

液体で満たされた円筒を伝わる曲げ波の伝播速度について

室蘭工業大学

正員 萩岡健一

北海道大学

同 能町純雄

北海道開発コンサルタント

同 斎藤 紘

1. まえがき

筆者らは先に、弾性体中にある液体で満たされた円筒の軸対称波の伝播について検討し発表した¹⁾が、本論文はこれを曲げ波動に適用したものである。この問題は、円柱座標で表わされる動的3次元問題となるが、具体的には、円孔を有する無限体、無限円筒、正剛性液体の波動方程式の解を組合せて解析することになる。数値計算は円筒の直径と波長の比に対する、弾性波の位相速度と液体中を伝わる音波の速度の比の分散曲線を、液体と円筒の炭度の比、弾性媒体と円筒の弾性定数の比、円筒の内径と外径の比などを変化させて求め、その結果を検討した。この問題は、地中に埋込まれた燃料輸送用のパイプラインなどを想定しているが、この動的力学と解明するための基礎的なものである。

2. 円筒の波動方程式の解

図-1に示すように、円柱座標の座標軸を半径方向に r 、接線方向に θ 、円筒軸方向に z 軸とし、各方向の変位成分をそれぞれ u, v, w とする。また、 r, θ, z 方向の直応力を $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z$ とし、せん断応力を $\tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}$ とする。

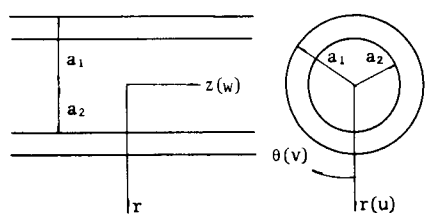


図-1

今曲げ波動を仮定し、波動の進行方向を z 軸方向とし、この方向に調和波動を仮定すれば、各変位成分および応力成分は次のように表わせる。

$$\left. \begin{aligned} u &= \bar{u} \cos \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, & v &= \bar{v} \sin \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, & w &= \bar{w} \cos \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, \\ \sigma_r &= \bar{\sigma}_r \cos \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, & \sigma_\theta &= \bar{\sigma}_\theta \cos \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, & \sigma_z &= \bar{\sigma}_z \cos \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, \\ \tau_{r\theta} &= \bar{\tau}_{r\theta} \sin \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, & \tau_{\theta z} &= \bar{\tau}_{\theta z} \sin \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, & \tau_{rz} &= \bar{\tau}_{rz} \cos \theta \cdot e^{i\psi(t - \frac{z}{v})}, \end{aligned} \right\} (A)$$

この関係を円柱座標で表わされる波動の基礎方程式に代入すれば、 r に関する3元の連立常微分方程式がえられるので、これを有階 Hankel 変換して、 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ の Hankel 変換値の3元連立方程式を導き、これを解き Hankel 逆変換を行なうことにより $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ を求めることが出来る。結果の付録は²⁾

$$\bar{u} = \bar{A}_r + \bar{B}_r \quad (1), \quad \bar{v} = \bar{A}_r - \bar{B}_r \quad (2)$$

$$\bar{A}_r = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{N_\mu} \chi_p^{(k)}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_k + (m+1)A_k + (m-1)B_k - c' \frac{N}{z} E_k \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho \rho^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_p^{(k)}(N_\mu r) - \frac{N_k}{N^2} \chi_p^{(k)}(N_\mu r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_k + (m+1)A_k - (m-1)B_k - c' N E_k \right\} \right] \quad (3)$$

$$\bar{B}_r = \sum_{k=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{N_\mu} \chi_s^{(k)}(N_\mu r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \alpha_k + (m+1)A_k + (m-1)B_k + c' \frac{N}{z} E_k \right\} + \frac{\mu N^2}{\rho \rho^2} \left\{ \frac{1}{N_\mu} \chi_s^{(k)}(N_\mu r) - \frac{N_k}{N^2} \chi_s^{(k)}(N_\mu r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_k + (m+1)A_k - (m-1)B_k - c' N E_k \right\} \right] \quad (4)$$

$$\bar{w} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[G^{(k)}(N_\mu r) E_k + c' \frac{2\mu N}{\rho \rho^2} \left\{ G^{(k)}(N_\mu r) - G^{(k)}(N_\mu r) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_k + (m+1)A_k - (m-1)B_k - c' N E_k \right\} \right] \quad (5)$$

上式中 μ, λ は Lamé の弾性定数、 $N = \rho / \nu = 2\pi / L$ 、 ρ : 角速度、 ν : 位相速度、 L : 波長、 ρ : 密度、 m は曲げのあるので (A) に示したように θ とする。 α, β, \dots は円筒面の変位や応力である。

$$\alpha_k = (\bar{\tau}_{r\theta})_{r=a_k}, \quad \beta_k = (\bar{\nu}_r)_{r=a_k}, \quad A_k = (\bar{A}_r/r)_{r=a_k}, \quad B_k = (\bar{B}_r/r)_{r=a_k} \quad (6)$$

$$E_k = (\bar{w})_{r=a_k}, \quad a_1: \text{外径}, \quad a_2: \text{内径}$$

$$\text{また}, \quad N_u^2 = N^2 - \rho p^2 / \mu, \quad N_s^2 = N^2 - \rho p^2 / (2\mu + \lambda),$$

$$G^{(k)}(Nr) = \frac{R_{1,1}^{(k)}(Nr)}{R_{1,1}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_p^{(k)}(Nr) = \frac{R_{2,1}^{(k)}(Nr)}{R_{1,1}^{(k)}(Na_k)}, \quad \chi_s^{(k)}(Nr) = \frac{R_{0,1}^{(k)}(Nr)}{R_{1,1}^{(k)}(Na_k)} \quad (7)$$

$$R_{i,j}^{(k)}(Nr) = I_j(Nr) K_i(Na_{k-1}) - (-1)^{i+j} I_j(Na_{k-1}) K_i(Nr), \quad a_0 = a_1 \text{ とする}$$

ここで I, K はそれぞれ第一種および第二種の変形 Bessel 関数である。(1)~(5) 式は円筒に対する解であるが、円柱を有する無限体に対しては $a_1 \rightarrow \infty$ とし、(1)~(5) 式中の $a=1$ の項を消去し、 G, χ を次のようにおけばよい。

$$G(Nr) = \frac{K_1(Nr)}{K_1(Na_2)}, \quad \chi_p(Nr) = -\frac{K_2(Nr)}{K_1(Na_2)}, \quad \chi_s(Nr) = -\frac{K_0(Nr)}{K_1(Na_2)}, \quad (8)$$

3. 圧縮性液体の波動方程式の解

中の圧縮性液体の変位ポテンシャルとすれば、 ϕ は円柱座標系において次の波動方程式を満足する。ただし、 c_f は液体中の伝わる音波の速度 ($=\sqrt{k/\rho_f}$, k : 体積弾性率, ρ_f : 密度) とする。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{\partial \phi}{r \partial r} + \frac{\partial^2 \phi}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c_f^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (9)$$

2. と同様に曲げ波動を仮定し、 z 方向に伝播する調和波動とすれば、 $\phi = \bar{\phi} \cos \theta e^{i\psi(z - \frac{t}{c_f})}$ とおけるので、これを (9) に代入、有限 Hankel 変換を用いて解けば、液体の r 方向の変位 u_z および圧力 p_z は、

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \left\{ N_f \chi_p^+(N_f r) + \frac{1}{r} G^+(N_f r) \right\} \phi_a \cos \theta e^{i\psi(z - \frac{t}{c_f})}, \quad (10)$$

$$p_z = -\rho_f \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \rho_f p^2 G^+(N_f r) \phi_a \cos \theta e^{i\psi(z - \frac{t}{c_f})} \quad (11)$$

ただし、 $N_f^2 = N^2(1 - \psi^2)$, $J = \rho/Nc_f = r/c_f$, $\phi_a = \bar{\phi}|_{r=a_2}$, ψ は式中の角数は、

$$G^+(N_f r) = \frac{I_1(N_f r)}{I_1(N_f a_2)}, \quad \chi_p^+(N_f r) = \frac{I_2(N_f r)}{I_1(N_f a_2)}, \quad \text{for } J < 1.$$

$$G^+(N_f r) = \frac{J_1(N_f r)}{J_1(N_f a_2)}, \quad \chi_p^+(N_f r) = i \frac{J_2(N_f r)}{J_1(N_f a_2)}, \quad \text{for } J > 1, \quad J: \text{第一種 Bessel 関数}$$

4. 境界条件

図-2 の様に、無限弾性媒体、無限円筒、液体が存在しているものとす。弾性媒体を添字 1、円筒を添字 2、液体を添字 3 と表わすものとす。

I. $r = a_1$ における条件:

この場合まず、式 (6) の第 3, 4 式と式 (3), (4) から

$$\bar{A}_{r,1} r = a_1 = a_1 A_{2,1}, \quad (9) \quad \bar{B}_{r,1} r = a_1 = a_1 B_{2,1}, \quad (10)$$

$$\bar{A}_{r,2} r = a_1 = a_1 A_{1,2}, \quad (11) \quad \bar{B}_{r,2} r = a_1 = a_1 B_{1,2}, \quad (12)$$

を満足しなくてはならない。この他の条件は接触面の状態によって異なるが、ここでは接触面の両側の弾性体の変位が連続している場合を考慮するものとすれば、

$$u_1(r=a_1) = u_2(r=a_1), \quad v_1(r=a_1) = v_2(r=a_1), \quad w_1(r=a_1) = w_2(r=a_1)$$

$$\therefore A_{2,1} = A_{1,2} = A_1, \quad B_{2,1} = B_{1,2} = B_1, \quad E_{2,1} = E_{1,2} = E_1 \quad (13)$$

$$\bar{\theta}_{r,1} r = a_1 = \bar{\theta}_{r,2} r = a_1, \quad \bar{\tau}_{r\theta,1} r = a_1 = \bar{\tau}_{r\theta,2} r = a_1, \quad \therefore \beta_{2,1} = \beta_{1,2} = \beta_1, \quad \alpha_{2,1} = \alpha_{1,2} = \alpha_1 \quad (14)$$

$$\bar{\tau}_{r\theta,1} r = a_1 = \bar{\tau}_{r\theta,2} r = a_1, \quad (15)$$

II. $r = a_2$ における条件:

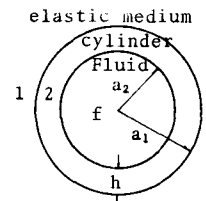


図-2

ここでは弾性円筒と液体が接触するが、円筒に対してはI.と同様に

$$\bar{A}_{r,2}|_{r=a_2} = a_2 A_{2,2}, \quad (16) \quad \bar{B}_{r,2}|_{r=a_2} = a_2 B_{2,2} \quad (17)$$

を満足しなくてはならない。また液体にはせん断力は存在しないものとす。

$$\tau_{r\theta,2}|_{r=a_2} = 0, \quad \therefore a_{2,2} = 0 \quad (18), \quad \tau_{rz,2}|_{r=a_2} = 0, \quad (19)$$

さらに弾性円筒と液体との互いのr方向の変位および応力(圧力)が等しくなければならぬので、

$$u_{r,2}|_{r=a_2} = u_{f,2}|_{r=a_2} \quad \therefore A_{2,2} + B_{2,2} = \{N_f \chi_p^2 (N_f a_2) + G^2 (N_f a_2) / a_2\} \phi_a / a_2, \quad (20)$$

$$\sigma_{r,2}|_{r=a_2} = -\beta_2 \tau_{r,2}|_{r=a_2} \quad \therefore \beta_{2,2} = -\beta_2 p^2 G^2 (N_f a_2) \phi_a, \quad (21)$$

弾性波の位相速度は、上の境界条件式の係数行列の行列式の値を零に等しとすると、 $\alpha_2 (=V/c_f)$ の値を求めることにより与えられる。

5. 数値解析

上に述べた理論により求めた位相速度の数値計算結果について検討する。ここで計算に用いた数値は、弾性体のポアソン比0.25, $\mu_1/\mu_2 = 0.01, 0.1$, $a/a_2 = 0.02$,

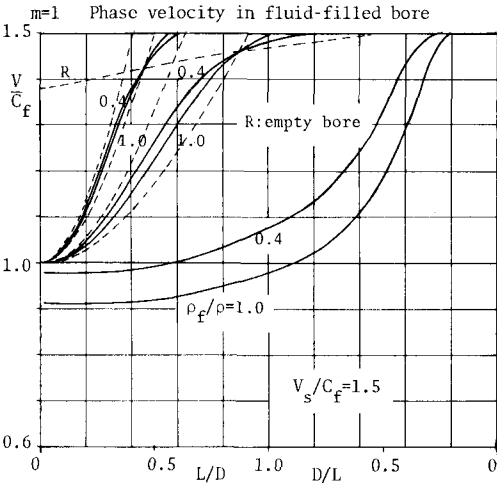


図-3

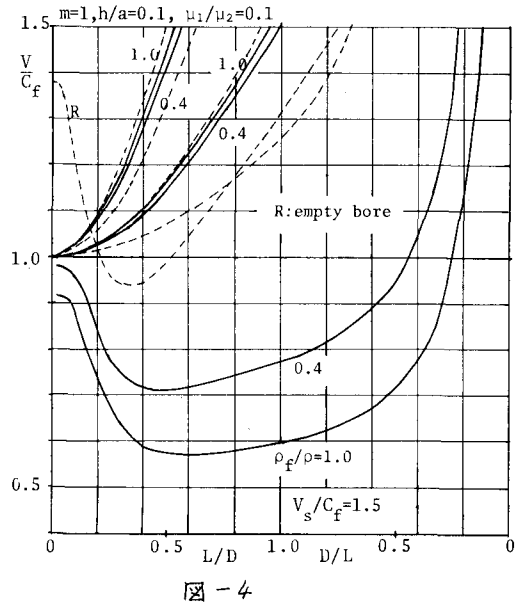


図-4

$a/a_2 = 0.1$, $\rho_f/\rho = 0.4, 1.0$, $V_s/C_f = 1.5$, $V_s = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$ と円筒のせん断波の速度である。本論文では曲げ波動を対象として検討しているが ($m=1$)、一部軸対称波動と比較のため軸対称波動の結果 ($m=0$) も示している。

図-3は $\mu_1 = \mu_2$ あるいは無限体中の円孔に液体が満ちている場合であるが、いかなる波長が長くすれば速度は増加している。1次の位相速度は ρ_f/ρ の小さいものが大きい。2次以上のものは液体がはいった場合の位相速度 (Rで表わした実線) より小さいとき ρ_f/ρ の小さいものが大きく、速度が大きければ逆になっている。これは μ_1 と μ_2 のとき (図-4) にも同様の結果が表われている。

図-4に示すように $\mu_1/\mu_2 = 0.1$, $a/a_2 = 0.02$ の場合は円孔のみの場合とはかなり異なり、特に1次の曲線で、波長によりかなり小さい位相速度が表われる。

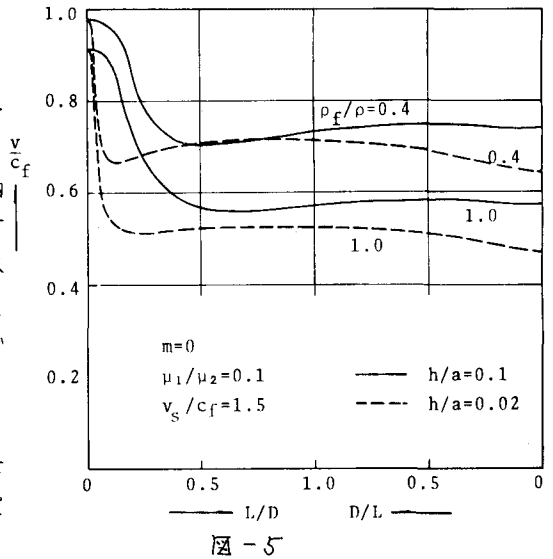


図-5

図-5, 6は $h/a = 0.02, 0.1$ の2種のものに対して $\mu_1/\mu_2 = 0.1$ と $\rho_f/\rho = 0.4, 1.0$ の場合を計算したものであるが比較のために軸対称のもの(図-5)も示した。両者は波長の短かいものはほとんど一致のみが、 $L/D > 0.5$ 付近から差が表われ、波長が無限大になるに従い軸対称は一定値になるが曲げ波動では急激に大きくなる。また一般的に h/a の小さいものは速度は小さく、波長の短かいところでは急激に変化している。

図-7, 8は $h/a = 0.1$ で $\mu_1/\mu_2 = 0.01, 0.1$ の比較を行なったもので、やはり軸対称のものも示した。これも両者を比較した場合上の傾向と同様であり $\mu_1/\mu_2 = 0.01$ の方が速度は小さくはっている。またいずれの場合も ρ_f/ρ が同じ値であれば波長が零のとき同じ位相速度になる。

以上示した様に、1次の位相速度分散曲線は、軸対称波動では C_f より小さく、曲げ波動では波長無限大で大きい値を示しているのが特徴的である。また、いずれの場合も ρ_f/ρ の小さいものが速度は大きくなり中空の場合の値に近づく。

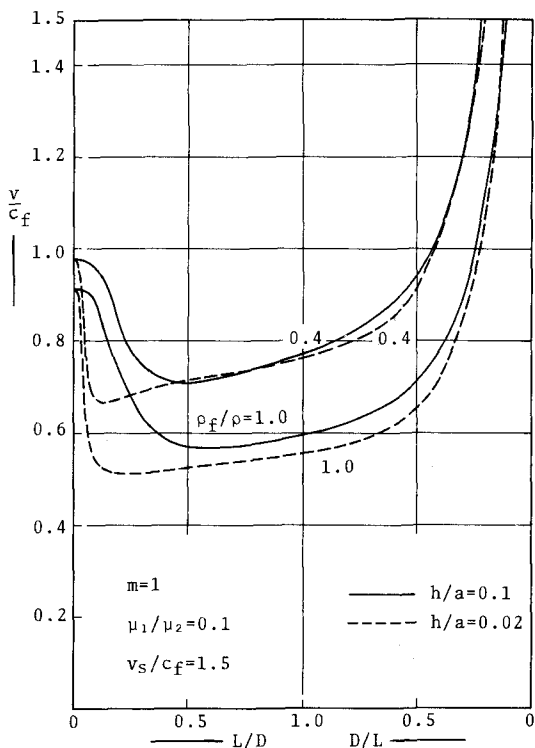


図-6

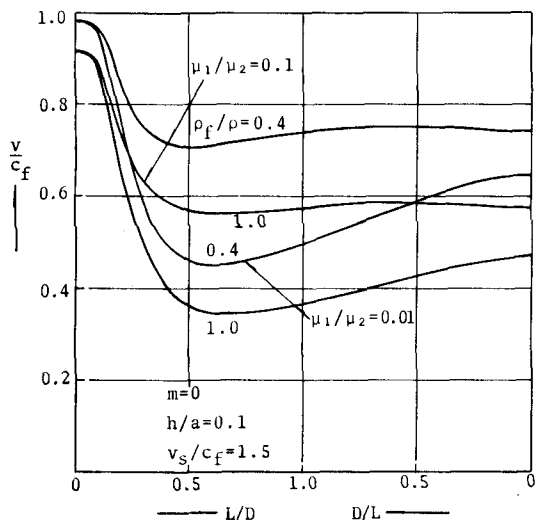


図-7

以上の研究は本年度文部省科学研究費の補助を受けで行なった研究の一部であり、数値計算は北海道大学大型計算機センターを利用して行なった。

※参考文献

- 1) 能町・松岡・坂下: 土学会北海道支会論文報告集, 第3号, 1961
- 2) 松岡・能町: 土学会論文報告集, 第25号, p. 13

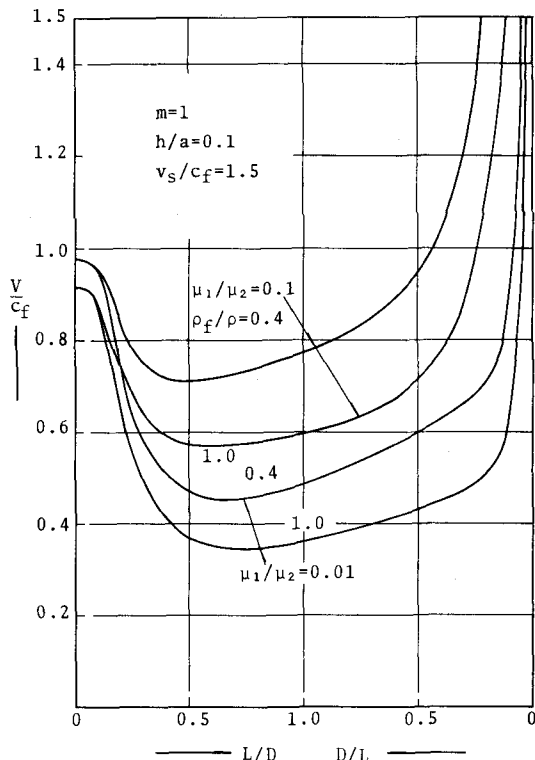


図-8