土木学会北海道支部　論文報告集　昭和52年度

変断面連続桁の走行荷重による振動性状について

北海道大学工学部 正 員 渡辺 昇
北海道大学工学部 正 員 林川 俊郎
北海道大学工学部 学生員○下 山 哲志

1 まえがき

本研究は、桁の曲げ振動の動的剛性マトリックスを用いて、変断面連続桁の固有値および固有関数を求め、変断面連続桁上を、集中荷重が一定速度で移動する場合について、アフィン荷重展開法により解析し 桁の動的たわみが、移動速度・径間長・径間割・曲げ剛性などにより、どのように変化するかを調べたものである。

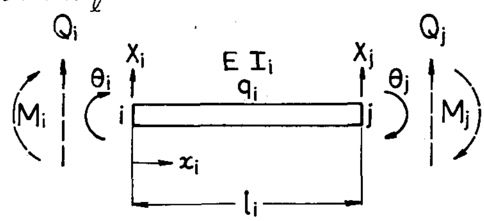
2 固有値および固有関数

桁の曲げ振動の微分方程式より得られる固有関数は、一般に式(1)の様に三角関数と双曲線関数の和となる。

$$X(x)=A\cos\frac{\lambda}{\ell}x+B\sin\frac{\lambda}{\ell}x+C\cosh\frac{\lambda}{\ell}x+D\sinh\frac{\lambda}{\ell}x \qquad (1)$$

ここで A～Dは積分定数，λは固有値

桁の曲げ振動の動的剛性マトリックスは、式(2)で与えられる。すなわち、桁の左端 i ($x_i=0$)，桁の右端 j ($x_i=l_i$) に対する外力 F_i・F_j，変形量 y_i・y_j は、各要素が三角関数および双曲線関数を含んだ［4×4］の正方対称マトリックス（動的剛性マトリックス）［K_{ij}］で関係づけられる。[1]



図－1

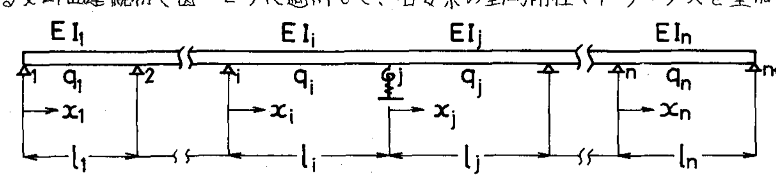
$$\begin{Bmatrix}F_i\\F_j\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{ij}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\y_j\end{Bmatrix}\quad ここで\quad \{F\}=\begin{Bmatrix}Q\\M\end{Bmatrix}\begin{matrix}\cdots せん断力\\ \cdots 曲げモーメント\end{matrix}\qquad \{y\}=\begin{Bmatrix}X\\\theta\end{Bmatrix}\begin{matrix}\cdots たわみ\\ \cdots たわみ角\end{matrix} \qquad (2)$$

また、変形量｛y｝と積分定数｛C｝は積分定数マトリックス［R_{ij}］で関係づけられる。[1]

$$\{C\}_i=\begin{bmatrix}R_{ij}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}y_i\\y_j\end{Bmatrix}\quad ここで\quad \{C\}_i=\{A,B,C,D\}_i^T \qquad (3)$$

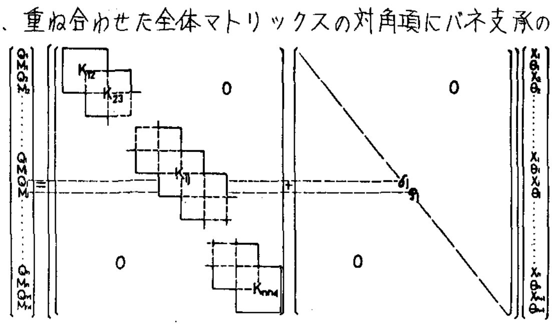
式(2)を中間にバネ支承を有する変断面連続桁（図－2）に適用して、各要素の動的剛性マトリックスを重ね合わせる。ここで

EI：曲げ剛性
q：鋼 重
ℓ：径間長
g：重力加速度



図－2

さらに、重ね合わせた全体マトリックスの対角項にバネ支承の項を加え合わせて（式(4)）



(4)

ここで、δ 鉛直バネ定数，φ 回転バネ定数

境界条件を代入して、分割マトリックス化すると式(5)となる。この式が成立するためには、$\{K_{\beta\beta}\}$の行列式

$$\left\{\begin{array}{c} F \\ \hline F=0 \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c|c} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ \hline K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ \hline y \end{array}\right\} \qquad (5) \qquad\qquad \left| K_{\beta\beta} \right| = 0 \qquad (6)$$

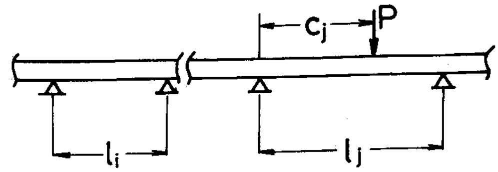
は零でなければならない。したがって、式(6)が固有振動数方程式となる。
式(6)から求められた固有値λを式(3)に代入して、境界条件より各径間の積分定数が決定し、i径間のk次の固有関数は、式(7)で表現される。

$$X_{ki}(x_i) = {}_kA_i \cos\lambda_{ki}\frac{x_i}{l_i} + {}_kB_i \sin\lambda_{ki}\frac{x_i}{l_i} + {}_kC_i \cosh\lambda_{ki}\frac{x_i}{l_i} + {}_kD_i \sinh\lambda_{ki}\frac{x_i}{l_i} \qquad (7)$$

3 振動アフィン荷重展開

各径間について、桁の曲げたわみに関する微分方程式は

$$EI_i\frac{d^4W(x_i)}{dx_i^4} = p_i(x_i) \qquad (8)$$



図－3

添字iは、第i径間におけるものを示しており、$p_i(x_i)$はi径間に載荷されていると考えられる分布荷重強度を表わしている。ここで、桁の境界条件を満足する固有関数$X_{ki}(x_i)$が直交条件を満たしていることから、$p_i(x_i)$が$X_{ki}(x_i)$で級数展開できる。[2]

$$p_i(x_i) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_i}{g}\,a_k\,X_{ki}(x_i) \qquad ここで \quad a_k = \frac{\sum_{s=1}^{n}\int_0^{l_s} p(x)\,X_{ks}(x_s)\,dx_s}{N_k^2} \qquad (9)$$

$$N_k^2 = \sum_{s=1}^{n}\int_0^{l_s}\frac{g_s}{g}X_{ks}^2(x_s)\,dx_s = \frac{1}{2g}\sum_{s=1}^{n}\frac{g_s}{l_s}\left({}_kA_s^2 + {}_kB_s^2 + {}_kC_s^2 - {}_kD_s^2\right)$$

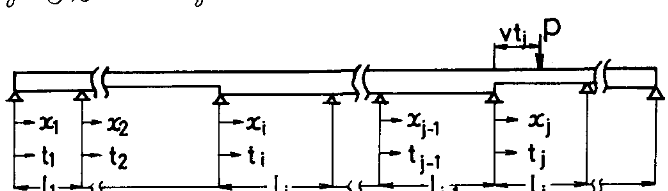
ここで、図－3の様な集中荷重Pがj径間のc_jの位置に作用している時のi径間の分布荷重強度は、式(9)より、式(10)となる。

$$p_i(x_i) = \frac{Pg_i}{g}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_{kj}(c_j)}{N_k^2}X_{ki}(x_i) \qquad (10)$$

4 n径間変断面連続桁の走行荷重による強制振動の解析理論

粘性減衰を考慮した桁の曲げ振動の微分方程式は、式(11)で与えられる。ここで、mは減衰定数である。

$$\frac{\partial^2W(x,t)}{\partial t^2} + 2m\frac{\partial W(x,t)}{\partial t} + \frac{gEI}{g}\frac{\partial^4W(x,t)}{\partial x^4} = \frac{g}{g}p(x,t) \qquad (11)$$



図－4

集中荷重Pが、第j径間を移動している場合，微分方程式の解を次式の様に、固有関数$X(x)$と基準座標$T(t)$の積の級数解で表わす。ここで、$W_i(x_i, t_j)$は、集中荷重Pが第j径間を時間t_jだけ、

$$\begin{array}{l} W_1(x_1, t_j) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{k1}(x_1)\,T_{kj}(t_j) \\ \text{-------------------------} \\ W_i(x_i, t_j) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{ki}(x_i)\,T_{kj}(t_j) \\ \text{-------------------------} \\ W_n(x_n, t_j) = \sum_{k=1}^{\infty} X_{kn}(x_n)\,T_{kj}(t_j) \end{array} \qquad (12)$$

移動する時の第i径間のx_iの位置における動的たわみを表わしている。

集中荷重Pの振動アフィン荷重展開式(10)において、$c_j = vt_j$を代入すると、i径間の荷重展開は、

$$p_i(x_i, t_j) = \frac{Pg_i}{g}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_{kj}(vt_j)}{N_k^2}X_{ki}(x_i) \qquad (13)$$

すなわち、式(13)は集中荷重Pが第j径間をvt_jだけ移動する時の第i径間のx_iの位置に作用する分布荷重強度を表わしている。式(12)，式(13)を式(11)に代入して、整理すると、i径間において次式の様な時間t_jに関する微分方程式(14)が得られる。

$$\frac{d^2T_{kj}(t_j)}{dt_j^2}+2m\frac{dT_{kj}(t_j)}{dt_j}+\frac{gEI_i}{g_i}\left(\frac{\lambda_{ki}}{l_i}\right)^4T_{kj}(t_j)=\frac{P}{N_k^2}\,X_{kj}(vt_j) \tag{14}$$

桁の円振動数は、全径間で等しいので、次式の様に置き換えて（ここで、$\dot{T}=\frac{dT}{dt}$）

$$\ddot{T}_{kj}(t_j)+2m\dot{T}_{kj}(t_j)+\omega_k^2\,T_{kj}(t_j)=\gamma_k\,X_{kj}(t_j) \tag{15}$$

ここで、$\omega_k^2=\frac{gEI_i}{g_i}\left(\frac{\lambda_{ki}}{l_i}\right)^4$……桁の固有円振動数，$\gamma_k=\frac{P}{N_k^2}$

式(15)をラプラス変換して解くと，次式の様な第1項$\eta_{kj}(t_j)$が自由振動，第2項$\varphi_{kj}(t_j)$が強制振動を表わす解を得る。

$$T_{kj}(t_j)=\eta_{kj}(t_j)+\varphi_{kj}(t_j) \tag{16}$$

ここで、

$$\eta_{kj}(t_j)=T_{kj}(0)\,e^{-mt_j}\cos\left(\sqrt{\omega_k^2-m^2}\,t_j\right)+\left\{\dot{T}_{kj}(0)+mT_{kj}(0)\right\}\frac{e^{-mt_j}}{\sqrt{\omega_k^2-m^2}}\sin\left(\sqrt{\omega_k^2-m^2}\,t_j\right)$$

$$\varphi_{kj}(t_j)=\frac{\gamma_k}{\sqrt{\omega_k^2-m^2}}\int_0^{t_j}X_{kj}(vt_j)\,e^{-m(t_j-\tau)}\sin\left(\sqrt{\omega_k^2-m^2}(t_j-\tau)\right)d\tau$$

式(16)を式(12)に代入して、時間的連続条件，すなわち荷重Pが第$j-1$径間を通過する瞬間とj径間に進入する時のたわみおよびたわみ速度は等しい。したがって、

$$W_i(x_i,\ t_{j-1}=l_{j-1}/v)=W_i(x_i,\ t_j=0),\quad \dot{W}_i(x_i,\ t_{j-1}=l_{j-1}/v)=\dot{W}_i(x_i,\ t_j=0) \tag{17}$$

式(17)より式(16)の第1項$\eta_{kj}(t_j)$中の未知数$T_{kj}(0)$および$\dot{T}_{kj}(0)$は次式で求まる。

$$T_{kj-1}(l_{j-1}/v)=T_{kj}(0)\qquad \dot{T}_{kj-1}(l_{j-1}/v)=\dot{T}_{kj}(0) \tag{18}$$

特別な場合として、荷重Pが第1径間を移動する場合、荷重Pが桁に作用する直前では、桁は静止状態にあるので、たわみおよびたわみ速度は零である。したがって、$T_{k1}(0)=\dot{T}_{k1}(0)=0$となり

$$T_{k1}(t_1)=\varphi_{k1}(t_1)\qquad \dot{T}_{k1}(t_1)=\dot{\varphi}_{k1}(t_1) \tag{19}$$

故に，式(18)，式(19)より、$T_{kj}(t_j)$は順次漸化的に求まる。

―動的たわみの解―

i）荷重Pが第1径間を移動する場合

$$W_i(x_i,t_1)=\sum_{k=1}^{\infty}X_{ki}(x_i)\,T_{k1}(t_1) \tag{20}$$

ここで、$T_{k1}(t_1)=\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\left\{{}_kA_1CES_{k1}(t_1)+{}_kB_1SES_{k1}(t_1)+{}_kC_1CHS_{k1}(t_1)+{}_kD_1SHS_{k1}(t_1)\right\}$

ii）荷重Pが第j径間を移動する場合

$$W_i(x_i,t_j)=\sum_{k=1}^{\infty}X_{ki}(x_i)\,T_{kj}(t_j) \tag{21}$$

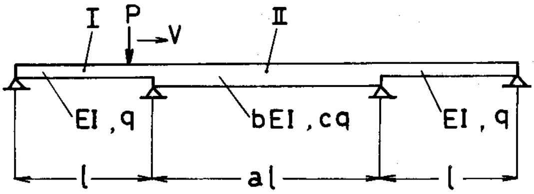
ここで、

$$T_{kj}(t_j)=T_{kj-1}(l_{j-1}/v)\,e^{-mt_j}\cos\alpha_k t_j+\left\{\dot{T}_{kj-1}(l_{j-1}/v)+mT_{kj-1}(l_{j-1}/v)\right\}\frac{e^{-mt_j}}{\alpha_k}\sin\alpha_k t_j$$
$$+\frac{\gamma_k}{\alpha_k}\left\{{}_kA_jCES_{kj}(t_j)+{}_kB_jSES_{kj}(t_j)+{}_kC_j\,CHS_{kj}(t_j)+{}_kD_jSHS_{kj}(t_j)\right\}$$

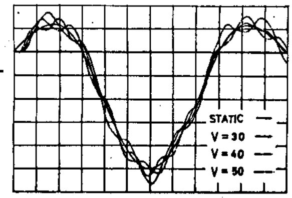
$$\alpha_k=\sqrt{\omega_k^2-m^2},\qquad \mu_{kj}=\frac{\lambda_{kj}}{l_j}v$$

$$CES_{kj}(t_j)=\int_0^{t_j}\cos\mu_{kj}\tau\cdot e^{-m(t_j-\tau)}\sin\alpha_k(t_j-\tau)\,d\tau,\quad SES_{kj}(t_j)=\int_0^{t_j}\sin\mu_{kj}\tau\cdot e^{-m(t_j-\tau)}\sin\alpha_k(t_j-\tau)\,d\tau$$

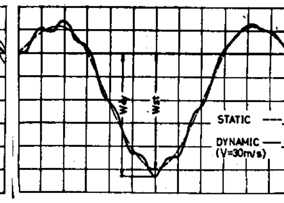
$$CHS_{kj}(t_j)=\int_0^{t_j}\cosh\mu_{kj}\tau\cdot e^{-m(t_j-\tau)}\sin\alpha_k(t_j-\tau)\,d\tau,\quad SHS_{kj}(t_j)=\int_0^{t_j}\sinh\mu_{kj}\tau\cdot e^{-m(t_j-\tau)}\sin\alpha_k(t_j-\tau)\,d\tau$$



図－5



図－6



図－7

5　数値計算例

a \ b	1.0	2.0	3.0	4.0
1.0	3.1415926	3.3373328	3.4582940	3.5405448
1.5	2.4893567	2.7322984	2.8977571	3.0279505
2.0	1.9633011	2.1718234	2.3105901	2.4211965
2.5	1.6135644	1.7905163	1.9044819	1.9940470
3.0	1.3698757	1.5238478	1.6204065	1.6951467

1-st EIGEN VALUE　(c=1.0)

表－1

図－5の様な対称三径間連続桁において、パラメーターa,b,cを用いて整理する。表－1は、パラメーターの変化に伴う1次固有値λ_{11}を示している。

図－6は、次の断面諸元の桁を集中荷重P＝1ton が速度（v＝30, 40, 50 m/s）で移動する時の中央径間中央（II点）における動的たわみ影響線を示している。

$$\left[\begin{array}{l} a=2.0\ ,\ b=3.0\ ,\ c=1.0\ ,\ l=15.0\,m \\ EI=0.2\times10^{6}\,ton\,m^{2}\ ,\ g=1.0\ ton/m \end{array}\right]$$

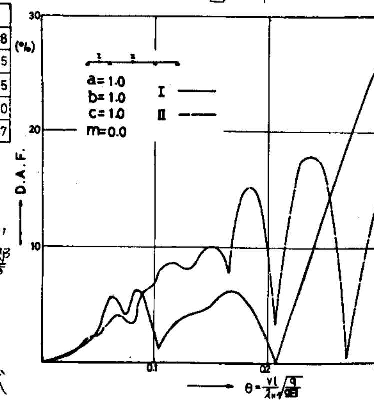
ここで、桁の動的挙動を示す指標として、動的増加率（D.A.F.）を次式で定義する。

$$D.A.F.=\frac{W_{dy}-W_{st}}{W_{st}}\times100\quad(\%)\tag{22}$$

ここで、W_{dy}：最大動的たわみ
　　　W_{st}：最大静的たわみ　（図－7参照）

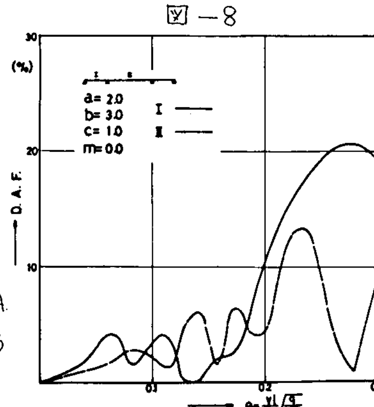
また、移動速度・桁の断面諸元の指標として、θを次式で定義する。

$$\theta=\frac{\mu_{11}}{\omega_1}\qquad ここで\ \mu_{11}=\frac{\lambda_{11}}{l_1}v,\quad \omega_1=\sqrt{\frac{gEI_1}{\gamma_1}\left(\frac{\lambda_{11}}{l_1}\right)^4}\tag{23}$$



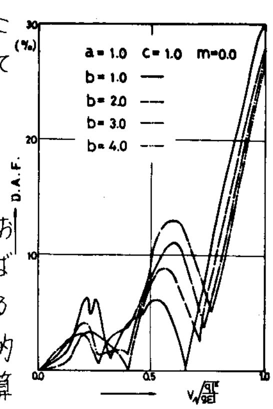
図－8

図－8，図－9は、側径間中央（I点）と中央径間中央（II点）のD.A.F.－θ曲線である。この曲線において、D.A.F.の値が減少する場合があるが、これは振動成分の谷の部分がW_{dy}に相当するためである。

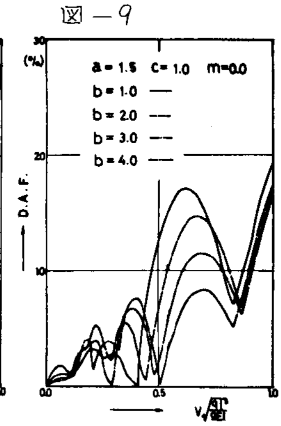


図－9

図－10，図－11は、中央径間の曲げ剛性を変化させた場合の側径間中央（I点）におけるD.A.F.の変化を示したものである。ここで、横軸のパラメーターとして、$v\sqrt{\gamma_1 l_1^2/gEI_1}$を用いている。



図－10



図－11

6　あとがき

以上の様に、動的剛性マトリックス法により、固有値および固有関数を求め、振動アフィン荷重展開を導入すれば、変断面連続桁の走行荷重による動的応答を容易に求めることができ、さらに中間にバネ支承を有する連続桁の動的問題も解析可能となった。本計算は、北海道大学大型計算機センターのFACOM-230-75を使用した。

1）小泉・渡辺・金子：アフィン荷重の構造力学への応用に関する研究，土木学会北海道支部論文報告集33号
2）安部清孝：実用フーリエ級数，森北出版