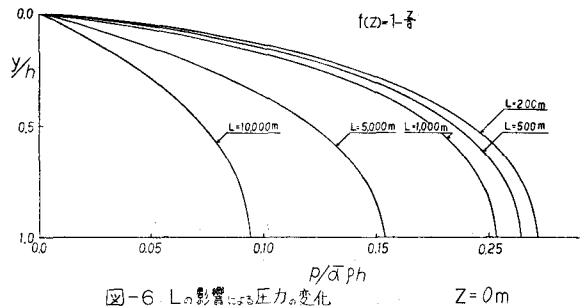


図-6 Lの影響による圧力の変化

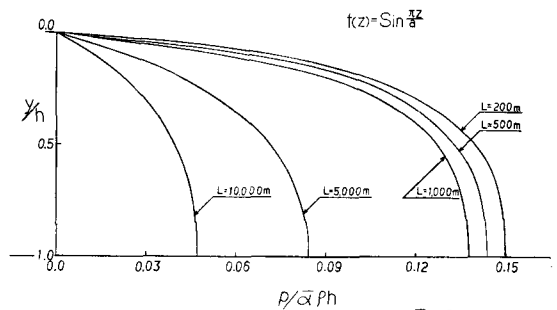


図-7 Lの影響による圧力の変化

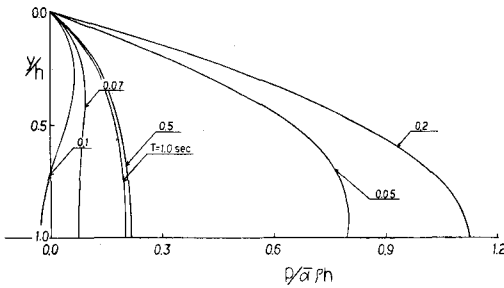


図-8 Tの影響による圧力の変化 Z=0m

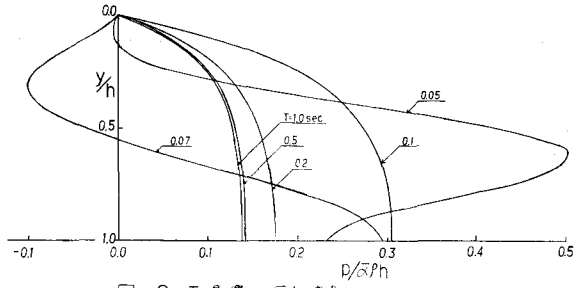


図-9 Tの影響による圧力の変化 Z=0m

4 あとがき

以上、貯水池の地震時動水圧の三次元問題に余弦関数を用いることにより、二次元化し、加速度として水深方向に一様（一様加速度）、水面で1底部で0（線形に変化する加速度）なる場合、またZ方向に $f(z) = 1 - \frac{z}{h}$, $\sin \frac{\pi z}{h}$ の4通りの加速度を仮定し、境界条件を変えることにより、動水圧分布がどのように変化するかを有限要素法によりシミュレーションさせた結果を示した。

本研究により得られた結果を次に示す。

1) 動水圧のZ方向の変化を余弦関数のフーリエ級数で表わすことにより、三次元問題が二次元問題に変換され、Z方向の動水圧の分布が明らかとなった。

2) 一定条件のもとでしだけの影響を考慮した場合、動水圧はしが大々くなるにつれて減少する。

3) 周期Tの変化により、動水圧分布は大々な変動を伴う。

Z方向の加速度が $f(z) = \text{const.}$ のような場合、直交関数として余弦関数を用いると、式(8)の定数項が0となり解析できない。貯水池の動水圧の実用計算には Westergaard の解析解が用いられているようであるが、これは二次元問題として取り扱われているので、今後の課題として Westergaard の解析解と本方法との誤差を検討する。なお、数値計算については、北海道大学大型計算機センターの FACOM 230-75 を用いた。

参考文献

- 1) 水理公式集編集委員会編；水理公式集 P348~349 (1971), 土木学会
- 2) 佐渡公明・中尾隆志；有限要素法による貯水池の動水圧解析, 北見工業大学研究報告, 第9巻, 第1号, P105~110. (1977)
- 3) O.C. Zienkiewicz ; The Finite Element Method in Engineering Science (1971), Mc Graw - Hill