

3成分地震入力波による構造物の地震応答解析について

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇  
 北海道大学工学部 正員 金子 孝吉  
 北海道大学工学部 〇 学生員 関野 昌人

1 まえがき

構造物の動的解析は、従来、水平動、上下動の単一成分を独立に扱う場合が多かった。著者らは、立体的に耐震設計を行う必要があると考え、水平動2成分と上下動との3成分の地震波を同時に立体的に入力した時(図1)の振動性状について、解析的に進めることにした。本論文では、3成分の地震波を同時に立体的に入力した時の周波数応答関数から応答スペクトルを理論的に誘導し、自然地震波による応答倍率と理論による応答倍率とを比較した。更に、応答波の確率密度を求めるため、入力波が白色雑音の時の二乗平均を求めた。今回の解析の対象構造物をガスタンクとした。

2 1質点3自由度系構造物の運動方程式とそのモード解

構造物のモデルとして、変位に比例する復元力が立体的に働く1質点3自由度系の線型振動モデルを仮定した(図2)。減衰は、速度に比例する粘性減衰を考えた。任意の方向に直角座標  $x, y, z$  をとれば、微小変位の範囲では、Lagrangeの方程式より、

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = -m \ddot{g}(t) \quad (1)$$

の3元連立常微分方程式となる。ただし

$$m_i = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & m \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad k = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

$$u(t) = \begin{Bmatrix} U_x(t) \\ U_y(t) \\ U_z(t) \end{Bmatrix} \quad \dot{u}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{U}_x(t) \\ \dot{U}_y(t) \\ \dot{U}_z(t) \end{Bmatrix} \quad \ddot{u}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{U}_x(t) \\ \ddot{U}_y(t) \\ \ddot{U}_z(t) \end{Bmatrix} \quad \ddot{g}(t) = \begin{Bmatrix} \ddot{g}_x(t) \\ \ddot{g}_y(t) \\ \ddot{g}_z(t) \end{Bmatrix}$$

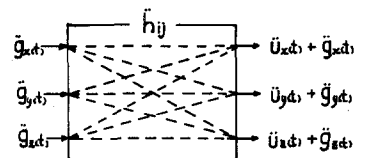


図1

ここで、 $m$ : 質点の質量 [kg·sec<sup>2</sup>/cm]  $c$ : 減衰係数 [kg·sec/cm]  $k_{ij}$ : 復原係数 [kg/cm]  $k_{ij} = k_{ji}$

$U_i(t)$ ,  $\dot{U}_i(t)$ ,  $\ddot{U}_i(t)$ : 質点の  $i$  方向の相対変位 [cm], 相対速度 [kine], 相対加速度 [gal]

$\ddot{g}_i(t)$ : 地震動の  $i$  方向の加速度 [gal]

式(1)を Laplace 変換により、初期条件  $u(0) = \dot{u}(0) = 0$  と仮定して解くと、

$$u(t) = \int_0^t h(t-\tau) \ddot{g}(\tau) d\tau \quad (2) \quad \ddot{u}(t) + \ddot{g}(t) = \int_0^t \dot{h}(t-\tau) \ddot{g}(\tau) d\tau \quad (3)$$

となる。ただし、 $h(t)$  は変位インパルス応答関数マトリックス、 $\dot{h}(t)$  は加速度インパルス応答関数マトリックスである。その代表的要素  $h_{ij}(t)$ ,  $\dot{h}_{ij}(t)$  は、次式で表わされる。

$$h_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \sum_k \frac{i \gamma_k}{\sqrt{\alpha_k}} \sin \sqrt{\alpha_k} t \quad (4)$$

$$\dot{h}_{ij}(t) = e^{-\lambda t} \sum_k \frac{i \gamma_k}{\sqrt{\alpha_k}} (\lambda^2 + \alpha_k) \sin(\sqrt{\alpha_k} t + \phi_k) \quad (5)$$

$t < 0$  のとき  $h_{ij}(t) = \dot{h}_{ij}(t) = 0$

ここで、 $\alpha_k$  は、特性方程式

$$\begin{vmatrix} (\lambda^2 - k_{xx}) - (s + \lambda)^2 & -k_{xy} & -k_{xz} \\ -k_{yx} & (\lambda^2 - k_{yy}) - (s + \lambda)^2 & -k_{yz} \\ -k_{zx} & -k_{zy} & (\lambda^2 - k_{zz}) - (s + \lambda)^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

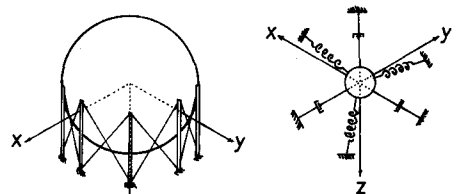


図2

の  $-(s+\lambda^*)$  についての根である。 $\sqrt{\alpha_k}$  は固有円振動数 (共振点) になる。また

$$\left. \begin{aligned} \delta_{0\ell} &= 1 & \delta_{\ell m} &= 0 \\ \varepsilon_{0\ell} &= (\lambda^2 - \chi_{mm}) + (\lambda^2 - \chi_{nn}) & \varepsilon_{\ell m} &= \chi_{\ell m} \\ \zeta_{0\ell} &= (\lambda^2 - \chi_{mm})(\lambda^2 - \chi_{nn}) - \chi_{mn}^2 & \zeta_{\ell m} &= \chi_{\ell m}(\lambda^2 - \chi_{nn}) + \chi_{\ell n} \chi_{mn} \end{aligned} \right\} \ell, m, n = x, y, z \text{ (cyclic)} \quad (7)$$

とすると、 $iY_{jk}$  は

$$iY_{j1} = \frac{\alpha_1^2 \delta_{ij} + \alpha_1 \varepsilon_{ij} + \zeta_{ij}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_3 - \alpha_1)} \quad iY_{j2} = \frac{\alpha_2^2 \delta_{ij} + \alpha_2 \varepsilon_{ij} + \zeta_{ij}}{(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_2 - \alpha_3)} \quad iY_{j3} = \frac{\alpha_3^2 \delta_{ij} + \alpha_3 \varepsilon_{ij} + \zeta_{ij}}{(\alpha_1 - \alpha_3)(\alpha_3 - \alpha_1)} \quad (8)$$

である。ただし、 $\lambda = \frac{C}{2m}$ 、 $\chi_{ij} = \chi_{ji} = -\frac{k_{ij}}{m}$ 、 $\phi_* = \tan^{-1} \left( -\frac{2\lambda\sqrt{\alpha_k}}{\lambda^2 - \sqrt{\alpha_k}} \right)$

$i$  : (= x, y, z) 応答方向       $j$  : (= x, y, z) 入力方向       $k$  : (= 1, 2, 3) 振動次数

とする。

### 3 振動特性

一般に、時間不変性を持つシステムにおいては、その入力が定常エルゴード性を持つ場合、出力もやはり定常エルゴード過程となる。ここでは、入力をガウス分布に従う定常エルゴード過程として、時間不変性を持つ線形振動系の応答の性質について述べる。システムの周波数応答関数とインパルス応答関数の関係から、式(4)(5)を Fourier 変換すると、周波数応答関数  $H_{ij}(\omega)$  は次式で与えられる。ただし  $\hat{\omega} = \sqrt{-1}$

$$H_{ij}(\omega) = \sum_k \frac{iY_{jk}}{\lambda^2 + \sqrt{\alpha_k} \omega^2 + 2\hat{\omega}\lambda\omega} \quad (\text{相対変位}) \quad (9)$$

$$H_{ij}(\omega) = \sum_k iY_{jk} \frac{\lambda^2 + \sqrt{\alpha_k} \omega^2 + 2\hat{\omega}\lambda\omega}{\lambda^2 + \sqrt{\alpha_k} \omega^2 + 2\hat{\omega}\lambda\omega} \quad (\text{絶対加速度}) \quad (10)$$

3方向の入力がすべて平均ゼロの定常ガウス過程と見なされる場合、二乗平均によって確率密度が完全に決定されるから、パワースペクトル密度を与えれば、すべての性質が決定される。要點の各応答方向の相対変位や絶対加速度のパワースペクトル密度  $S_{ik}(\omega)$  は、それぞれ  $H_{ij}(\omega)$  と、応答パワースペクトル密度  $S_{j_1 j_2}(\omega)$  ( $j_1 = j_2 = j$ )、相互パワースペクトル密度  $S_{j_1 j_2}(\omega)$  ( $j_1 \neq j_2$ ) を用いて表わすことができる。すなわち

$$S_{ik}(\omega) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} H_{ij_1}(\omega) H_{ij_2}(\omega) S_{j_1 j_2}(\omega) \quad (11)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} iY_{j_1 k_1} iY_{j_2 k_2} \frac{(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_1}} \omega^2)(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_2}} \omega^2) + (2\lambda\omega)^2}{(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_1}} \omega^2 + 2\lambda\omega\hat{\omega})(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_2}} \omega^2 + 2\lambda\omega\hat{\omega})} S_{j_1 j_2}(\omega) \quad (\text{相対変位}) \quad (12) \\ &= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{k_1} \sum_{k_2} iY_{j_1 k_1} iY_{j_2 k_2} \frac{(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_1}} \omega^2)(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_2}} \omega^2) + (2\lambda\omega)^2}{(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_1}} \omega^2 + 2\lambda\omega\hat{\omega})(\lambda^2 + \sqrt{\alpha_{k_2}} \omega^2 + 2\lambda\omega\hat{\omega})} S_{j_1 j_2}(\omega) \quad (\text{絶対加速度}) \quad (13) \end{aligned} \right.$$

3入力波がすべて互いに独立ならば、式(11)は

$$S_{ik}(\omega) = \sum_j |H_{ij}(\omega)|^2 S_{jj}(\omega) \quad (14)$$

すなわち、それぞれの入力に対する応答パワースペクトル密度の和に等しい。3入力波が一定の関係にあるとき例えば、比例関係、 $A_x \dot{q}_x(t) = A_y \dot{q}_y(t) = A_z \dot{q}_z(t)$  ( $A_x, A_y, A_z =$  定数) のとき

$$S_{ik}(\omega) = \left| \sum_j A_j H_{ij}(\omega) \right|^2 S_{ii}(\omega) \quad (15)$$

となる。すなわち、周波数応答関数が  $\left\{ \sum_j A_j H_{ij}(\omega) / A_i \right\}$  の系に、-入力  $\dot{q}_i(t)$  が作用した場合と同じ結果になる。

次に、入力が白色雑音 ( $S_{j_1 j_2}(\omega) = S_{0j_1 j_2} = \text{一定}$ ) の場合について、応答変位、応答加速度の二乗平均を求める。パワースペクトル密度の積分値は二乗平均に等しいから、式(12)(13)より、二乗平均は、留数計算を行って、

$$\text{二乗平均} = \sum_{k_1} \sum_{k_2} I_{k_1 k_2} \sum_{j_1} \sum_{j_2} iY_{j_1 k_1} iY_{j_2 k_2} S_{0j_1 j_2} \quad (16)$$

ただし、 $I_{k_1 k_2}$  は、変位に対しては

$$I_{k_1 k_2} = 4\pi\lambda \left\{ \frac{1}{(\sqrt{\alpha_{k_1}} - \sqrt{\alpha_{k_2}} - 4\lambda)^2 + 16\lambda^2 \sqrt{\alpha_{k_1}}} + \frac{1}{(\sqrt{\alpha_{k_2}} - \sqrt{\alpha_{k_1}} - 4\lambda)^2 + 16\lambda^2 \sqrt{\alpha_{k_2}}} \right\} \quad (17)$$

加速度に対しては

$$k_1 = k_2 = k \text{ のとき } I_{kk} = \pi \frac{\sqrt{\alpha_k} + 5\lambda}{4\lambda} \quad k_1 \neq k_2 \text{ のとき } I_{k_1 k_2} = \pi \left( \frac{E_{k_1 k_2}}{D_{k_1 k_2}} + \frac{E_{k_2 k_1}}{D_{k_2 k_1}} \right) \quad (18)$$

ここで、 $D_{klk2} = 4\lambda\sqrt{\alpha_{k1}}(\sqrt{\alpha_{k1}+\lambda})(\sqrt{\alpha_{k2}}-\sqrt{\alpha_{k2}+\lambda})(\sqrt{\alpha_{k1}}-\sqrt{\alpha_{k2}}-4\lambda)^2+16\lambda^2\sqrt{\alpha_{k1}}$

$$E_{klk2} = [2\lambda^2(3\sqrt{\alpha_{k1}}-\lambda)(\sqrt{\alpha_{k2}}+\lambda)(\sqrt{\alpha_{k2}}-\sqrt{\alpha_{k1}}+2\lambda)+4\lambda^2(\sqrt{\alpha_{k1}}-\lambda)^2-(2\lambda\sqrt{\alpha_{k1}})^2(\sqrt{\alpha_{k1}}-3\lambda)(\sqrt{\alpha_{k2}}-3\lambda)+4\lambda^2(\sqrt{\alpha_{k1}}-\lambda)(\sqrt{\alpha_{k1}}-\lambda)^2-3(2\lambda\sqrt{\alpha_{k1}})] \\ \times \sqrt{\alpha_{k1}}(\sqrt{\alpha_{k1}}-\sqrt{\alpha_{k2}}-8\lambda)^2 - [2\lambda^2(3\sqrt{\alpha_{k1}}-\lambda)2\lambda\sqrt{\alpha_{k1}}(\sqrt{\alpha_{k2}}-3\lambda)+2\lambda\sqrt{\alpha_{k1}}(\sqrt{\alpha_{k2}}+\lambda)(\sqrt{\alpha_{k2}}-\sqrt{\alpha_{k1}}+2\lambda)+4\lambda^2(\sqrt{\alpha_{k1}}-\lambda)^2] \\ + 4\lambda^2 2\lambda\sqrt{\alpha_{k1}}\{(2\lambda\sqrt{\alpha_{k1}})^2-3(\sqrt{\alpha_{k1}}-\lambda)^2\}\lambda(5\sqrt{\alpha_{k1}}-\sqrt{\alpha_{k2}}-4\lambda)$$

となる。入力が平均ゼロの定常ガウス確率過程と見なされる場合、二乗平均値は分散 $\sigma^2$ に等しくなるから、確率密度が求まる。

#### 4 数値解析例

表1に示す構造諸元を持つガスタンクについて計算した。先づ、入力として単位正弦波を、x方向のみに入力した。絶対加速度の応答波形の例を図3に示す。正弦波の周期を変えて、定常状態における各方向の応答最大値をプロットしたものが図4である。正弦波の周期によっては入力方向の応答値よりも大きな応答値を示す方向があることがわかる。次に、自然地震波を3方向から入力してタンクの挙動を調べる。地震動として、入戸で実測された1968年十勝沖地震の加速度記録(図5)を用いた。それによる各方向の絶対加速度、相対変位、相対速度の応答波形を図6~8に示す。尚x, y, zの各方向を、それぞれNS, EW, UD方向とした。図5~8の波形のうち、加速度の波形についてスペクトル解析による周期分析を行、た結果、入力加速度のパワースペクトル密度(図9)、応答絶対加速度のパワースペクトル密度(図10)及び応答から応答倍率(図11)が得られた。図11の応答倍率は十勝沖地震の地震動によるもので

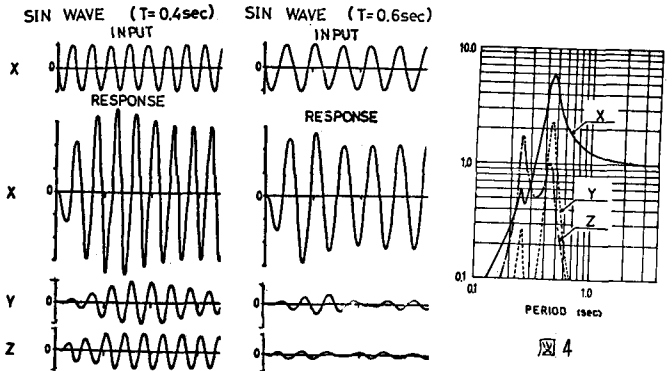


図3

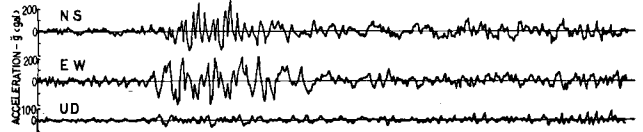


図5

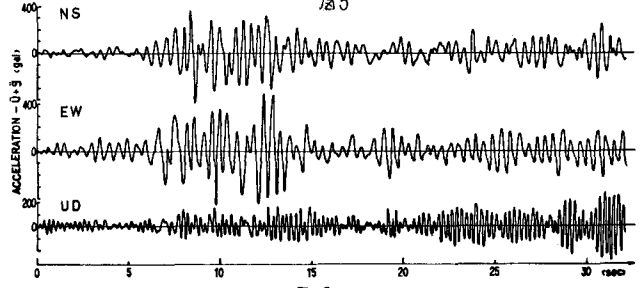


図6

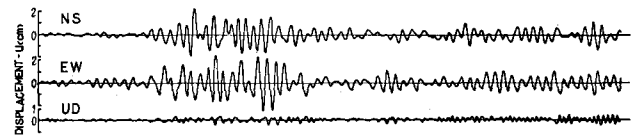


図7

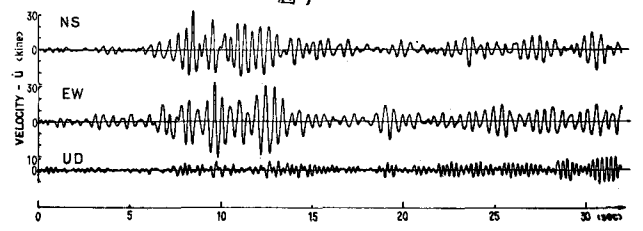


図8

質量	$m = 1 \times 10^3 \text{ kg sec}^2/\text{cm}$
減衰係数	$c = 2 \times 10^3 \text{ kg sec}/\text{cm}$
復原係数	$\text{kg}/\text{cm}$
	$\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 10^4 & & \\ & 2 \times 10^4 & 2 \times 10^4 \\ 6 \times 10^4 & 6 \times 10^4 & 6 \times 10^4 \end{bmatrix} \text{ sym.}$
	$T_1 = 0.47 \text{ sec}$
共振点	$T_2 = 0.44 \text{ sec}$
	$T_3 = 0.25 \text{ sec}$

表1 構造諸元

一般性がないので、式(13)を用いて応答倍率を求めてみる。ただし、入力波は、上下動の振幅を水平動の振幅の半分 ( $\ddot{g}_{x(t)} = \ddot{g}_{y(t)} = 2\ddot{g}_{z(t)}$ つまり  $S_{xx(\omega)} = S_{yy(\omega)} = 4S_{zz(\omega)} = S_0(\omega)$ ) と仮定した。入力波間の相関関係によって応答パワースペクトル密度及び応答倍率は異なる。図12に、3入力波が互いに独立の場合(CASE1)、全く等しい場合(CASE2)、水平動が等しく上下動が独立の場合(CASE3)についての応答倍率を示した。自然地震波入力による応答倍率(図11)と周波数応答関数から求めた応答倍率(図12)は、ほぼ一致する。NS、EW方向では周期の長い第1、第2共振点が卓越し、UD方向は周期の短い第3共振点が卓越していることがわかる。式(16)を用いて二乗平均を図示(図13)し、CASE1~3の差異を表わした。入力波を平均ゼロの定常確率過程と見なすと、CASE1の場合

$$\begin{aligned} \text{分散 } \sigma_{xx}^2 = \sigma_{yy}^2 &= 3010 S_0, \quad \sigma_{zz}^2 = 275.8 S_0 \\ \text{標準偏差 } \sigma_{xx} = \sigma_{yy} &= 17.3\sqrt{S_0}, \quad \sigma_{zz} = 16.6\sqrt{S_0} \end{aligned}$$

$$\text{よって, } P[|\dot{u}_{x(t)} + \dot{g}_{x(t)}| > 17.3\sqrt{S_0}] = 31.7\%$$

$$P[|\dot{u}_{x(t)} + \dot{g}_{x(t)}| > 34.7\sqrt{S_0}] = 4.6\%$$

$$P[|\dot{u}_{y(t)} + \dot{g}_{y(t)}| > 16.6\sqrt{S_0}] = 31.7\%$$

$$P[|\dot{u}_{y(t)} + \dot{g}_{y(t)}| > 33.2\sqrt{S_0}] = 4.6\%$$

となる。

### 5 あとがき

3成分の地震波を同時に立体的に入力して得た周波数応答関数を用いて、構造物の運動を3次元的に考えることができる。

今回、解析モデルを7自由度系と仮定したが、本解析法は、2自由度系、n自由度系、n自由度系の多点モデルに拡張が可能のみならず、各方向の回転を考慮した7自由度系の剛体モデルにも応用することができる。

計算には、北海道大学大型計算機センターのFACOM230-60/75を使用した。

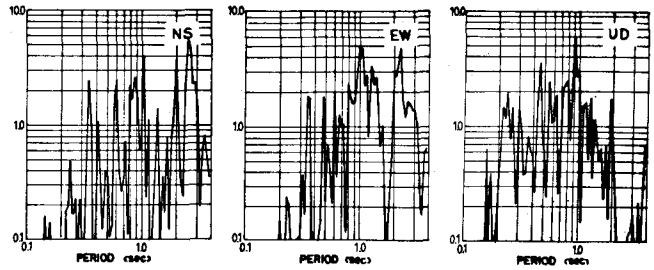


図9

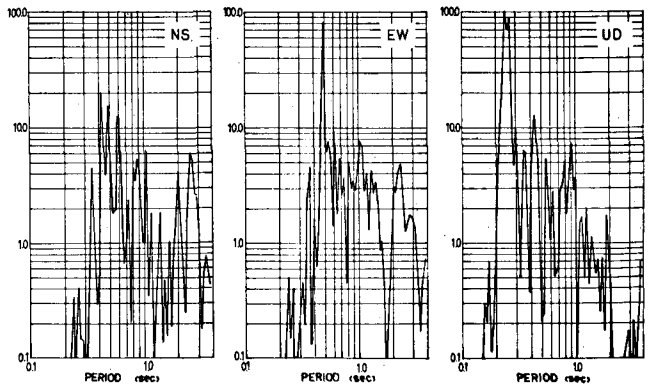


図10

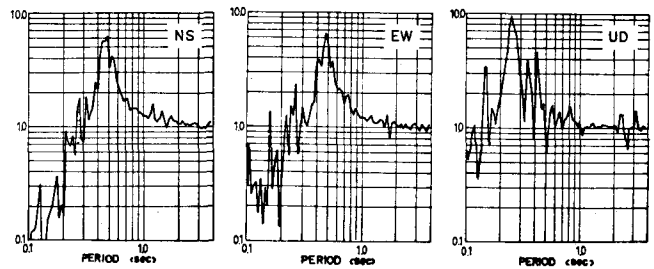


図11

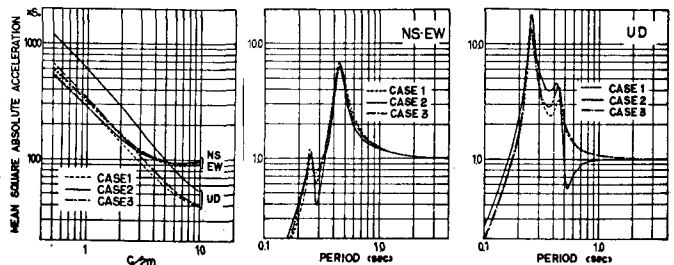


図12

図13