

衝撃による応力分布の過渡現象について

北大 工学部 正員 能町 純雄  
 北大 工学部 正員 角田 與史雄  
 北大 工学部 学生員 〇川上 博史

1. まえがき

構造物に衝撃荷重が作用した場合の過渡的性状の検討は、構造物の巨大化につれてますます必要となつてきている。本論文は、氷の張った湖沼の中央や大きな窓ガラスの中央、また円筒シェルの石油タンクの屋根の中央などに弾性ショックが与えられた場合、その構造物全体に応力(エネルギー)が行きわたるまでの過渡的分散性状を検討しようとするものである。その方法として、無限板の中央にガウス分布の軸対称①局所的初期弾性変形がある場合、②局所的初期力積荷重が作用した場合について、極座標を用いた0次のハンケル変換を活用しラグランジュの曲げ理論により行った。また、ラグランジュの曲げ理論にせん断変形と回転慣性を考慮するミンドリンプレート理論を用い、その波動特性を明かに比較した。

2. 解析理論

図-1のようなモデル板を考へ、曲げ剛性D、板厚hとし、回転慣性、せん断抵抗、さらに粘性項を無視すると、板の極座標表示での動的基礎微分方程式は次式で与えられる。

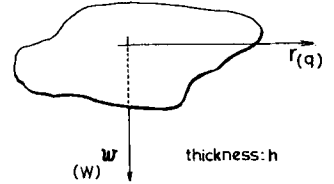


図-1 モデル板

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \frac{\partial w}{\partial r}) \right] \right\} + \frac{\rho R}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad \text{-----}(1)$$

軸対称荷重を作用させるので、wはθに無関係なrのみの関数となる。

ベッセル関数の定義式を用いて、(1)式に半径r方向の0次のハンケル変換を施し、さらに逆変換すると、

$$w(r,t) = \int_0^{\infty} [A_p \cos(4\pi^2 k_p t^2) + B_p \sin(4\pi^2 k_p t^2)] \cdot J_0(2\pi r \rho) d\rho \quad \text{-----}(2)$$

$$\text{ただし、} D = \frac{E \cdot h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad k_p^2 = \frac{D}{\rho R} = \frac{E}{12(1-\nu^2)\rho} \cdot h^2 = C_p^2 \cdot r_p^2$$

1) 初期たわみを有する場合

初期時において  $w = w_0 \cdot \exp(-ar^2)$  のみが存在する場合、 $\dot{w}(r,t=0) = 0$  より  $B_p = 0$ 、また  $w(r,t=0) = w_0 \cdot \exp(-ar^2)$  より

$$A_p = w_0 \frac{2\pi^2}{a} \cdot \exp(-\frac{\pi^2 a^2}{a^2} t^2) \cdot \rho$$

ただし、 $w_0$ は初期最大たわみ

$a$ は荷重分布幅を規定するガウス定数

よって、(2)式に  $A_p$  を代入し、さらに変形を整理すると、

$$w_{i.d.}(r,t) = w_0 \cdot \{1 + (4ak_p t)^2\}^{-1/2} \cdot \exp\left\{-\frac{ar^2}{1 + (4ak_p t)^2}\right\} \cdot \cos\left\{\frac{4a^2 k_p t r^2}{1 + (4ak_p t)^2} - \tan^{-1}(4ak_p t)\right\} \quad \text{-----}(3)$$

(3)式より、初期の半径および円周方向の曲げモーメント、そしてせん断力を求めると、

$$M_r = D \cdot 2a(1+\nu - 2ar^2) \cdot w_0 \cdot \exp(-ar^2)$$

$$M_t = D \cdot 2a(1+\nu - 2a\nu r^2) \cdot w_0 \cdot \exp(-ar^2)$$

$$Q = D \cdot 8a^2 r(2 - ar^2) \cdot w_0 \cdot \exp(-ar^2)$$

2) 初期力積荷重が作用する場合

初期時において  $\dot{w} = \dot{w} \cdot \exp(-\alpha r^2)$  のみが存在する場合、 $w(r, t=0) = 0$  より  $A_p = 0$ 、また  $\dot{w}(r, t=0) = \dot{w} \cdot \exp(-\alpha r^2)$  より  $B_p = \frac{\dot{w}}{2\alpha g k_p} \cdot \exp(-\alpha r^2)$

よって、(2)式に  $B_p$  を代入すると、

$$w_{i.i}(r, t) = \frac{F_t}{2\alpha g k_p \rho h} \int_0^\infty \frac{J_0(2\pi r g) \cdot \sin(4\pi^2 k_p t g^2)}{g} \cdot \exp(-\frac{\pi^2 g^2}{\alpha}) \cdot dg \quad \text{----- (4)}$$

ただし、 $F_t = \rho h \cdot \dot{w}$

(4)式は閉じた形の式に整理できないので、数値積分にたよるざるを得ない。さらに、(4)式よりバesselの定積分を用いて、モーメントおよびせん断力を求めると、

$$M_r(r, t) = \frac{D F_t}{k_p \rho h} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \left[ \frac{4\alpha k_p t}{1+(4\alpha k_p t)^2} \cos\left\{\frac{4\alpha^2 k_p t r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} - \left\{\frac{(1-\nu)}{2\alpha r^2} + \frac{1}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \sin\left\{\frac{4\alpha^2 k_p t r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \right]$$

$$M_t(r, t) = \frac{D F_t}{k_p \rho h} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \left[ \frac{1-4\alpha k_p t}{1+(4\alpha k_p t)^2} \cos\left\{\frac{4\alpha^2 k_p t r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} - \left\{\frac{(1-\nu)}{2\alpha r^2} + \frac{1}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \sin\left\{\frac{4\alpha^2 k_p t r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \right]$$

$$Q(r, t) = \frac{D F_t}{k_p \rho h} \cdot \exp\left\{-\frac{\alpha r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \times \frac{2\alpha r}{\{1+(4\alpha k_p t)^2\}^2} \times \left[ 8\alpha k_p t \cdot \cos\left\{\frac{4\alpha^2 k_p t r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} + \{4\alpha k_p t - 1\} \cdot \sin\left\{\frac{4\alpha^2 k_p t r^2}{1+(4\alpha k_p t)^2}\right\} \right]$$

次に、Mindlin=プレート理論により初期力積荷重のみが作用する場合の動的応答たわみ式を求める。

Mindlin=プレート理論による極座標表示の動的微分方程式は、

$$\left. \begin{aligned} G' h (\phi + \nabla^2 w) &= \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ D(\nabla^2 \phi) - G' h (\phi + \nabla^2 w) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \text{----- (5)}$$

ただし、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}$ 、 $\phi = \frac{\partial \theta}{\partial r}$

$\theta$ : 半径方向の回転角

$D = \frac{G h^3}{6(1+\nu)}$ 、 $G' = \alpha^2 G$ 、 $\mu = \frac{\nu}{1-\nu}$

$G$ : せん断弾性係数  $\alpha$ : 平均せん断係数

(5)式に時間  $t$  方向のラプラス変換を施す。初期力積のみが作用するので、初期たわみ、回転角および初期の回転速度を零として整理すると、

$$\left. \begin{aligned} -G' h \nabla^2 \mathcal{L}[w] + s^2 \rho h \mathcal{L}[w] - G' h \mathcal{L}[\phi] &= \rho h \dot{w}(t=0) \\ G' h \nabla^2 \mathcal{L}[w] + \{ -D \cdot \nabla^2 \mathcal{L}[\phi] + G' h \mathcal{L}[\phi] + s^2 \frac{\rho h^3}{12} \mathcal{L}[\phi] \} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{----- (6)}$$

(6)式に0次のハンケル変換を施す。初期時に  $\rho h \dot{w}(t=0) = F_t \cdot \exp(-\alpha r^2)$  なる初期力積が存在すると仮定すれば、(6)式は次のようにマトリックス表示できる。

$$\left\{ \begin{array}{cc} \{ G' h (2\pi g)^2 + \rho h s^2 \} & -G' h \\ -G' h (2\pi g)^2 & \{ D(2\pi g)^2 + G' h + \frac{\rho h^3}{12} s^2 \} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \mathcal{L}[w] \\ \mathcal{L}[\phi] \end{array} \right\} = \frac{2\pi^2}{\alpha} \int_0^\infty \exp(-\frac{\pi^2 g^2}{\alpha}) \cdot g \cdot J_0(2\pi r g) \cdot dg \cdot \left\{ \begin{array}{c} F_t \\ 0 \end{array} \right\}$$

上式のマトリックスを質量マトリックスに分離し、両辺に質量マトリックスの逆マトリックスを掛けあわせて固有方程式を導くことができる。さらに、その固有方程式のマトリックス *determinant* を零とする固有値を求める。ここでは、クラメル公式より  $\mathcal{L}[w]$  についてのみ求めることにする。求められた  $\mathcal{L}[w]$  は  $s = \pm s_i$ 、 $s_i$  なる4つの単極が存在している故に留数計算により解を得ることができ、ヘビサイドの展開定理を用いて、比速度  $V = C/C_s$  により処理し、整理すると、求めるたわみ式は次式のようになる。ただし、 $s = 2\pi g C$

$$W(r,t) = \frac{\pi \cdot C_s \cdot F_t}{a \cdot G \cdot h} \int \sum_{V=V_1}^{V_2} \frac{V_0^2 + \frac{r^2}{(2\pi r)^2} - V^2}{V \{ r^2 + V_0^2 + \frac{r^2}{(2\pi r)^2} - 2V^2 \}} \times \sin(2\pi C_s V t) \exp(-\frac{\pi^2 r^2}{a^2}) J_0(2\pi r) dr \quad (17)$$

### 3. 数値計算例

板厚  $h = 1 \text{ cm}$  の鋼矩形板 (SM41) を用いる。ガウス定数  $a = 0.01 \text{ cm}^2$  とする。

① 初期最大たわみ ( $W = 0.0467 \text{ cm}$ ) を与えた場合の動的分散性状を図-2 に示す。

② 荷重 (初期力積) の  $r$  方向分布は図-3 のような  $\exp(-ar^2)$  なるガウス分布であるが、半径  $10 \text{ cm}$  の円筒荷重が作用した場合に対応させ、 $F_t$  を破壊応力より  $F_t = 13.9 \text{ kg/cm}^2$  と仮定し、 $r = 0.0$  点のたわみ  $W$ 、曲げモーメント  $M$ 、および粒子速度  $P_R \dot{W}$  の時間方向分布を図-4 に示す。

③ 図-5 に初期力積荷重を作用させた場合の動的応答たわみの  $r$  点における時間方向の分散性状を図-6 に示す。

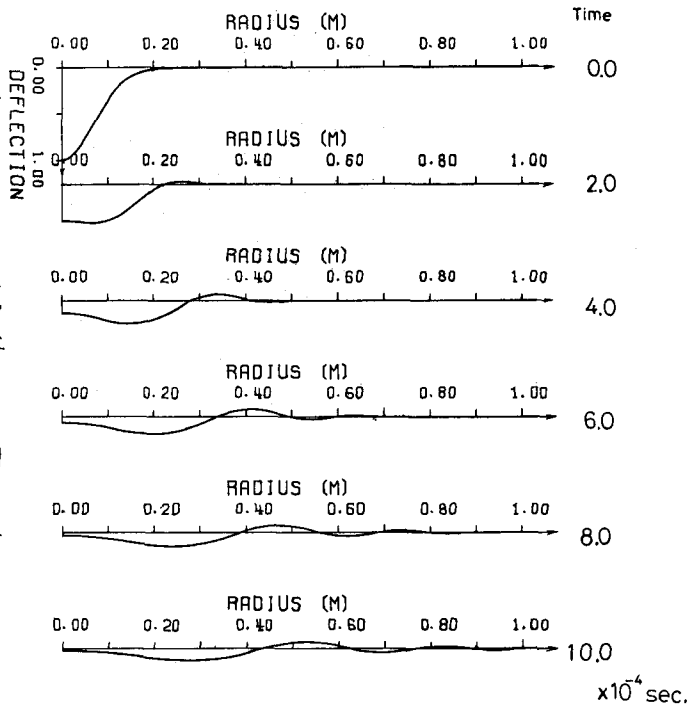


図-2 初期弾性変形がある場合の分散状態

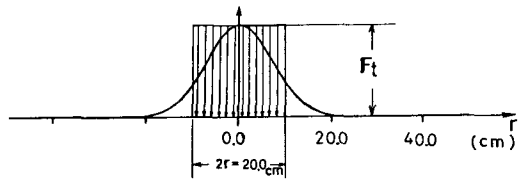


図-3 初期力積荷重分布

### 4. まとめ

以上より、無限板の中央に軸対称初期弾性変形のある場合の時間的分散性状を図化することができた。また、同板に軸対称力積荷重消失後のたわみ、モーメント等の分散性状を図化することにより、ピーク値の時間的なずれを明確にすることができた。また、数値結果によれば力積荷重に対して最大曲げモーメントは  $1.6 \times 10^{-4}$  秒に生ずることがわかる。

初期力積荷重が作用する場合の動的応答たわみ式(4)は一定の伝播速度で波形を保ったまま進む波の式ではなく、波の伝播速度はもはや一定でなく、一般的な伝播速度は定義することはできない。しかし、波長の短い波が最も速く伝播することより、せん断変形と回転慣性を考慮するミソドリソプレート理論により高周波領域における伝播速度を調べることに、力積荷重消失後最も速く進む波を調べ、最大曲げモーメントの生ずる時間の波動先端部の位置を検討する。

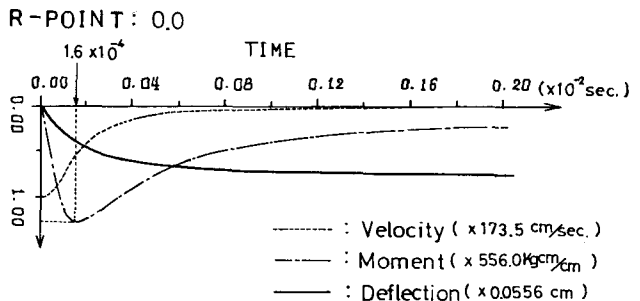


図-4 初期力積(衝撃)荷重が作用した場合の原点( $r = 0.0$  点)における推移状態

(4)式および(7)式にベッセル函数の漸近展開を用い整理すると、ラグランジェの曲げ理論より得られた(4)式は時間 $t$ と位置 $r$ との関係に $\theta$ が含まれるが、ミンドリン=プレート理論より得られるものは $\theta$ に無関係に $C_0 V t \pm r$ という項が得られる。ただし、比速度 $V$ は $\theta$ により導かれる。つまり $C_0 V$ として $\theta$ のみの関係で伝播速度は求められ、位相速度分散曲線より高周波領域の波を調べることにより、波長の最も短い波は原点より非常に離れた点で平面波としてせん断波速度で進むことがわかる。その結果より、円筒力積荷重の半径 $r$ と板厚 $h$ の比を10とし、 $\theta_0$ を一定として数値計算で行った鋼板とガラスおよび氷について、荷重(初期力積)載荷中央点での破壊が生ずる時間およびその時間における波動先端部の位置を表-1に示す。

以上より、構造物に弾性ショック(初期力積荷重)が作用した場合、境界からの反射波が到達する前に破壊に至る過程というものを概略説明することができよう。

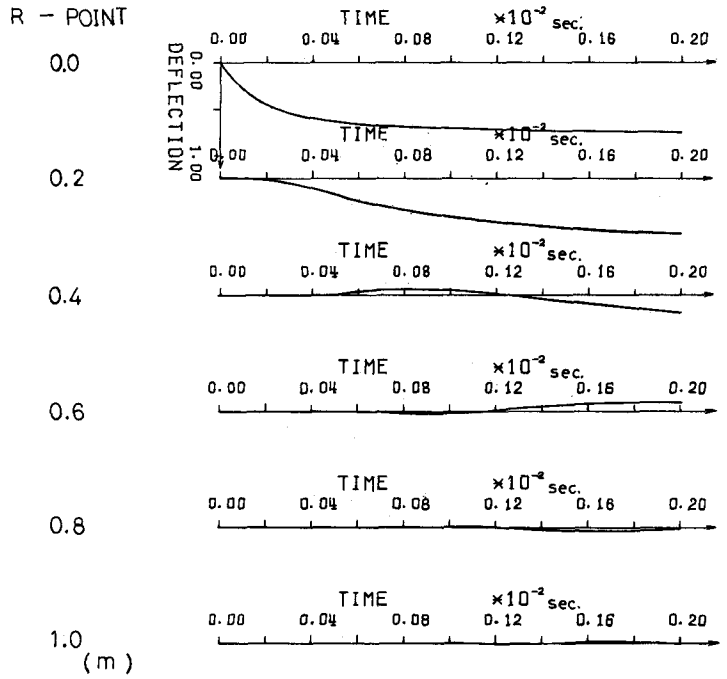


図-5 初期力積荷重が作用した場合の鋼板の $r$ 点における時間方向のたわみ分散性状況

表 - 1

材料	板厚 $h$	ガウス定数	最大モーメントの生ずる時間	波動先端部
鋼板	1.00 cm	$\alpha = 0.01 \text{ cm}^2$	$1.6 \times 10^{-4} \text{ sec.}$	50.8 cm
ガラス	1.00 cm	$\alpha = 0.01 \text{ cm}^2$	$1.6 \times 10^{-4} \text{ sec.}$	53.6 cm
氷	3.23 cm	$\alpha = 0.001 \text{ cm}^2$	$1.6 \times 10^{-3} \text{ sec.}$	153.5 cm

参考文献

Morse: 'Vibration and Sound', McGraw-Hill (1936)  
 R.D. Mindlin: 'Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plate', Journal of Applied Mechanics (1951)  
 H. Reismann: 'Moving Load on an Elastic Plate Strip', Journal of Applied Mechanics (1974)  
 能野 純雄 他: 「せん断変形を考慮した平板の初期衝撃応答について」 土木学会北海道支部論文報告集 第33号  
 吉田 耕作 他: 「応用数学便覧」 丸善株式会社  
 田島 清頼: 「振動の工学」 産業図書株式会社