土木学会北海道支部　論文報告集　昭和52年度

多変数確率分布に関する一考察

北海道大学　工学部　学生員 ○ 豊沢　康男
同　　上　　正　員　　星　　清

1. はじめに

水工学の分野ではT年確率水文量の推定とか水文量の模擬発生における分布特性値の保存のために、観測値の理論確率分布関数へのあてはめが必要となる場合が多い。当然のことながら、

入手観測値がどのような理論分布に従がうかを判断するための理論的根拠をもつ例はきわめて少なく、分布特性値としての平均値、分散、歪度を保持できる分布形を適宜選んでいるのが実状である。すなわち、歪度が無視できる程度に小さい場合には、正規分布によって近似し、そうでない場合でも、非対称分布の代表として広範に用いられている3ー変数対数正規分布とかガンマ分布で近似している。しかも、通常我々がもつ小標本数観測値では、統計的適合度検定によっては理論分布形選択の優劣をつけがたいのも事実である。従って、実際の適用では、分布形の選択にあたって解析の簡便さが重要視される。

どの分野においても、1変数解析のみならず、多変数解析の必要性が生ずる。例えば、多変数分布の和の分布を求めるという問題はその好例である。しかしながら、多変数問題のとりくみは、1変数問題に比べて極端に解析が複雑で困難となる。その原因と考えられるのが、正規分布を除いて、分布の再生性が保証されない点である。すなわち、3ー変数対数正規分布の和は3ー変数対数正規分布にならず、またガンマ分布の和もガンマ分布にならないという制約である。ただ、最近、独立にガンマ分布に従がう変数の和の分布もガンマ分布で近似できるという研究成果がある[1)]。さらに解析を困難にしている原因は、変数間に相関が一般には存在するためである。例えば、個々の変数の歪度が既知でも、変数間に相関があるために、変数の和の歪度を陽形式で求めることができない。逆に、変数間の相関構造と和の歪度が既知でも、各々の変数の歪度を算定することはきわめて困難である。

本研究では、今までに報告されている研究成果をふまえて、相関構造を有する多変数分布解析の一手法を述べる。上述したように多変数分布解析を困難にしている原因が変数間の相関構造にあることに着目して、まず、変数の直交変換をはかることによって互いに独立な変数に分解する。次に、分解された互いに相関のない変数の歪度は、ある仮定のもとに、原変数の歪度の変換によって求めることを試みた。その結果、多変数の和の歪度を陽形式で互いに独立な変数の歪度で表わすことが可能となる。また、直交変換による変数は互いに独立なので非対称分布でも分布のあてはめが容易になるという利点がある。

適用例では、札幌における78年間（1889ー1966）の月降水量を用い、シミュレーションによって理論の検討を行った。また、分布形には3ー変数対数正規分布（3PLN）とガンマ分布（GAMMA）を採用して、2つの分布形による結果の比較を行った。

2. 基礎式

2. 1　直交変換　今、相関を有する変数を y_i $(i = 1,2,\ldots n)$とし、互いに独立な変数を g_i $(i = 1,2,\ldots n)$とし、さらに直交変換係数行列の要素を b_{ij} $(i,j = 1,2,3,\ldots\ldots,n)$ とすれば、変換式は次式で定義される。

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & & b_{ij} & & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで、nは変数の個数である。y_iは次式で表わされる。

$$y_i = b_{i1}g_1 + b_{i2}g_2 + \cdots\cdots + b_{in}g_n \quad \cdots\cdots (2)$$

また、(1)式を行列表示すると次式になる。

$$Y = B\,G \quad \cdots\cdots (3)$$

ここで、Y, Gはn次列ベクトルで、Bはn次正方行列である。以後ことわりなくば、Y, Gは共に平均値を零にもつ列ベクトルとする。もちろん、Y, Gの平均値ベクトル$\bar{Y}$と$\bar{G}$は次式で関係づけられる。

$$\bar{Y} = B\,\bar{G} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

(3) 式の右からYの転置 Y^T をかけ、両辺の期待値をとれば次式が得られる。

$$D_Y = B\,D_G\,B^T \quad \dots\dots\dots\dots\dots (5)$$

ここで、D_Y とD_G はそれぞれY とGの分散ー共分散行列であり次式で与えられる。

$$D_Y = E(Y\,Y^T) \qquad D_G = E(G\,G^T) \quad \dots\dots\dots (6)$$

上述した仮定により、g_i と $g_j\,(i \neq j)$ は相関が零になることを目的とするので、次式が成立する。

$$E(g_i g_j) = \begin{cases} \sigma_{gi}^2 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、σ_{gi}^2 は g_iの分散である。すなわち、(5)式のD_G は g_i の分散を要素とする対角行列である。したがって、(5)式は次式のように変形される。

$$D_Y = B\,D_G^{1/2} D_G^{1/2} B^T = (BD_G^{1/2})(BD_G^{1/2})^T$$
$$= B^* B^{*T} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (8)$$

ここで、$D_G^{1/2}$ は g_iの標準偏差を要素とする対角行列であり、B^* は次式で与えられる。

$$B^* = B\,D_G^{1/2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (9)$$

(8)式は対称行列 D_Y を B^* とその転置行列、B^{*T} の積に分解することを意味し、その解法はいわゆる対称行列 D_Y の固有値とその固有ベクトルを求めることに対応する。すなわち、σ_{gi}^2 はD_Y の固有値によって決定され、B の各々の列ベクトルはそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルで決定される。

この時、固有ベクトル行列は次式の性質をもつ。

$$B^T B = I \qquad B^{-1} = B^T \quad \dots\dots\dots (10)$$

すなわち、B の列ベクトルのノルムが1 になるように列ベクトルの要素を規準化しなければならない。D_Y とBが決定されれば、G の平均値ベクトル $\bar{G}$ は(10)の性質を利用して、次式で与えられる。

$$\bar{G} = B^T\,\bar{Y} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (11)$$

2.2 Gの歪度ベクトルの算定

前節では、原変数 Y の2次までの積率を用いて、直交変換によって係数行列Bを算定した。現実には、Y の分布が正規分布しているとは考えられず、従って互いに独立な変換変数 G も非対称分布していると考えられる。そこで、G の歪度ベクトルを算定するために、g_i が互いに独立であることに注目して、次の条件を仮定する。

$$E(g_i g_j g_k) = \begin{cases} \gamma_{gi}\sigma_{gi}^3 & (i=j=k) \\ 0 & (i \neq j = k) \\ 0 & (i \neq j \neq k) \end{cases} \quad \dots\dots (12)$$

ここで、$E(g_i g_j g_k)$ は平均値のまわりの3次の積率であるが、相異なる変数の組み合せによるそれは零とする。また、γ_{gi} は g_i の歪度である。(12)式の仮定のもとに (2)の両辺を3乗して、その期待値をとれば次式が得られる。

$$\gamma_{yi}\sigma_{yi}^3 = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^3 \gamma_{gj}\sigma_{gj}^3 \quad (i=1,2,..n) \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、σ_{yi} とγ_{yi} はそれぞれ y_i の標準偏差と歪度である。(13)式をすべてのiについて展開して、それを行列表示すれば、次式が得られる。

$$D_Y^{3/2}\,\gamma_Y = [B^3]\,D_G^{3/2}\,\gamma_G \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここで、$D_Y^{3/2}$ と $D_G^{3/2}$ はそれぞれ、y_i と g_i の標準偏差を3乗したものを要素とする対角行列、γ_Y とγ_G はそれぞれ、y_i と g_iの歪度を要素とする列ベクトル、$[B^3]$はb_{ij}を3乗したものを要素とする行列である。(14)式から、G の歪度ベクトルは次式で求められる。

$$\gamma_G = D_G^{-3/2}[B^3]^{-1}\,D_Y^{3/2}\,\gamma_Y \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、$[B^3]^{-1}$は行列 $[B^3]$の逆行列であり、$D_G^{-3/2}$は $D_G^{3/2}$の逆行列で対角行列である。(15)によれば、原変数 y_i の分布形に依存することなく y_i の歪度によって、独立な変数 g_i の歪度が求められる特徴をもつ。

2.3 和の分布に関する統計量

y_i の和を求めるためには、(3) 式の左から要素に1 をもつ n次行ベクトルを乗ずれば、次式が得られる。

$$x = 1\,Y = 1\,B\,G$$
$$= c\,G \quad \dots\dots\dots\dots (16)$$

ここで、1は単位行ベクトルで、c は n次行ベク

トルで次式で与えられる。

$$c = 1\ B \qquad \cdots\cdots (17)$$

すなわち、c の要素 c_j はB行列の j列の要素の和で与えられる。 x の平均値 $\bar{x}$ は(16)式より、次式で与えられる。

$$\bar{x} = c\ \bar{G} \qquad \cdots\cdots (18)$$

また、x の分散 σ_x^2 は (16) 式の右から x^T を乗じて、その期待値をとれば次式で与えられる。

$$\sigma_x^2 = c\ D_G\ c^T = \sum_{j=1}^{n} c_j^2 \sigma_{gj}^2 \qquad \cdots\cdots (19)$$

(12) 式の仮定のもとに、(16) 式の両辺を3乗してその期待値をとれば、次式が得られる。

$$\gamma_x \sigma_x^3 = \sum_{j=1}^{n} c_j^3 \gamma_{gj} \sigma_{gj}^3 \qquad \cdots\cdots (20)$$

すなわち、y_i の和である x の歪度 γ_x は互いに独立な変換変数 g_i の歪度 γ_{gi} で表わされる。

2．4 3PLN分布とGAMMA分布 直交変換変数Gの歪度を算定するための唯一の仮定は (12)式である。 この仮定の妥当性を検証するために、互いに独立な変数に非対称分布をあてはめ、モンテカルロ法によってGのデータを発生させる。 しかるのち、(3) 式によって原変数Yの分布特性値を計算して観測値の3次までの積率が保存されているかを調べる。 理論確率分布選択によるシミュレーション結果の変動特性をとらえる目的で、3一変数対数正規分布 (3PLN) とガンマ分布 (GAMMA) を採用し、比較を行なう。 2つの分布形の特性を簡単に述べる。 3PLN分布に従がう変数をg とし、正規分布に従がう変数を z とすれば、正の歪度を g が持つ場合、2つの変数間には次の関係式が成立する。

$$z = ln(g - a) \qquad \cdots\cdots (21)$$

ここで、a は分布の下限定数である。 変数 g の平均値、標準偏差、歪度をそれぞれ、μ_g, σ_g, γ_gとし、また、変数 z の平均値、標準偏差をそれぞれ、μ_z, σ_zとすれば[2)]6個のパラメータの間には次式の関係が成立する。

$$\mu_g = a + \exp(\mu_z + \sigma_z^2/2) \qquad \cdots\cdots (22)$$

$$\sigma_g^2 = [\exp(\sigma_z^2) - 1]\exp(2\mu_z + \sigma_z^2) \qquad \cdots\cdots (23)$$

$$\gamma_g = \frac{\exp(3\sigma_z^2) - 3\exp(\sigma_z^2) + 2}{[\exp(\sigma_z^2) - 1]^{3/2}} \qquad \cdots\cdots (24)$$

非超過確率を p として、この確率レベルに対応する標準正規変量を t_p とすれば、非超過確率 p の3PLN変量、g_p は次式で与えられる。

$$g_p = a + \exp(\mu_z + t_p \sigma_z) \qquad \cdots\cdots (25)$$

積率法によるパラメータ推定では、観測値から $\mu_g, \sigma_g, \gamma_g$ を計算して(22)-(24)式の左辺に代入して、μ_z, σ_z, a を求める。 g が負の歪度を持つ場合には、変換式は $z = ln(a - g)$となる。 この時、平均値 μ_g の関係式は次式で与えられる。

$$\mu_g = a - \exp(\mu_z + \sigma_z^2/2) \qquad \cdots\cdots (26)$$

また、(23)式は変換には不変であり、歪度は(24)式の γ_g の代りに$(-\gamma_g)$ を代入して解けばよい。 非超過確率p に対応する3PLN変量を求めるためには、1-p に対応する標準正規変量 t_p を求めて、次式によればよい。

$$g_p = a - \exp(\mu_z + t_p \sigma_z) \qquad \cdots\cdots (27)$$

次に、GAMMA分布に従がう変数を g とすれば、この分布の確率密度関数は次式で与えられる。

$$f(g) = \frac{\lambda^\eta}{\Gamma(\eta)} (g-a)^{\eta-1} e^{-\lambda(g-a)} \qquad (a<g<\infty) \qquad \cdots\cdots (28)$$

ここで、λ, η は分布パラメータで、a は分布下限定数である。 (28)式で、$z = \lambda(g - a)$と変数変換すれば、 zに関する分布関数は次式で与えられる。

$$p = F(z_p) = \int_0^{z_p} t^{\eta-1} e^{-t} dt / \Gamma(\eta) \qquad \cdots\ (29)$$

ここで、p は非超過確率で、 z_p はこの時の標準GAMMA変量である。 p に対する z_p が求まれば、原変数 g の非超過確率に対応するGAMMA変量 g_p は次式で得られる。

$$g_p = z_p / \lambda + a \qquad \cdots\cdots (30)$$

(29) 式において、 z_p を解くためには数値解析を必要とする。 GAMMA分布の特性値は次式で関係づけられる。

$$a = \mu_g - 2\sigma_g / \gamma_g \qquad \cdots\cdots (31)$$

$$\lambda = 2/\sigma_g \gamma_g \qquad \cdots\cdots (32)$$

$$\eta = 4/\gamma_g^2 \qquad \cdots\cdots (33)$$

ここで、$\mu_g, \sigma_g, \gamma_g$はそれぞれ、平均値、標準偏差、歪度であり、積率法によるa, λ, η のパラメータ推定は観測値の3次までの積率を (31)-(33)

式の右辺に代入して解けばよい。 g が負の歪度を持つ場合には、3PLN分布と同様に(28)式において、変換式 $z = \lambda(a-g)$ (a は分布の上限定数) を用いればよい。 この時、分布の上限定数 aは次式で求められる。

$$a = \mu_g + 2\sigma_g/(-\gamma_g) \quad \text{..........} \quad (34)$$

また、パラメータλ, η は(32) 式と (33)式において、歪度 γ_gを $(-\gamma_g)$ にかえて解けば得られる。負の歪度をもつ非超過確率 pに対応するGAMMA変量 g_p を求めるには、(29)式の p の代わりに 1-p の時の z_pを求めて、次式で変換すればよい。

$$g_p = a - z_p/\lambda \quad \text{............} \quad (35)$$

3. 適用例

上に展開した理論を実測水文資料を用いて検証する目的で、札幌における78年間(1889—1966)の月降水量を採用した。 とくに、直交変換変数ベクトル Gの歪度を算定するために設定した仮定式、(12) 式の検証が第一の目的である。このため、次の手順で解析に必要なパラメータの同定を行なう。

(a) 78年間の資料から、各月降水量と年降水量の平均値、標準偏差、および歪度を計算する。これらの数値は、Table 2、3、4のObser.の欄に示されている。

(b) 各月降水量間の分散ー共分散行列 D_Y を求め、この行列の固有値とそれぞれの固有値に対応する固有ベクトルを算定する。 この時、固有値は直交変換変数 g_i の分散になり、(10) 式で示されるように、規準化した固有ベクトル行列が直交変換係数行列 B に等しい。 したがって、互いに独立な変数 G の平均値ベクトルと歪度ベクトルは (11) 式と (15) 式で、それぞれ計算される。 g_i の平均値、標準偏差、および歪度をTable 1 に示す。 原変数、y_i の歪度 (Table 4) に比べて、変換変数g_iの歪度が相対的に大きくなっていることがうかがえる。

(c) 次に、月降水量の和、すなわち、年降水量に関する統計量を (18) ー (20) 式で計算する。 上述した直交変換法でも、(18) 式による平均値と (19) 式による分散は、年降水量観測値から計算されるそれらの値と一致することを確かめた。 ただし、(20) 式による年降水量の理論歪度と観測値から計算されるそれは一致するとはかぎらない。 年降水量観測値から計算される歪度は、Table 4 に示されるように、 —0.043でほぼ正規分布していると考えられる。 一方、(20) 式による変換変数 g_i の歪度を用いて計算される歪度は、Table 1 に示される歪度の大きさを反映して、0.884 と比較的大きい。 その原因として考えられる要因は、年降水量観測値から得られる歪度では、月降水量の平均値のまわりの3次の積率、たとえば、$E(y_i^2 y_j)$ とか $E(y_i y_j y_k)$ の項が含まれるために、それらの影響が現われていると考えられる。

年降水量に関する歪度では、実測値によるそれと理論解によるそれはいく分差が生じたが、(12) 式の仮定によって得られた直交変換変数 g_i の歪度が、(3) 式の逆変換によって原変数 y_i にもどした時、各月降水量の歪度をはたして保存するかをシミュレーションによって検討する。
互いに独立な変数、g_i がそれぞれ、3PLN 分布に従がうとすれば、Table 1 に示される3 次までの積率を用いて、(22) ー (24) 式から各々の変数 g_i のμ_z, σ_z, a を決定する。 次に、(25) 式か (27) 式 (負の歪度の時) の t_p に標準正規乱数を発生させ、3PLN 乱数 g_p を (3) 式によって変換し、観測標本数と同年数の78年間の月降水量を模擬発生させる。 この時、負の発生値は零とした。 発生させた78年間の各月降水量の3 次

Table 1
First three moments of transformed independent random variables, g_i

g_i	Mean (mm)	St.De. (mm)	Skew
1	36.73	79.21	1.943
2	116.84	69.46	2.523
3	148.77	56.07	3.422
4	132.10	52.04	-0.548
5	26.39	48.61	1.610
6	138.54	42.78	2.259
7	33.89	35.01	0.514
8	98.13	33.10	3.614
9	3.99	30.90	2.145
10	102.70	27.60	3.019
11	95.01	26.40	2.159
12	28.55	21.69	1.137

までの積率を計算する。なお、年降水量の統計量は、発生させた月降水量の和を求めた後計算した。以上の発生過程を100 回くり返えす。最後に、得られた100 個の3次までの積率の平均値とその標準誤差を計算する。直交変換変数 g_i が、GAMMA 分布に従がうとする時は、3PLN 分布発生過程と同様に、Table 1 に示される値を用いて各変数、g_i の分布パラメータ a, λ, η を (31) ― (33) 式から推定する。次に、(29) 式の p に一様乱数を発生させ、標準GAMMA 乱数 z_p を得た後、(30) 式によってGAMMA 乱数、g_p を発生させる。なお、g_i が負の歪度を持つ時は (35) 式によって g_p を得る。その後の発生過程は3PLN分布によった場合と同様である。100 個の月降水量に関する3 次までの積率の平均値とその標準誤差を、3PLN分布とGAMMA分布によった場合を比較して、Table 2、3、4 に掲げた。シミュレーション結果をみると、3PLN分布とGAMMA分布の違いによる結果の差はほとんどなく、観測値の統計量を実用上十分な精度で再現していると考えられる。ただし、Table 4 に示される歪度では、GAMMA分布の方が3PLN分布に比べて再現性がよく、また標準誤差も小さい。年降水量の歪度は、上述した理由により、再現性が悪い。本報告の計算は北海道大学計算機センター内 Facom 230―75 上で行なったが、3PLN 分布とGAMMA 分布の演算時間、料金の差異をTable 5 に示す。まず、全発生月降水量個数、12x78x100のうち、負の発生値個数が示されているが、GAMMA 分布によった方がいく分少ない。負の発生月降水量は零で置換したが、3PLN分布でも1 パーセント以下で、計算結果への影響は無視できるほど小さいと考えられる。演算時間と料金では3PLN 分布とGAMMA 分布による発生過程に大きな差異が生ずる。その原因は、GAMMA 分布では (29) 式においてpを与えて z_p を求めるのに収束演算を必要とするためである。Table 2、3、4 の結果をみるかぎり、3PLN

Table 2
Mean and standard error of mean (mm) for 100 traces, each trace having a length of 78 years

Month	Obser.	3PLN	GAMMA
Jan.	98.16	98.18 (4.73)	97.97 (5.50)
Feb.	74.94	74.88 (3.80)	74.80 (3.62)
Mar.	65.96	65.55 (3.55)	65.84 (2.73)
Apr.	60.69	61.02 (3.58)	60.60 (3.31)
May	60.59	61.27 (3.27)	60.89 (3.09)
Jun.	65.03	65.65 (3.34)	65.68 (3.72)
Jul.	94.01	93.31 (5.86)	94.75 (6.02)
Aug.	109.01	110.31 (7.78)	110.64 (7.74)
Sep.	139.49	138.75 (9.10)	137.80 (7.74)
Oct.	111.19	110.90 (6.15)	111.53 (6.32)
Nov.	107.86	108.24 (4.87)	107.50 (5.20)
Dec.	102.65	102.46 (3.74)	102.71 (4.00)
Year	1089.66	1090.52 (17.48)	1090.70 (17.49)

( ) standard error

Table 3
Mean and standard error of standard deviation (mm) for 100 traces, each trace having a length of 78 years

Month	Obser.	3PLN	GAMMA
Jan.	45.47	45.59 (5.61)	45.14 (5.10)
Feb.	33.46	33.09 (3.49)	33.25 (3.07)
Mar.	26.15	26.03 (2.42)	25.83 (2.42)
Apr.	30.93	30.63 (4.12)	30.80 (3.87)
May	30.51	28.99 (3.84)	29.33 (3.79)
Jun.	34.46	34.35 (5.32)	34.29 (3.83)
Jul.	51.14	48.87 (5.93)	50.62 (7.15)
Aug.	69.79	65.04 (10.43)	66.33 (9.41)
Sep.	74.69	73.82 (11.30)	72.27 (9.33)
Oct.	55.31	52.05 (5.87)	54.07 (7.34)
Nov.	43.71	43.24 (4.27)	43.04 (4.50)
Dec.	36.99	37.16 (4.86)	36.74 (3.75)
Year	148.58	144.54 (16.94)	148.06 (15.84)

( ) standard error

Table 4
Mean and standard error of skewness for 100 traces, each trace having a length of 78 years

Month	Obser.	3PLN	GAMMA
Jan.	1.099	0.986 (0.643)	1.006 (0.463)
Feb.	0.874	0.685 (0.483)	0.759 (0.333)
Mar.	0.561	0.526 (0.374)	0.497 (0.331)
Apr.	1.114	0.969 (0.725)	1.037 (0.483)
May	0.891	0.791 (0.700)	0.837 (0.545)
Jun.	1.061	0.874 (0.783)	0.942 (0.573)
Jul.	1.173	0.802 (0.568)	0.984 (0.620)
Aug.	1.184	1.150 (0.773)	1.276 (0.654)
Sep.	1.572	1.328 (0.661)	1.319 (0.510)
Oct.	0.870	0.535 (0.595)	0.827 (0.705)
Nov.	0.484	0.434 (0.486)	0.390 (0.421)
Dec.	0.392	0.332 (0.716)	0.378 (0.417)
Year	-0.043	0.679 (0.561)	0.747 (0.425)

(　) standard error

Table 5
Summary information for 100 traces by 3PLN and Gamma generators

Generator	3PLN	GAMMA
Number of generated negative values	863 (.92%)	822 (.88%)
CPU time (sec)	19	457
Cost (Yen)	310	4700

分布とGAMMA 分布の選択による差異は顕著でないので、非対称分布へのあてはめ手法として3PLN 分布は、実用的にもより簡便であるといえよう。

(3) 式にもどって、係数行列 Bが上述した方法で決定されれば、Y 系列（ここでは、７８年間の月降水量）が既知であるから、G 系列は $G = B^{-1}Y$ で計算される。従って、この変換によってもg_iの平均値、分散、および歪度ベクトルは計算される。しかしながら、この手法ではTable 1に示されるg_iの2 次までの積率は一致するが、(15) 式による歪度とは異なる。そこで、$G=B^{-1}Y$ から計算されるg_i の歪度を使った場合、模擬発生して得られる (3) 式の月降水量 y_i が観測値の歪度を保存するかを調べる。上述したシミュレーション結果においても、3PLN 分布とGAMMA 分布の選択による差異はほとんどないことがわかったので、便宜上3PLN 分布を用いる。発生過程はすでに述べた方法と同様に月降水量および年降水量の3 次までの積率を100組得る。唯一の違いは、歪度は $G= B^{-1}Y$ から計算する点である。このシミュレーションによる歪度（100個の平均値）の結果だけをTable 6に示す。すなわち、$G=B^{-1}Y$から計算した歪度を用いては、月降水量の歪度は実測値のそれ（Table 4）を保存しない。ただし、発生年降水量の歪度は実測値のそれに近い。

4. おわりに

水文量統計解析を問わず、多くの分野で多変数をあつかう機会が多くなってきている。本報告では、多変数解析上大きな障害となる変数間の相関を除くために、直交変換を用いた。さらに、非対称分布を代表する3一変数対数正規分布とガンマ分布の実際上の適用の難易度を比較検討した。

Table 6
Mean of skewness for 100 traces, each trace having a length of 78 years, when skewness by the transformation of $G = B^{-1}Y$ is used

Month	Skew
Jan.	0.313
Feb.	0.106
Mar.	0.220
Apr.	0.214
May	0.231
Jun.	0.324
Jul.	0.353
Aug.	0.569
Sep.	0.660
Oct.	0.190
Nov.	0.080
Dec.	0.038
Year	0.136

参考文献

(1) 室田 明、江藤剛治、田中 剛：水文量の和に関する統計的研究. 土木学会論文報告集、No. 223、pp.23−31、1974.
(2) 神田 徹：単変量解析. 水工学に関する夏期研修会講義集、A−3、1975.