弾性基礎上の円筒形タンクの非軸対称温度応力について

北海道大学　正員　三上　隆
東洋エンジニアリング　正員　○田巻　雅
北海道大学　正員　福士　彰二

1. まえがき　わが国の資源条件から石油の備蓄が必要であり，比較的軟弱地盤上に円筒形タンクが建設されるようになり，その安全性についての問題が大きく取りあげられるようになってきた。タンクは基礎上の底板及び側板より構成されており，それが設計上与えられる温度分布を受けるさいの挙動は地盤との関連で全体に一つの系として検討を加えることが望まれる。

軸対称問題については昨年報告[1]したが，本報告は底板を弾性ばねで支持された円板とみなし，複雑な温度分布に対する解析が可能なように，この問題に有限帯板法[2]を適用し，タンク内外の温度差，弾性ばねのタンク挙動に与える影響を検討したものである。

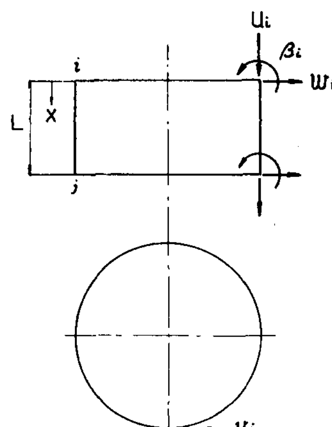
2. 解析方法　解析にあたって，変形は微小であり，材料は等方，等質性を有するものとする。

(1) 側板要素の平衡方程式

図—1に示すように，長て方向(x方向)変位をu，円周方向(θ方向)変位をv，板厚方向変位をwとする。

面内ひずみを$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \gamma_{x\theta}$，面外ひずみを$\chi_x, \chi_\theta, \chi_{x\theta}$と表わすと，応力—ひずみ関係式は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B & \nu B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu B & B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D & \nu D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} - \frac{E\alpha}{1-\nu} \begin{Bmatrix} \bar{T} \\ \bar{T} \\ 0 \\ \tilde{T} \\ \tilde{T} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{----}(1)$$



図—1　側板要素

ここで，$N_x, N_\theta, N_{x\theta}$は応力，$M_x, M_\theta, M_{x\theta}$は曲げおよびねじりモーメントであり，$\nu$はポアソン比，$E$は弾性係数，$\alpha$は材料の線膨張係数であり，$D=Eh^3/\{12(1-\nu^2)\}$，$B=Eh/(1-\nu^2)$，$h$=底板の厚さとする。

温度分布(T)を無ひずみ，無応力状態からの温度分布とすると式(1)における$\bar{T}$，$\tilde{T}$は次式で与えられる。

$$\bar{T}=\int_{-h/2}^{h/2} T(x,\theta,z)\,dz, \qquad \tilde{T}=\int_{-h/2}^{h/2} T(x,\theta,z)\,z\,dz \quad \text{-----------}(2)$$

ひずみ—変位の関係は次式で表示できる。

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta}+w\right)$$

$$\gamma_{x\theta}=\frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \chi_x=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{-------}(3)$$

$$\chi_\theta=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}-\frac{\partial v}{\partial \theta}\right), \quad \chi_{x\theta}=\frac{1}{a}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}-\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

ここで，aはタンク半径である。

変位u，v，wは長て方向は多項式で，円周方向はフーリエ級数で展開すると，それらは次式で与えられる。

$$u=(1-x/L)\cos n\theta\, u_i^{(n)}+(x/L)\cos n\theta\, u_j^{(n)}$$

$$v=(1-x/L)\sin n\theta\, v_i^{(n)}+(x/L)\sin n\theta\, v_j^{(n)}$$

$$w=(1-3x^2/L^2+2x^3/L^3)\cos n\theta\, w_i^{(n)}+(x-2x^2/L+x^3/L^2)\cos n\theta\, \beta_i^{(n)}+(3x^2-2x^3/L)\cos n\theta\, w_j^{(n)}+(-x^2/L+x^3/L^2)\cos n\theta\, \beta_j^{(n)} \quad \text{-------------}(4)$$

要素のひずみエネルギーは次式で表わされる。

$$U=\frac{1}{2}\iint\left[B\left\{(\varepsilon_x+\varepsilon_\theta)^2+2(1-\nu)\left(\frac{\gamma_{x\theta}^2}{4}-\varepsilon_x\varepsilon_\theta\right)\right\}-2\frac{E\alpha}{1-\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_\theta)\times \bar{T}\right]a\,d\theta\,dx+\frac{1}{2}\iint D\left[\left\{(\chi_x+\chi_\theta)^2+2(1-\nu)(\chi_{x\theta}^2-\chi_x\chi_\theta)\right\}-\right.$$

$$2\frac{E\alpha}{1-\nu}(\chi_r+\chi_\theta)\tilde{T}\Big]\,a\,d\theta\,dx + k\iint G(T)\,a\,d\theta\,dx \quad \text{---}(5)$$

ここで，$G(T)$ は T のみの関数である。

式(3)，(4) を式(5) に代入しポテンシャルエネルギー最小の原理より次式が得られる。

$$[K]_n\{\delta\}_n=\{Q\}_n \quad \text{------------}(6)$$

ここに $[K]_n$ は要素の剛性マトリックスの第n項，$\{Q\}_n$ は温度分布に等価な熱荷重である。

$$\{\delta\}_n=\{u_i^{(n)}\ v_i^{(n)}\ w_i^{(n)}\ \beta_i^{(n)}\ u_j^{(n)}\ v_j^{(n)}\ w_j^{(n)}\ \beta_j^{(n)}\}^t$$

以下に $[K]_n$ の内容を示すと次のようになる。

$$[K]_n=\pi a L\begin{bmatrix} K_1 & \cdots & K_{18} \\ & \ddots & \vdots \\ \text{Symm.} & & K_{88}\end{bmatrix}$$

$K_{11}=K_{55}=B/L^2+n^2B_2/(3a^2)$，$K_{12}=-n(B_1-B_2)/(2aL)$

$K_{56}=-K_{12}$，$K_{16}=-n(B_1+B_2)/(2aL)$，$K_{25}=-K_{16}$

$K_{13}=K_{17}=-B_1/(2aL)$，$K_{35}=K_{57}=-K_{13}$，

$K_{14}=K_{58}=-B_1/(12a)$，$K_{18}=K_{45}=-K_{14}$，

$K_{15}=-B/L^2+n^2B_2/(6a^2)$，$K_{28}=-nLB/(30a^2)-n^3LD/(30a^4)$

$K_{22}=K_{66}=n^2B/(3a^2)+B_2/L^2+n^2D/(3a^4)+4D_2/(L^2a^2)$

$K_{23}=K_{67}=7nB/(20a^2)+nD_1/(L^2a^2)+7n^3D/(20a^4)+4nD_2/(L^2a^2)$

$K_{24}=nLB/(20a^2)+nD_1/(La^2)+n^3LD/(20a^4)$，$K_{68}=-K_{24}$

$K_{26}=n^2B/(6a^2)-B_2/L^2+n^2D/(6a^4)-4D_2/(a^2L^2)$

$K_{27}=K_{36}=3nB/(20a^2)-nD_1/(L^2a^2)+3n^3D/(20a^4)-4nD_2/(L^2a^2)$

$K_{33}=K_{77}=13B/(35a^2)+12D/L^4+12n^2D_1/(5a^2L^2)+13n^4D/(35a^4)+24n^2D_2/(5L^2a^2)$，$K_{34}=11LB/(210a^2)+6D/L^3+6n^2D_1/(5La^2)+11n^4LD_1/(210a^4)+2n^2D_2/(5La^2)$，$K_{78}=-K_{34}$

$K_{37}=9B/(70a^2)-12D/L^4-12n^2D_1/(5a^2L^2)+9n^4D/(70a^4)-24n^2D_2/(5a^2L^2)$，$K_{38}=6D/L^3-13LB/(420a^2)+n^2D_1/(5La^2)+2n^2D_2/(5La^2)-13Ln^4D/(420a^4)$

$K_{48}=2D/L^2-L^2B/(140a^2)-n^2D_1/(15a^2)-n^4L^2D/(140a^4)-2n^2D_2/(15a^2)$

$K_{44}=K_{88}=4D/L^2+L^2B/(105a^2)+4n^2D_1/(15a^2)+n^4L^2D/(105a^4)+8n^2D_2/(15a^2)$，$K_{47}=-K_{38}$，$K_{46}=-K_{28}$

ここで，$B_1=\nu B$，$B_2=(1-\nu)B/2$，$D_1=\nu D$，$D_2=(1-\nu)D/2$

温度分布は変位と同様に円周方向(θ方向)にフーリエ級数，板厚及び長て方向(x方向)に直線変化するとし，次式で表わす。

$$T=T(x,z)\cos n\theta=\{(A_1+B_1z)x+C_1+D_1z\}\cos n\theta \quad \text{----}(7)$$

ここで，zは中立面からの距離，$A_1\sim D_1$ は要素両端i，j点での側板の上下面の温度分布より定まる定数

斜線円周方向温度分布は図—2に示す分布状態を仮定する。すなわち

$$-\pi/2\leq\theta\leq\pi/2 \text{ で } T(\theta)=T_{const}+T_0\cos\theta \quad \text{------}(8)$$

$$\pi/2<\theta<3/2\pi \text{ で } T(\theta)=T_{const} \quad \text{----------}(9)$$

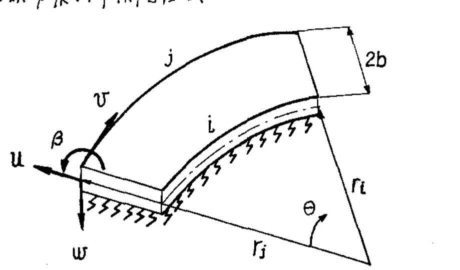
円周方向に次式のフーリエ級数で展開する。

$$T(\theta)=\sum a_n\cos n\theta \quad \text{------------}(10)$$

ここで，$a_0=T_{const}+T_0/\pi$，$a_1=T_0/2$，

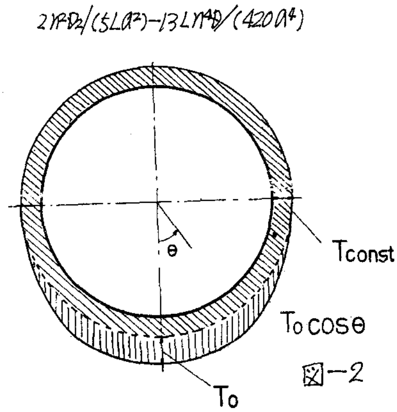
$a_n=2T_0(-1)^{n/2}/\{(1-n^2)\pi\}$　$n\geq2$

(2) 底板要素の平衡方程式



図—3 底板要素

ここでは，底板を一様な弾性ばねで支持された円板とみなし，弾性ばねとしてはWinkler型のばねを仮定する。



図—2

図—3に示すような要素巾が$2b$，板厚hのモデルを考え，変位成分として，半径方向(r方向)変位をu，円周方向(θ方向)変位をv，鉛直方向変位をwと表わす。

応力—ひずみ関係は次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix}N_r\\N_\theta\\N_{r\theta}\\M_r\\M_\theta\\M_{r\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}B&\nu B&0&0&0&0\\ \nu B&B&0&0&0&0\\0&0&\frac{1-\nu}{2}B&0&0&0\\0&0&0&D&\nu D&0\\0&0&0&\nu D&D&0\\0&0&0&0&0&\frac{1-\nu}{2}D\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_r\\\varepsilon_\theta\\\varepsilon_{r\theta}\\\chi_r\\\chi_\theta\\\chi_{r\theta}\end{Bmatrix}-\frac{E\alpha}{1-\nu}\begin{Bmatrix}\bar{T}\\\bar{T}\\0\\\tilde{T}\\\tilde{T}\\0\end{Bmatrix} \quad \text{---}(11)$$

ここで，記号 ν，B，D などは側板要素と同様である。

面内ひずみ $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}$，面外ひずみ $\chi_r, \chi_\theta, \chi_{r\theta}$ は，

$$\varepsilon_r=\partial u/\partial r,\quad \varepsilon_\theta=\{\partial v/\partial\theta+u\}/r,\quad \gamma_{r\theta}=(\partial u/\partial\theta)/r+\partial v/\partial r-v/r$$

$$\chi_r=\partial^2 w/\partial r^2,\quad \chi_\theta=-(\partial^2 w/\partial\theta^2)/r^2-(\partial w/\partial r)/r,\quad \chi_{r\theta}=-(\partial^2 w/\partial r\partial\theta)/r+(\partial w/\partial\theta)/r^2 \quad \text{----(12)}$$

変位関数は側板要素と同様に次式を用いる。

$$u=\{(1-R/2)u_i^{(n)}+(R/2)u_j^{(n)}\}\cos n\theta$$

$$v=\{(1-R/2)v_i^{(n)}+(R/2)v_j^{(n)}\}\sin n\theta \quad \text{--------(13)}$$

$$w=\{(1-3R^2/4+R^3/4)w_i^{(n)}+b(R-R^2+R^3/4)\beta_i^{(n)}+(3R^2/4-R^3/4)w_j^{(n)}+b(R^3/4-R^2/2)\beta_j^{(n)}\}\cos n\theta$$

ここで，$R=(r-r_i)/b$, $b=(r_j-r_i)/2$

弾性ばね(地盤反力係数)を E_{sv} とし，弾性ばね上の底板のひずみエネルギーを求めると，

$$U=(1/2)\iint\Big[B\{(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)^2+2(1-\nu)(\gamma_{r\theta}^2/4-\varepsilon_r\varepsilon_\theta)\}-2E\alpha(\varepsilon_r+\varepsilon_\theta)T/(1-\nu)\Big]r\,d\theta\,dr+(1/2)\iint D\Big[\{(\chi_r+\chi_\theta)^2+2(1-\nu)(\chi_{r\theta}^2-\chi_r\chi_\theta)\}-2E\alpha(\chi_r+\chi_\theta)T/(1-\nu)+E_{sv}w^2\Big]r\,d\theta\,dr+h\iint G(T)\,r\,d\theta\,dr \quad \text{----(14)}$$

底板要素の平衡方程式は側板要素と同様に得られ，

$$\big[[K_p]+[K_{sv}]\big]\{\delta\}_n=\{Q\}_n \quad \text{----------(15)}$$

ここで，$\{\delta\}_n=\{u_i^{(n)}\ v_i^{(n)}\ w_i^{(n)}\ \beta_i^{(n)}\ u_j^{(n)}\ v_j^{(n)}\ w_j^{(n)}\ \beta_j^{(n)}\}^t$

$[K_p]$, $[K_{sv}]$ は円板，弾性ばねによる剛性マトリックス，Q は熱荷重である。K_{sv} は容易に得ることができるので以下に $[K_p]$ の成分を零以外の要素について示す。

$$[K_p]=\pi\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{18}\\ & \ddots & \vdots\\ \text{symm.} & & K_{88}\end{bmatrix} \quad \text{-------(16)}$$

$K_{11}=B(b+r_i)/(2b)-B_1+b(B+n^2B_2)(I_0-I_1+I_2/4)$

$K_{12}=-n(B_1-B_2)/2+nb(B+B_2)(I_0-I_1+I_2/4)$

$K_{15}=-B(b+r_i)/(2b)+b(B+n^2B_2)(I_1-I_2/2)/2$

$K_{16}=-n(B_1+B_2)/2+bn(B_1+B_2)(I_1-I_2/2)/2$

$K_{22}=b(n^2B+B_2)(I_0-I_1+I_2/4)+B_2(3b+r_i)/(2b)$

$K_{25}=n(B_1+B_2)/2+bn(B+B_2)(I_1-I_2/2)/2$

$K_{26}=b(n^2B+B_2)(I_1-I_2/2)/2-B_2(b+r_i)/(2b)$

$K_{55}=B(b+r_i)/(2b)+B_1+b(B+n^2B_2)I_2/4$

$K_{56}=n(B_1-B_2)/2+bn(B+B_2)I_2/4$

$K_{66}=B_1(r_i-b)/(2b)+b(n^2B+B_2)I_2/4$

$K_{33}=3D(1+r_i/b)/(2b^2)+3n^2D_1(I_0-I_1-3I_2/4+I_3-I_4/4)+9X_1(I_2-I_3+I_4/4)/(4b)+3X_2(J_1-J_2/2-3J_3/4+5J_4/8-J_5/8)+bX_3(L_0-3L_2/2+L_3/2+9L_4/16-3L_5/8+L_6/16)$

$K_{34}=D(1+3r_i/b)/b+n^2D_1(2I_0-9I_2/2+7I_3/2-3I_4/4)+3X_1(-I_1+5I_2/2-7I_3/4+3I_4/8)+bX_2(-J_0+2J_1+3J_2/2-4J_3+35J_4/16-3J_5/8)+b^2X_3(L_1-L_2-L_3/2+L_4-7L_5/16+L_6/16)$

$K_{37}=-3(1+r_i/b)D/(2b^2)-3n^2D_1(I_0-I_1-3I_2/2+2I_3-I_4/2)-9X_1(I_2-I_3+I_4/4)/(4b)+3X_2(-J_1+J_2/2+3J_3/2-5J_4/4+J_5/4)/2+bX_3(3L_2-L_3-9L_4/4+3L_5/2-L_6/4)/4$

$K_{38}=\{2/b+3r_i/(2b^2)\}D+n^2D_1(I_0-3I_1/2-3I_2/2+5I_3/2-3I_4/4)+3X_2(I_2-5I_3/4+3I_4/8)/2+bX_2(J_1-3J_2/4-3J_3/2+25J_4/16-3J_5/8)+b^2X_3(-L_2+L_3/2+3L_4/4-5L_5/8+L_6/8)$

$K_{44}=(1+2r_i/b)D+\{-1+bn^2(4I_1-7I_2+4I_3-3I_4/4)\}D_1+bX_1(I_0-4I_1+11I_2/2-3I_3+9I_4/16)+2b^2X_2(-J_1+3J_2-3J_3+5J_4/4-3J_5/16)+b^3X_3(L_2-2L_3+3L_4/2-L_5/2+L_6/16)$

$K_{47}=-D\{1+3r_i/(2b)\}/b-n^2D_1(3I_1-9I_2+7I_3-3I_4/2)/2+3X_1(I_1-5I_2/2+7I_3/4-3I_4/8)/2+bX_2(-9J_2/2+8J_3-35J_4/8+3J_5/4)/2+b^2X_3(3L_3-4L_4+7L_5/4-L_6/4)$

$K_{48}=(1+r_i/b)D+bn^2D_1(I_1-7I_2/2+3I_3-3I_4/4)+bX_1(-I_1+11I_2/4-9I_3/4+9I_4/16)+b^2X_2(3J_2/2-3J_3+15J_4/8-3J_5/8)+b^3X_3(-L_3+3L_4/2-3L_5/4+L_6/8)$

$K_{77}=3(1+r_i/b)D/(2b^2)-3n^2D_1(3I_2-4I_3+I_4)/4+9X_1(I_2-I_3+I_4/4)/(4b)+3X_2(-3J_3+5J_4/2-J_5/2)/4+bX_3(9L_4-6L_5+L_6)/16$

$K_{78}=-\{2/b+3r_i/(2b^2)\}D+n^2D_1(3I_2-5I_3+3I_4/2)/2+3X_1(-I_2+5I_3/4-3I_4/8)/2+bX_2(6J_3-25J_4/4+3J_5/2)/4+b^2X_3(-3L_4+5L_5/2-L_6/2)/8$

$K_{88}=(3+2r_i/b)D+\{1+bn^2(2I_3-I_2-3I_4/4)\}D_1+bX_1(I_2-3I_3/2+9I_4/16)+b^2X_2(-J_3+5J_4/4-3J_5/8)+b^3X_3(L_4-L_5+L_6/4)/4$

ここで，$B_1=\nu B$, $B_2=(1-\nu)B/2$, $D_1=\nu D$, $D_2=(1-\nu)D/2$

$X_1=D+4n^2D_2$, $X_2=n^2(D+4D_2)$, $X_3=n^2(n^2D+4D_2)$

$I_0\sim I_4$, $J_0\sim J_5$, $L_0\sim L_6$ は次の積分より得られる。

$$I_s=\int_0^2\frac{R^s}{bR+r_i}dR \quad s=0\sim 4,\qquad J_s=\int_0^2\frac{R^s}{(bR+r_i)^2}dR,\quad s=0\sim 5$$

$$L_s=\int_0^2\frac{R^s}{(bR+r_i)^3}dR \quad s=0\sim 6$$

底板要素の温度分布は側板要素と同じく，板厚，半径方向に直線変化をし，円周方向にはフーリエ級数で展開できるとする。

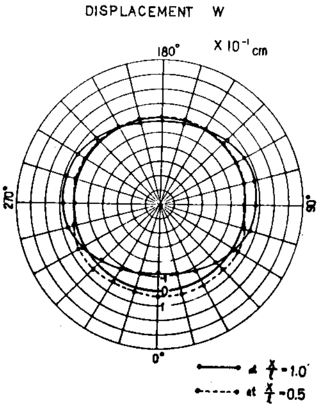
$$T=T(r,\theta,z)=\{(A_1+B_1z)(Rb+r_i)+C_1+D_1z\}\cos n\theta \quad \text{------(17)}$$

ここで，$A_1\sim D_1$ は底板要素の両端 i,j 点での温度分布より定まる定数である。また貯槽円周方向温度分布は側板要素と同様の関数を仮定する。

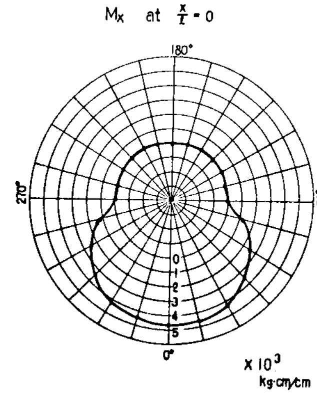
3. 解析例

以下の解析においては，材料定数として $E=2.1\times10^5\,\mathrm{kg/cm^2}$，$\alpha=10^{-5}$，$\nu=1/6$ で，側板の高さ $l=15.3\,\mathrm{m}$，半径 $a=8\,\mathrm{m}$ 側板の厚さ $h_1=25\,\mathrm{cm}$，底板の厚さ $h_2=25\,\mathrm{cm}$ とする。分割数は側板120分割，底板については80分割である。

図―4から図―7は下端固定の円筒形タンクの結果で，温度分布は図―2において内壁表面で0℃，外壁表面では$T_{const}=0$℃，$T_o=15$℃である。図―4には上端および，$x/l=0.5$における半径方向変位wを，図―5には固定端における長て方向曲げモーメントM_xを図―6，7にはそれぞれ各断面の曲げモーメントM_x，変位wを図示したものである。

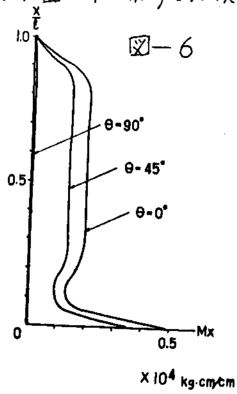


図―4 変位 w

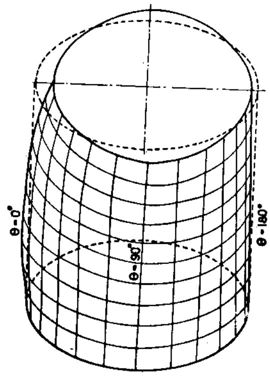


図―5 曲げモーメントM_x

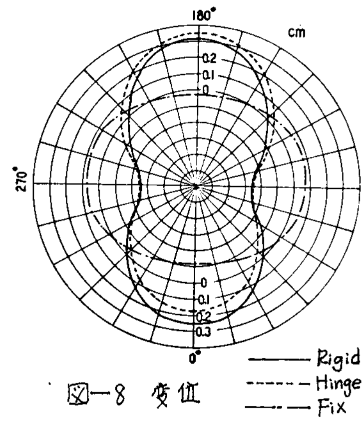
弾性基礎上の円筒形タンクの解析例として，地盤反力係数$E_{sv}=2$kg/cm³としたときの結果の一部を図―8，図―9に示す。温度分布は前記のそれと同じものである。図―8は側板上端の変位wを図―9は曲げモーメントM_xである。図―10に種々のE_{sv}による，底板，側板変位を示す。



図―6



図―7 変位



図―8 変位

地盤が剛になるにつれ，側板の変位が小さくなる。

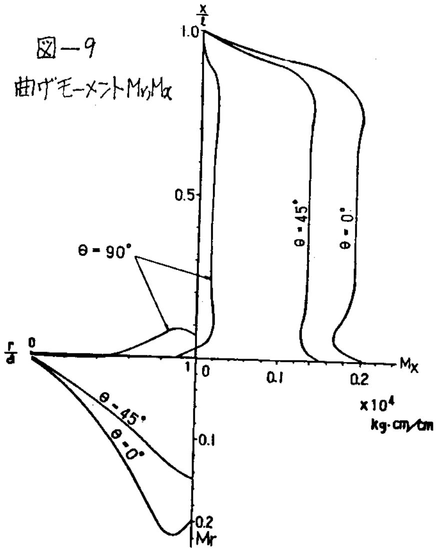
4. むすび

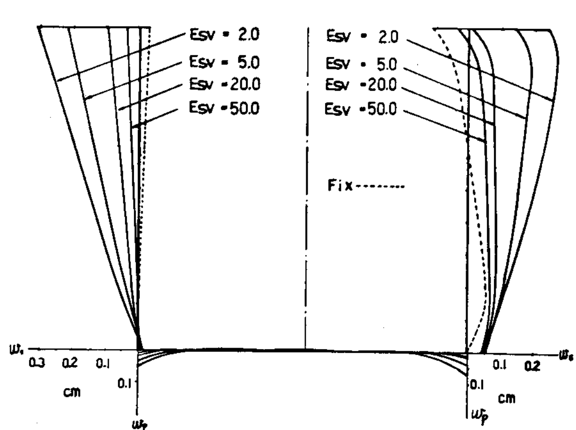
弾性基礎上のタンクの温度応力解析にFSMを適用し，特に複雑な温度分布のさいには非常に有効な解析方法であることを2,3の数値計算例で示した。

参考文献 1) 芳村仁 他：弾性地盤上の円筒形タンクの温度応力について，道支部論文報告集 第35号 S52年 2) Cheung, Y.K.: Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon press, 1976

図―9

曲げモーメントM_r,M_x





図―10

底板，側板の変位