

走行荷重の慣性力を考慮した板の振動

北海道大学工学部 正員 能町 純雄
 北海道大学工学部 正員 角田与史雄
 北海道大学工学部 学生員 山本 茂

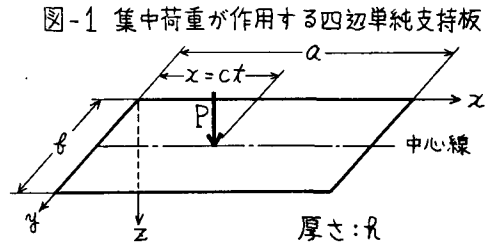
1. まえがき 一般に走行荷重による桁や板の振動問題では、荷重が構造物とともに振動することによる荷重の慣性力は無視されることが多いが、荷重質量および走行速度が大きくなれば、この慣性力は無視できなくなると考えられる。振動形解析法により、この荷重慣性力を考慮しようとするれば、高次振動を考えることによって複雑な問題となる。そこで本研究では振動形解析法とは異なった手法により、板の振動解析を試み、板の応答たわみに及ぼす荷重の慣性力の影響を明らかにした。

この荷重慣性力は荷重の質量と載荷点の加速度との積であり、そして載荷点加速度は時間のみの関数であるから、載荷点たわみを時間で全微分すべきである。これを近似的に時間で偏微分することもある。本研究ではこの比較を行なった。

2. 解析理論

図-1 のような四辺単純支持された矩形板(長さ: a , 幅: b , 厚さ: h , 密度: ρ , 剛性 D) の中心線上を集中荷重 P が一定速度 C で走行する場合を考える。

たわみを $w(x, y, t)$ とすると、荷重の慣性力を考慮した板の振動方程式は次式で示される。



$$D \Delta^2 w + R \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \left\{ P - \frac{P}{g} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + C^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} \cdot \delta(x-ct) \cdot \delta(y - \frac{b}{2}) \quad \text{----- (1)}$$

ただし、 δ はディラックのデルタ関数

ある時刻 t におけるたわみ曲線を、 $x=ct$ に荷重が載荷しているときの静たわみ曲線に時刻 t の関数である倍率 $f(t)$ をかけたものと仮定する。すなわち、

$$w(x, y, t) = f(t) \cdot \frac{4P}{a^2 b D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi ct}{a} \sin \frac{n\pi}{2}}{\left\{ \left(\frac{m\pi C}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad \text{----- (2)}$$

(1) 式の両辺にたわみ w を乗じ、 x について $0 \sim a$, y について $0 \sim b$ までは積分すれば次式が得られる。

$$f(t) \cdot P \cdot w(ct, \frac{b}{2}, t) + R \rho \int_0^b \int_0^a w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dy dx = P \cdot w(ct, \frac{b}{2}, t) - \frac{P}{g} w(ct, \frac{b}{2}, t) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial x} + C^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=ct}$$

これは次のような $f(t)$ の二階常微分方程式になる。

$$\begin{aligned} \ddot{f}(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} \bar{w}_i^2 + R \rho \alpha^2 \frac{a^2 b}{4P} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \Phi_0 \right\} + \dot{f}(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} 2\alpha C \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \Phi_0 \cdot \bar{w}_i + R \rho \alpha^2 \frac{a^2 b}{4P} \cdot C \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \Phi_E \right\} \\ + f(t) \cdot \left\{ \frac{1}{2} 2\alpha C^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \Phi_C \cdot \bar{w}_i - R \rho \alpha^2 \frac{a^2 b}{4P} \cdot C^2 \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \Phi_F + \bar{w}_i \right\} = \bar{w}_i \quad \text{----- (3)} \end{aligned}$$

ここで

$$\alpha = \frac{4P}{a^2 b D}$$

$$\bar{w}_i = \frac{\alpha}{2} \left(\frac{a}{\pi} \right)^2 \Phi_A$$

$$\Phi_A = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1 - \cos 2m\pi\xi}{(m^2 + n^2\delta^2)^2}$$

$$\Phi_B = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m \sin 2m\pi\xi}{(m^2 + n^2\delta^2)^2}$$

$$\Phi_C = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2 \cos 2m\pi\xi}{(m^2 + n^2\delta^2)^2}$$

$$\Phi_D = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1 - \cos 2m\pi\xi}{(m^2 + n^2\delta^2)^4}$$

$$\Phi_E = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m \sin 2m\pi\xi}{(m^2 + n^2\delta^2)^4}$$

$$\Phi_F = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{m^2 (1 - \cos 2m\pi\xi)}{(m^2 + n^2\delta^2)^4}$$

ただし、 $\delta = \frac{a}{\ell}$, $\xi = \frac{c\ell}{a}$

(3) 式を初期条件 $t=0$ で $f(t)=0$, $\dot{f}(t)=0$ のもとで、差分法により数値的に解けば、時々刻々に決める $f(t)$ の値が求められる。

3. 数値計算結果

$a=30\text{ m}$, $\ell=6\text{ m}$, $R=30\text{ cm}$ のコンクリート板を用いる。材料定数は $E=3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, 単位体積重量 $\gamma_0=2.35 \text{ ton/m}^3$, ポアソン比 $\nu=0.2$ とする。

図-2 は $P=30\text{ ton}$ の集中荷重が種々の速度で走行する場合の、荷重載荷点のたわみ軌跡をプロットしたものであり、横軸は板の長さを幅との比で表わしたもので、たて軸は動たわみの静的最大たわみに対する比である。また、実線は全微分加速度で荷重慣性力を考慮した場合、一点鎖線は偏微分加速度で荷重慣性力を考慮した場合、そして破線は荷重慣性力を無視した場合である。図-2 から、全微分加速度で荷重慣性力を考慮すれば 40 m/sec 以下ではむしろ、荷重慣性力を無視した場合より、小さな動たわみとなるが、 50 m/sec では無視した場合より大きな動たわみとなることがわかる。また、偏微分加速度で荷重慣性力を考慮すれば、かなり動たわみが大きくなる。

図-3 , 図-4 , 図-5 はそれぞれ、荷重が 20 ton , 30 ton , 40 ton の場合の走行速度-最大動たわみ図である。荷重が 20 ton のときは全微分加速度で荷重慣性力を考慮した実線がこれを無視した破線より大きな最大動たわみを与え始める速度は 50 m/sec で荷重が 30 ton のときは 42 m/sec , 40 ton のときは 37 m/sec であり、荷重が大きいほど、この逆転する速度が小さい。

以上の結果から、速度が小さい場合、荷重慣性力はある速度以下ではむしろ応答たわみを減少させるように働き、速度がかなり大きくなって始めて、応答たわみを増加するように働くということが結論される。

図-3 $P=20\text{ ton}$

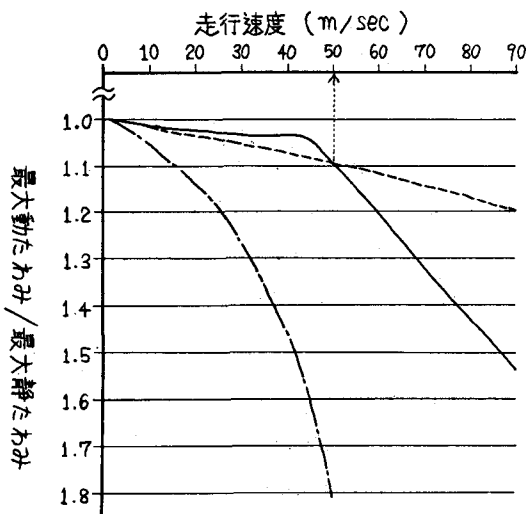


図-4 $P=30\text{ ton}$

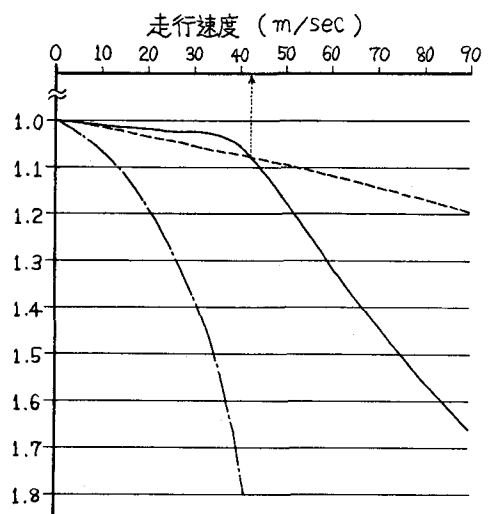


図-2 動たわみ軌跡 (P = 30 ton)

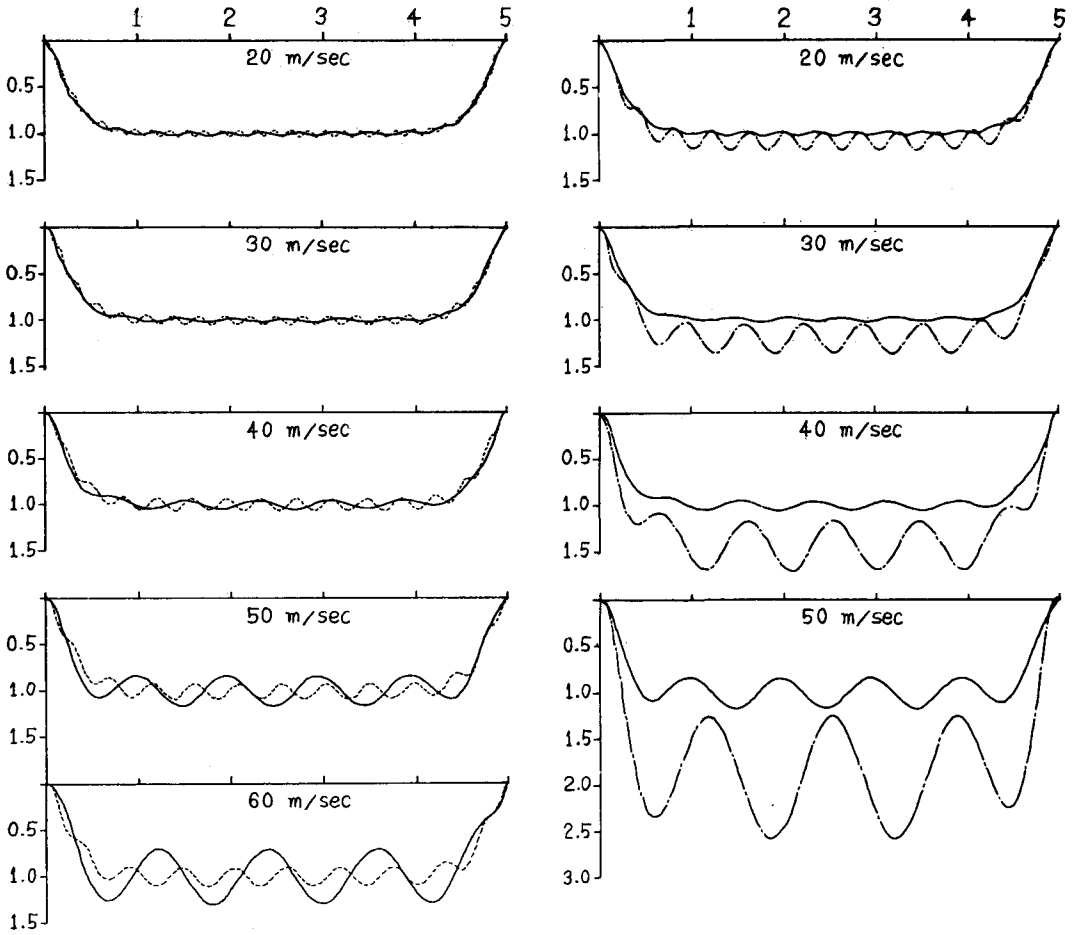
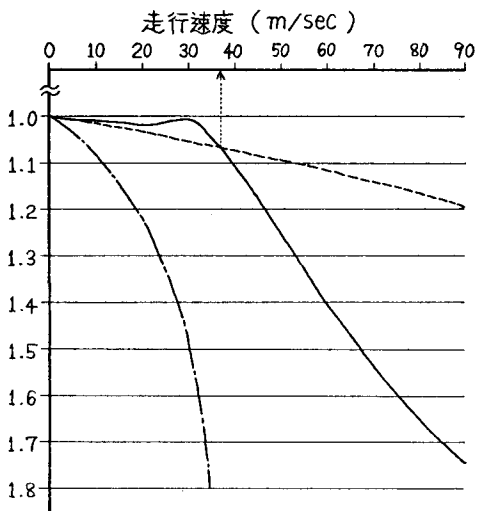


図-5 P = 40 ton



- ; 全微分加速度 ($\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2C \frac{\partial w}{\partial t \partial x} + C^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$)
で荷重慣性力を考慮した場合
- ; 偏微分加速度 ($\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$)
で荷重慣性力を考慮した場合
- - - - - ; 荷重慣性力を無視した場合

参考文献

- 小坪清真 : 土木振動学 (森北出版)
- 能町, 山本 : 走行荷重が作用する板の仮想仕事
による動的解析 (土木学会第32回 年次学術講
演概要集)