

連続格子桁橋の走行荷重による振動性状について

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇
 北海道大学工学部 正員 〇林川 俊郎

1. まえがき

走行荷重による橋梁の振動問題に関する研究は古くから行なわれ、主として橋梁上を一定荷重が一定速度で移動する振動問題として理論的・実験的研究がなされてきた^{1,2,3)}。しかしながら、その研究内容は橋梁を単純桁あるいは橋軸方向に両端単純支持された直交異方性板として取り扱っている場合が多い。このことから、著者らは走行荷重による変断面連続桁および任意の境界条件をもつ格子桁橋についてすでに発表している^{4,5)}。

本研究の目的はアフィン荷重展開法⁶⁾を応用して、幅員の大きい橋梁をより実際に近く橋軸方向に連続支持された連続格子桁橋(ただし、ねじり剛性は無視する)とみなし、走行荷重による動的たわみ関数を誘導する。つぎに数値計算例として、一定荷重が一定速度で走行するとき、橋梁に生じる動的な影響が走行荷重の速度、板の曲げ剛性、幅員および支間長によつてどのように変化するかを調べるものである。

2. 理論の概要

橋軸方向に連続支持された直交異方性板上を荷重が移動するとき、その任意の点における動的応答を求めたわみ関数を誘導することは、一般的にかなりの困難をともなう。ここでは、理論解析上の条件として、(1)直交異方性板のねじり剛性 $H=0$ 、ポアソン比 $\nu_x=\nu_y=0$ とする。(2)粘性減衰などによるエネルギー消散は考えない。(3)動的解析において、初期条件は小さいので無視する。また、振動にともなう面内力も無視する。(4)荷重は集中荷重について考え、一定速度で左から右へ走行する。以上の仮定を設ける。

2-1. 静的たわみ関数

ねじり剛性のない直交異方性板の基礎微分方程式は周知のごとく次式で与えられる。

$$D_x \partial^4 w / \partial x^4 + D_y \partial^4 w / \partial y^4 = p(x, y) \quad (1)$$

ここに、 D_x, D_y は板の曲げ剛性である。

図-1のように、第 s 径間に集中荷重 P が作用したとき、第 r 径間における静的たわみ関数は式(1)の解として次のおくことができる。

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{mnr} X_{mr}(x) Y_n(y) \quad (2)$$

ただし、 $X_{mr}(x), Y_n(y)$ はそれぞれ x 方向、 y 方向の境界条件を満足する固有関数である。

$$X_{mr}(x) = A_{mr} \cos \beta_{mr} x + B_{mr} \sin \beta_{mr} x + C_{mr} \cosh \beta_{mr} x + D_{mr} \sinh \beta_{mr} x \quad (3)$$

$$Y_n(y) = A_n \cos \beta_n y + B_n \sin \beta_n y + C_n \cosh \beta_n y + D_n \sinh \beta_n y \quad (4)$$

ここに、 $A_{mr} \sim D_{mr}, \beta_{mr}$ は r 径間の m 次の固有値 λ_{mr} から求められる定数、 $A_n \sim D_n, \beta_n$ は n 次の固有値 λ_n から求められる定数である。この固有関数を用いて、集中荷重 P をアフィン荷重展開すると次のようになる。

$$p(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mnr} X_m(x) Y_n(y) \quad (5)$$

この式(5)の両辺に $X_{m'}(x), Y_{n'}(y)$ を乗じて、 $x=0 \sim L_x, y=0 \sim L_y$ まで全連続平板領域について積分すると、固有関数の直交性から、

$$\int_0^{L_x} X_m(x) X_{m'}(x) dx = \begin{cases} N_m^2 & (m=m') \\ 0 & (m \neq m') \end{cases}, \quad \int_0^{L_y} Y_n(y) Y_{n'}(y) dy = \begin{cases} N_n^2 & (n=n') \\ 0 & (n \neq n') \end{cases} \quad (6)$$

最終的に、式(5)における荷重展開係数 P_{mnr} は次のように簡単な式として求められる。

$$P_{mnr} = P \cdot X_{ms}(x_0) Y_n(y_0) / (N_m^2 \cdot N_n^2) \quad (7)$$

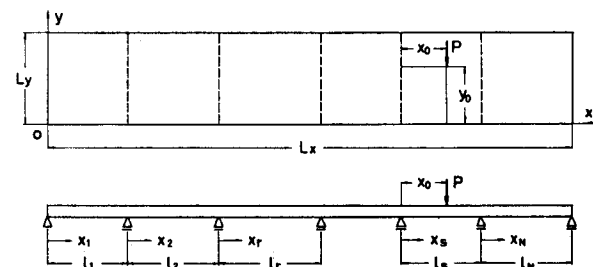


図-1 連続格子桁橋

したがって、式(2)、(5)を式(1)に代入することにより、

$$a_{mn} = P_{mn} / (D_x r \beta_{mr}^4 + D_y \beta_{nr}^4) \quad (8)$$

となる。この a_{mn} を式(2)に代入することにより、連続格子桁橋の仕意の点における静的たわみ状容易に求めることができる。

2-2. 動的たわみ関数

連続格子桁橋の上を任意荷重 $P(x, y, t)$ が一定速度 v (m/sec)で走行するときの動的応答について考える。そのとき、理論解析上の条件から、各径間における曲げ振動の基礎微分方程式は次のように与えられる。

$$D_x \partial^4 w / \partial x^4 + D_y \partial^4 w / \partial y^4 + \mu \partial^2 w / \partial t^2 = P(x, y, t) \quad (9)$$

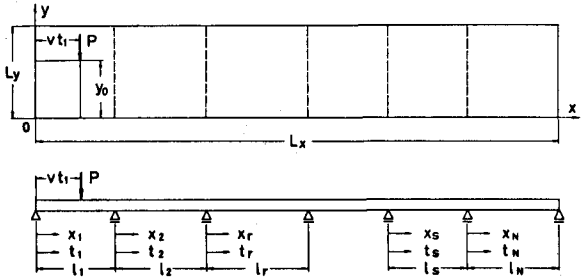


図-2 走行荷重が第1径間にある場合

ここに、 μ は板の単位面積あたりの質量である。ここでは、走行荷重 $P(x, y, t)$ を次のように各径間ごとに分割して考えることにする。

(i) 走行荷重が第1径間にある場合 ($0 \leq t_1 \leq l_1/v$)

図-2のように、走行荷重が第1径間上を通過するとき、各径間における微分方程式(9)の解は境界条件を満足している固有関数 $X_{mr}(x_r)$ 、 $Y_n(y)$ と時間の関数 $T_{mn}(t_1)$ の積の和として表わすことができる。つまり、

$$W(x_r, y, t_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_n(y) T_{mn}(t_1), \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad (10)$$

であり、 $W(x_r, y, t_1)$ は走行荷重が第1径間にあるときの第 r 径間における動的たわみ関数を意味している。さらに、任意荷重 $P(x, y, t)$ も式(5)と同様にして、 $x_0 = vt_1$ とおくことにより荷重展開できる。

$$P(x_r, y, t_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_n(y) P_{mn}(t_1), \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad (11)$$

ここに、 $P(x_r, y, t_1)$ は走行荷重が第1径間にあるときの第 r 径間における荷重分布状態を表わす。 $P_{mn}(t_1)$ は時間 t_1 によって変化する荷重展開係数である。そこで、式(10)、(11)を式(9)に代入すると、時間 t_1 に関する2階の常微分方程式を得る。

$$\ddot{T}_{mn}(t_1) + \alpha_{mn}^2 T_{mn}(t_1) = \frac{1}{\mu} P_{mn}(t_1) \quad (12)$$

$$\text{ここに、} \ddot{T}_{mn}(t_1) = d^2 T_{mn}(t_1) / dt_1^2, \quad \alpha_{mn}^2 = (D_x r \beta_{mr}^4 + D_y \beta_{nr}^4) / \mu \quad (13)$$

であり、 α_{mn} は連続格子桁橋の固有円振動数を表わす。上式(12)をLaplace変換により解くと、

$$T_{mn}(t_1) = \frac{1}{\mu \alpha_{mn}} \int_0^{t_1} P_{mn}(\tau) \sin \alpha_{mn}(t_1 - \tau) d\tau + T_{mn}(0) \cos \alpha_{mn} t_1 + \frac{1}{\alpha_{mn}} \dot{T}_{mn}(0) \sin \alpha_{mn} t_1 \quad (14)$$

となる。ここで、 $T_{mn}(0)$ 、 $\dot{T}_{mn}(0)$ は時間 $t_1=0$ における初期条件によって決まる積分定数である。いま、時間 $t_1=0$ において、連続格子桁橋が静止状態であるとすると、 $W(x_r, y, t_1=0) = 0$ 、 $\dot{W}(x_r, y, t_1=0) = 0$ である。したがって、第1径間に走行荷重があるときの動的たわみ関数は次のようになる。

$$W(x_r, y, t_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_n(y) \bar{\Psi}_{mnr_1}(t_1), \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad (15)$$

$$\text{ここに、} \bar{\Psi}_{mnr_1}(t_1) = \frac{1}{\mu \alpha_{mn}} \int_0^{t_1} P_{mn}(\tau) \sin \alpha_{mn}(t_1 - \tau) d\tau \quad (16)$$

(ii) 走行荷重が任意な第 s 径間にある場合 ($0 \leq t_s \leq l_s/v$, $s \geq 2$)

図-3のように、走行荷重が任意な第 s 径間上を通過するとき、各径間における動的たわみ関数および荷重は(i)の場合と同様にして、次のように表わすことができる。

$$W(x_r, y, t_s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_n(y) T_{mn}(t_s), \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad (17)$$

$$P(x_r, y, t_s) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_n(y) P_{mn}(t_s), \quad (r=1, 2, \dots, N) \quad (18)$$

この両式(17)、(18)を式(9)に代入することにより時間 t_s に関する2階の常微分方程式を得る。この解は、

$$T_{mn}(t_s) = \frac{1}{\mu \alpha_{mn}} \int_0^{t_s} P_{mn}(\tau) \sin \alpha_{mn}(t_s - \tau) d\tau + T_{mn}(0) \cos \alpha_{mn} t_s + \frac{1}{\alpha_{mn}} \dot{T}_{mn}(0) \sin \alpha_{mn} t_s \quad (19)$$

である。ここで、時間 $t_s=0$ における連続格子桁橋のたわみ曲面と、時間 $t_{s-1} = l_{s-1}/v$ におけるたわみ曲面とは同値である（時間的連続条件による）ことから、

$$W(x_r, y, t_s=0) = W(x_r, y, t_{s-1} = l_{s-1}/v)$$

$$\dot{W}(x_r, y, t_s=0) = \dot{W}(x_r, y, t_{s-1} = l_{s-1}/v)$$

$$\text{ただし、} s \geq 2, v=1, 2, \dots, N \quad (20)$$

である。したがって、式(19)における積分定数 $T_{mn}(0)$ は式(17)を時間的連続条件に代入することにより次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} T_{mn}(0) &= \Phi_{mnr,s-1}(l_{s-1}/v) + \Psi_{mnr,s-1}(l_{s-1}/v) \\ T_{mn}(0) &= \dot{\Phi}_{mnr,s-1}(l_{s-1}/v) + \dot{\Psi}_{mnr,s-1}(l_{s-1}/v) \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

したがって、任意な第 s 径間における走行荷重があるときの動的たわみ関数は次のようになる。

$$W(x_r, y, t_s) = \sum_{m,n}^{\infty} X_{mr}(x_r) Y_n(y) \{ \Phi_{mnr,s}(t_s) + \Psi_{mnr,s}(t_s) \} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに、} \Phi_{mnr,s}(t_s) &= \int_0^{t_s} P_{mn}(\tau) \sin \alpha_{mn} (t_s - \tau) d\tau \\ \Psi_{mnr,s}(t_s) &= T_{mn}(0) \cos \alpha_{mn} t_s + \frac{1}{\alpha_{mn}} \dot{T}_{mn}(0) \sin \alpha_{mn} t_s \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

つまり、 $\Phi_{mnr,s}(t_s)$ は Duhamel 積分で表示される強制振動の項であり、その具体的な積分は荷重分布状態、固有値、断面値が与えられれば容易に求められる。 $\Psi_{mnr,s}(t_s)$ は時間的連続条件により決まる積分定数を含んだ自由振動の項である。本解析では径間と時間を各径間ごとに取っているため、時間的連続条件を考慮する必要はある。しかし、その計算内容は式(21)のように漸化式であるため簡単にプログラム化ができる。

3. 数値計算例

数値計算例として、橋軸方向には3径間連続支持、幅員方向には両端自由の境界条件をもつ径間連続格子桁橋について考える。図-4は板の曲げ剛性 $D_x = D_y = 10^4 \text{ tm}$ 、質量 $\mu = 0.051 \text{ t} \cdot \text{sec}^2/\text{m}^2$ の格子桁橋の上を、一定集中荷重 $P=10 \text{ t}$ が一定速度 $v=30 \text{ m/sec}$ で板の中央を左から右へ走行するときの着目点（第1径間中央点）における静的たわみの影響線と動的たわみの影響線を示したものである。図-5は上述の条件のもとで第2径間中央点を着目点としたときの静的たわみの影響線と動的たわみの影響線を示したものである。

ここで、走行荷重による動的な影響を調べるために次式(24)で示される動的増加率(D.A.F.)を用いることにする。

$$(D.A.F.) = (w_d - w_s) / w_s \times 100 \quad (24)$$

ここに、 w_d は動的たわみの最大値、 w_s は静的たわみの最大値である。

また、計算の便宜上、板の曲げ剛性、質量、支間長、幅員長および速度を無次元化した速度パラメータ θ を用いる。

$$\theta = v \cdot \beta_{ms} / \alpha_{mn} \quad (25)$$

ここで、 α_{mn} は式(13)で示される連続格子桁橋の固有円振動数であり、 $\beta_{ms} = \lambda_{ms} / l_s$ である。

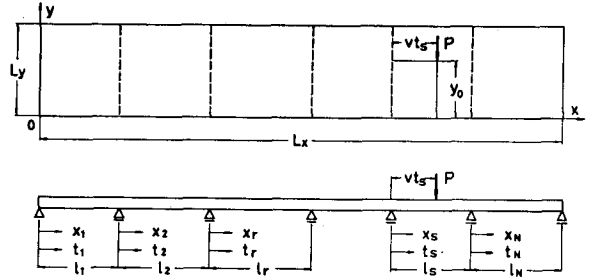


図-3 走行荷重が任意な第 s 径間にある場合

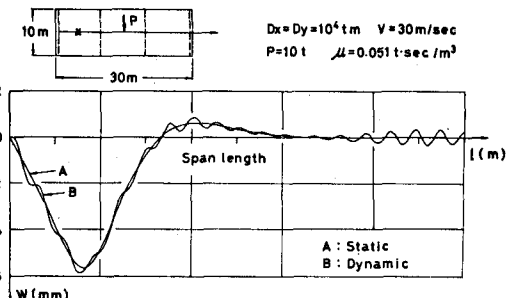


図-4 静的および動的たわみの影響線

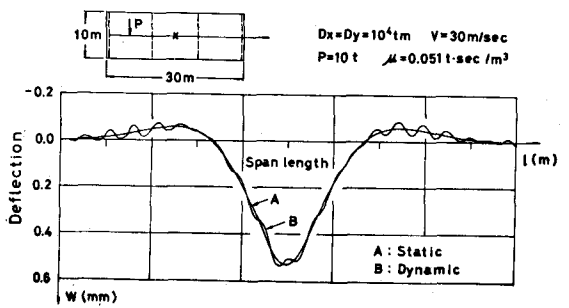


図-5 静的および動的たわみの影響線

いま、 $T_{11} = 2\pi/\alpha_{11}$ 、 $\beta_{1s} = \lambda_{1s}/l_s$ とおき、式(25)に代入すると、第s径間における1次の固有値 λ_{1s} により、

$$\theta = (\lambda_{1s}/\pi) \cdot \{ (T_{11}/2) / (l_s/v) \} \quad (26)$$

となる。すなわち、速度パラメーター θ は連続格子桁橋の第1次固有周期 T_{11} の1/2と走行荷重が第s径間を通過するに要する時間 l_s/v との比である。

図-6は支間長 $l_1=10m$ 、 $l_2=20m$ 、 $l_3=10m$ 、幅員 $L_y=10m$ で板の曲げ剛性 D_x, D_y が一定であるときの着目点AおよびBにおける動的増加率(D.A.F.)と速度パラメーター θ との関係を示したものである。図-7は板の曲げ剛性の比が $D_x:D_y=1:0.5$ のときの動的増加率と速度パラメーターとの関係を示したものである。図-8は板の曲げ剛性比が $D_{x1}:D_{x2}:D_{x3}=1:2:1$ 、 $D_{x2}=D_y$ のときの動的増加率と速度パラメーターとの関係を示したものである。

以上の計算結果から、第1径間中央点の着目点Aと第2径間中央点の着目点Bとを比較すると、着目点Bは時間的連続条件の影響により複雑に変化する。また、実際の連続格子桁橋における速度パラメーター θ の範囲はおおよそ、 $0.05 \leq \theta \leq 0.20$ である。したがって、走行荷重による動的増加率は約30%以下であると考えられる。

本研究における膨大な計算には、北海道大学計算機センターのFA COM 230-75を利用した。

(参考文献)

- 1) 平井一男; 種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用, 土木学会論文報告集, 第90号, 昭38.2, p29~36
- 2) 平井一男; 移動荷重をうける相対2辺単純支持, 他の2辺自由なる直交異方性板の振動性状について, 土木学会論文報告集, 第92号, 昭38.4, p1~10
- 3) 山田善一, 小堀為雄; ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究, 土木学会論文報告集, 第119号, 昭40.7, p1~9
- 4) 下山哲志, 渡辺昇, 林川俊郎; 多径間連続桁の走行荷重による振動性状について, 第32回土木学会年次学術講演会講演要集, 昭52.10, I-180
- 5) 林川俊郎, 渡辺昇, 小泉幹男; 格子桁橋の走行荷重による振動性状について, 第32回土木学会年次学術講演会講演要集, 昭52.10, I-185
- 6) 小泉幹男, 渡辺昇, 金子孝吉; アフィリ荷重の構造力学への応用に関する研究(その3), 第31回土木学会年次学術講演会講演要集, 昭51.10, I-1

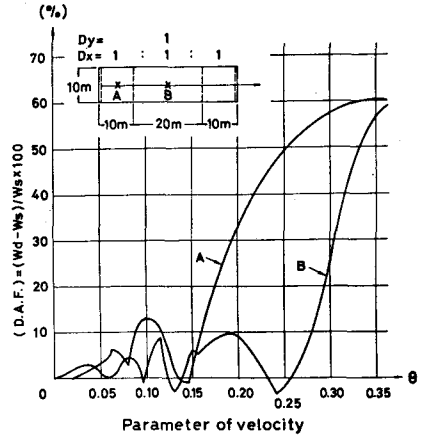


図-6 動的増加率と速度パラメーター

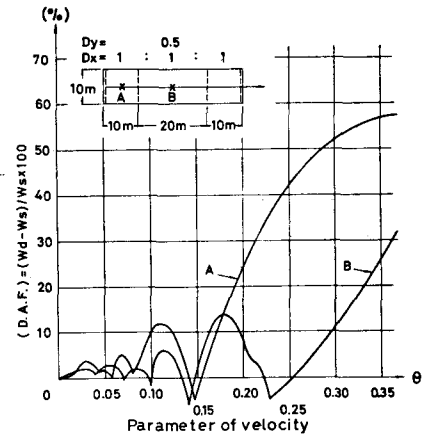


図-7 動的増加率と速度パラメーター

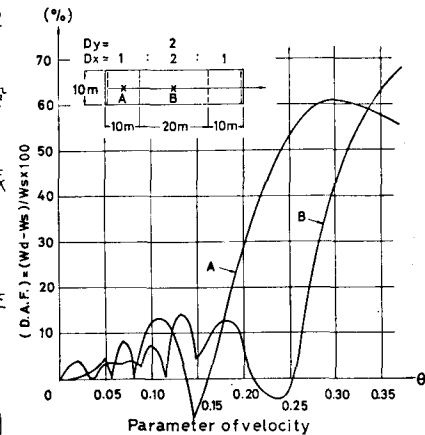


図-8 動的増加率と速度パラメーター