補剛円筒シェルの非線形座屈解析

北海道工業大学　正会員　吉田紀昭

1. 緒　言

薄肉シェル構造の座屈についての実験値と理論値には従来大きな差があった。理論の方面からの問題としては座屈前変形の座屈解への影響の評価、初期不整の取扱い、補剛材の円筒中央面からの偏心の影響、境界条件についての考慮などがあげられるであろう。本研究では非線形座屈前変形の解析による座屈解、補剛材の偏心などを考慮してストリンガ、リング および螺旋状に配置された螺旋補剛材（図-1）について定式化を行い円筒の内外面に補剛された場合、および補剛材の組合せなどについて数値解を得た。荷重は軸力およびそのシェル中央面からの偏心、内外圧としシェルは直交異方性体である。境界条件については2種類を考慮し円筒の端部におけるシェル要素としての固定支持、単純支持を考慮し半径方向の変位は端部においては共に零とする。非線形座屈前変形は解析的に陽な形で求められるが座屈解析は座屈荷重の高次の非線形となり数値解析によるのであるが安定した数値解を得るのに多大な工夫を要した。後述するように非線形座屈前変形は端部においてその半径方向変位が著しく現われ一様に半径方向にふくらんとする線形解とは大きく異る。したがって座屈値にも大きな差がみられる。以下は理論の特徴と思われる部分を上げ、記号については一般的なものには説明を省略する。

2. 支配方程式の誘導

応力－歪関係は直交異方性体の一般的式を用い、歪－変位関係は半径方向変位の2次の項まで含めたものを用いる

$$\varepsilon_x = u_{,x} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \qquad \varepsilon_y = v_{,y} + \frac{w}{R} + \frac{1}{2} w_{,y}^2$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} \qquad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

座標系は図-2参照 支配方程式は総和ポテンシャルエネルギの変分から得るのであるが補剛材の偏心を考慮するために次のような半径方向の局所変形を考慮した変形式を用いる

$$u = u_0 + z\, u_{,z} \quad v = v_0 + z\, v_{,z} \quad w = w_0 + z\, w_{,z}$$

直交異方性シェルの歪エネルギは

$$\Pi_S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^{L} \left(N_x \varepsilon_x + N_{xy}\gamma_{xy} + N_y \varepsilon_y - M_x w_{,xx} + 2M_{xy} w_{,xy} - M_y w_{,yy} \right) dx\, dy$$

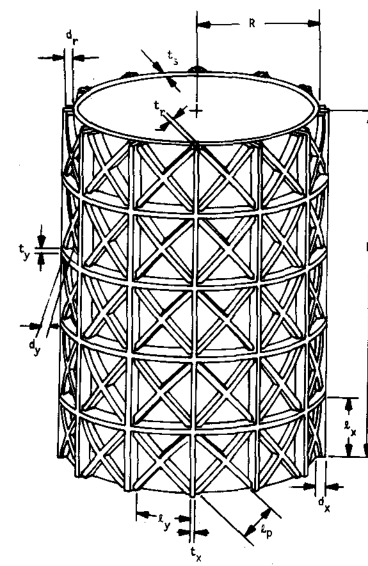

図-1　補剛円筒シェル

螺旋補剛材の歪エネルギは

$$\Pi_H = \frac{1}{2\ell_p}\int_0^{L}\int_0^{2\pi R} \left\{ \int_{A_H} E_H \varepsilon_\xi'^2 dA_H + G_H J_H w_{,\xi\eta}^2 \right\} dx\, dy$$

添字 H は螺旋補剛材を意味し、ξ-η 系で表わされている量は例えば $u_\xi = u\cos\theta + v\sin\theta$ のごとき幾何学的考察によりシェル中央面における x-y 系の量に変換される。

$$w_{,\xi\eta} = -\frac{1}{2} w_{,xx} \sin 2\theta + w_{,xy} \cos 2\theta + \frac{1}{2} w_{,yy} \sin 2\theta$$

$$\varepsilon_\xi' = \varepsilon_x \cos^2\theta + \varepsilon_y \sin^2\theta + \gamma_{xy} \sin\theta\cos\theta - z\left(w_{,xx}\cos^2\theta + 2 w_{,xy} \sin\theta\cos\theta + w_{,yy}\sin^2\theta \right)$$

また螺旋補剛材は右廻りと左廻りが対になっているものとする。同様にストリンガ、リングの歪エネルギは

$$\Pi_L = \frac{1}{2\ell_y}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\left\{\int_{A_L} E_L \varepsilon_L^2\, dA_L + G_L J_L w_{,xy}^2\right\} dx\, dy$$

$$\Pi_C = \frac{1}{2\ell_x}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\left\{\int_{A_C} E_c \varepsilon_c^2\, dA_c + G_c J_c w_{,xy}^2\right\} dx\, dy$$

外力によるポテンシャルは

$$W = \int_0^L\int_0^{2\pi R} p\, w\, dx\, dy + \int_0^{2\pi R}\left[\hat{N}_x u - \hat{M}_x w_{,x}\right]_0^L dy$$

ただし p は外圧を正、$\hat{N}_x$ は圧縮力を正とし、$p = \nu \hat{N}_x$; $\hat{M}_x = \bar{e}\hat{N}_x$ と表し $\bar{e}$ は軸力 $\hat{N}_x$ の中央面からの偏心量を含めている。補剛円筒シェル各部材の歪エネルギおよび外力による仕事より総和ポテンシャルエネルギは

$$\Pi = \Pi_S + \Pi_H + \Pi_L + \Pi_C + W$$

平衡式と境界条件式は総和ポテンシャルエネルギを汎関数とする変分原理によって誘導するのであるがまず Π を歪と変位をパラメタとする式に変形整理する。すなわち

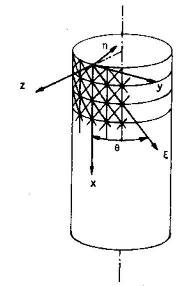

図-2 座標系

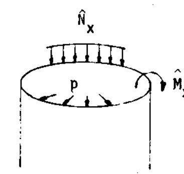

図-3 荷重

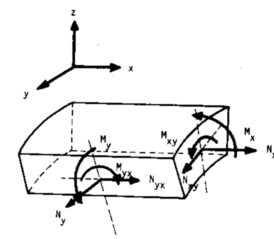

図-4 合応力、合モーメント

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_0^L\int_0^{2\pi R}\left\{C_1\varepsilon_x^2 + C_2\varepsilon_y^2 + C_3\varepsilon_x\varepsilon_y + C_4\gamma_{xy}^2 + C_5 w_{,xx}^2 + C_6 w_{,yy}^2 + C_7 w_{,xx}w_{,yy} + C_8 w_{,xy}^2\right.$$
$$\left. + C_9\varepsilon_x w_{,xx} + C_{10}\varepsilon_x w_{,yy} + 2C_{10}\gamma_{xy}w_{,xy} + C_{10}\varepsilon_y w_{,xx} + C_{11}\varepsilon_y w_{,yy}\right\} dx\, dy$$
$$+ \int_0^L\int_0^{2\pi R} p\, w\, dx\, dy + \int_0^{2\pi R}\left[\hat{N}_x u - \hat{M}_x w_{,x}\right]_0^L dy$$

ここに係数 C は材料定数と幾何形状定数で表わされる定数係数であり、歪と変位は総てシェル中央面での量である。平衡方程式と境界条件式は変分法による膨大な数式の計算の結果得られ各々平衡方程式は

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0$$
$$N_{y,y} + N_{xy,x} = 0$$
$$-M_{x,xx} + M_{xy,xy} - M_{y,yy} + \frac{1}{R}N_y - N_x w_{,xx} - N_y w_{,yy} - 2N_{xy}w_{,xy} + p = 0$$

境界条件式は

$N_x + \hat{N}_x = 0$	または	$u = 0$
$N_{xy} = 0$	または	$v = 0$
$M_x + \hat{M}_x = 0$	または	$w_{,x} = 0$
$M_{x,x} - M_{xy,y} + N_x w_{,x} + N_{xy} w_{,y} = 0$	または	$w = 0$

3. 座屈前解析

座屈前においては変位や応力は総て円周方向には一定であると仮定し、境界における軸方向および円周方向の変位は零でないとするのが座屈解析の対象として一般的であるのでこれを固定する。したがって平衡方程式の第1,2式は $N_x = -\hat{N}_x$, $N_{xy} = 0$ と解かれ、結局第3式を境界条件の第3,4式の下で解くことになる。合応力、合モーメントは総和ポテンシャルエネルギを歪と曲率で偏微分して得られ、それらを用いて整理すると平衡式の第3式は座屈前の半径方向変位 w_A のみを未知数とする4階線形常微分方程式となりその一般解は

$$w_A = \gamma_1 \sin\alpha_1 x \sinh\alpha_2 x + \gamma_2 \sin\alpha_1 x \cosh\alpha_2 x + \gamma_3 \cos\alpha_1 x \sinh\alpha_2 x + \gamma_4 \cos\alpha_1 x \cosh\alpha_2 x + w_A^p$$

w_A^p はひとつの特殊解である。積分定数 $\gamma_1 \sim \gamma_4$ は境界条件の第3,4式に対応して求められるのであるが第4式は $w_A = 0$ に固定して第3式の2つの場合を各々固定および単純支持として進める。座屈前変形の解析例は図-6

図－7に示めされているが円筒の端部に顕著な半径方向変位が現われる。これは補剛材のない場合については実験で確められている事実である。線形解析ではこの座屈前の変位を円周方向および軸方向ともに一定であると仮定したものと同値であり後の座屈解析に及ぼす影響はきわめて大きいであろうことが予測されるのである。

4. 座屈解析

(1) 平衡方程式と境界条件式　　座屈解析は前節で得られた座屈前の変形の上に座屈時の変形モードを重ねて考えた時の固有値、固有ベクトル解析である。非線形座屈解析では半径方向座屈前変形 w_A が円筒軸に沿って一定でないとして求まる結果、線形解を下廻ることは容易に予測される。支配方程式は総て変形前の円筒で立てられたものが座屈時も成立つとする。ただし座屈解析において取扱う変数は座屈前の量と座屈時の量との和として考えなければならない。例えば半径方向変位については $w = w_A + w_B$，軸方向の合応力は $N_x = N_{xA} + N_{xB}$ などのごとくである。添字Bは座屈時の量を表す。これら和の形の変数を平衡方程式、境界条件式などへ代入整理するのであるが座屈時の量についてはその2次以上の項を省略する。微分方程式の階数を下げるために座屈時の変位量 u_B v_B w_B の他に曲げモーメント M_{xB} を独立変数として扱う。すなわち $M_x = -\partial\pi/\partial w_{,xx}$ から得られる式

$$M_{xB} + c_5 w_{B,xx} + \frac{1}{2} c_7 w_{B,yy} + \frac{1}{2} c_9 (u_{B,x} + w_{A,x} w_{B,x}) + \frac{1}{2} c_{10} \left(v_{B,y} + \frac{w_B}{R} \right) = 0$$

を平衡方程式に加えて合計4本とする。

(2) 解の仮定と斉次平衡方程式　　4本の偏微分方程式を解くにあたり円周方向には三角関数による分布を仮定し次のような変数分離形の解を仮定する

$$u_B = U(x) \cos \frac{ny}{R} \qquad v_B = V(x) \sin \frac{ny}{R} \qquad w_B = W(x) \cos \frac{ny}{R} \qquad M_{xB} = M(x) \cos \frac{ny}{R}$$

ここに $U(x)$ $V(x)$ $W(x)$ $M(x)$ は x のみの関数であり、n は円周方向の分布波数である。これらの仮定された解を平衡式、境界条件式に代入すると2階線形常微分方程式が得られる。これらの連立線形常微分方程式を差分式を用いて解く、すなわち

$$Z_i' = \frac{Z_{i+1} - Z_{i-1}}{2\Delta x} \qquad Z_i'' = \frac{Z_{i+1} - 2Z_i + Z_{i-1}}{\Delta x^2}$$

ただし $Z_i = (U_i \ V_i \ W_i \ M_i)^T$ は軸方向に i 番目の差分点における未知量のベクトルであり、i 番目の差分式は

$$[A_i] Z_{i-1} + [B_i] Z_i + [C_i] Z_{i+1} = 0$$

4×4の係数行列 A_i B_i C_i は前述の定数係数 c および n, $\hat{N}_x$, w_A を含む。さらに斉次境界条件式を含め、座屈方程式の形は

$$\begin{bmatrix} E_0 & F_0 & & & & & \\ A_1 & B_1 & C_1 & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & A_i \ B_i \ C_i & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & A_{N-1} & B_{N-1} & C_{N-1} \\ & & & & & D_N & E_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_i \\ \vdots \\ Z_{N-1} \\ Z_N \end{Bmatrix} = 0$$

(3) 非線形固有値問題　　座屈問題の一般的形として連立斉次方程式が導びかれた。この係数行列の成分は座屈前変形 w_A などの関数であるため座屈荷重 $\hat{N}_x$ の高次の非線形関数であると考えることができる。したがってこの係数行列の行列式が零となるような $\hat{N}_x$ のうちその値の最小のものを求めることになる。ベクトル Z はその時の座屈モードを与える。係数行列をH、座屈荷重を λ で表すと座屈方程式は $H(\lambda) Z = 0$ と書ける。この係数行列をある仮定値 λ_0 の周りで Taylor 展開し高次の項を落して近似式を得、反復計算によって λ と Z

の数値解を求める。r 回目の反復の式は

$$H(\lambda_0)\left\{\frac{Z}{\Delta\lambda}\right\}^{(r)} = -\left[\frac{\partial H(\lambda_0)}{\partial\lambda} + \Delta\lambda^{(r-1)}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H(\lambda_0)}{\partial\lambda^2}\right] Z^{(r-1)}$$

この連立一次方程式を解き、さらに変位ベクトル Z を1に正規化しておくと λ の補正量 Δλ は

$$\Delta\lambda^2 = 1 \Big/ \left\{\frac{Z}{\Delta\lambda}\right\}^T \left\{\frac{Z}{\Delta\lambda}\right\}$$

また Δλ の正しい符号を与えることは重要でありここでは Rayleigh の商からその符号を判定する、すなわち

$$\Delta\lambda^{(r)} = -Z^{(r-1)T}\left[\frac{\partial H(\lambda_0)}{\partial\lambda}\right]Z^{(r-1)} \Big/ Z^{(r-1)T}\left[\frac{\partial H(\lambda_0)}{\partial\lambda}+\Delta\lambda^{(r-1)}\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H(\lambda_0)}{\partial\lambda^2}\right]Z^{(r-1)}$$

以上で述べた方法には H(λ) の λ での偏微分形が必要でありこれらを陽な形で求めておく。部分行列 A_i B_i C_i などの2回微分まで必要であり座屈前変形 w_A およびその微分 w_A' w_A'' などの λ についての偏微分形も計算されなければならないが繁雑ではあるが困難はない。ここではページの制限上すべて割愛する。

5. 数値計算例

(1) 実験値との比較計算　解析理論などの妥当性を確めるため補剛材つき円筒シェルの数少ない実験例から NASA で行なわれた縦補剛材つき実験と計算値とを比較すると図-5のようである。補剛材が円筒外面についた場合の座屈荷重の増加は顕著である。実験値との差は理論値における近似や反復計算による誤差などがあり実験の方からみると境界条件や初期不整による影響が含まれているものと思われる。特に内側に補剛材のついた場合の実験値は2種類の境界条件による理論解の中間に位置していることから実験における境界条件と理論との差が現われていると推測される。理論解は円筒の長さが増すと座屈値が漸減してゆく様子を示しており、2種類の境界条件の差が長さの増大にともなって漸減してゆく様子も認められる。

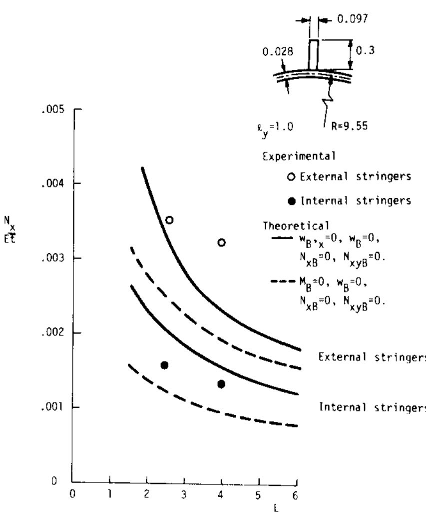

図-5　縦補剛円筒シェルの計算値と実験値

表-1　座屈解析例　　L = 96.5　R = 24.3　　単位 Kg，cm

	縦補	横補	螺補	内圧	偏心	境界	ℓ_x	ℓ_y	t_s	t_x	d_x	t_y	d_y	t_r	d_r	W	$\bar{\lambda}$	$\hat{N}_x$
1	内	内	—	無	無	単	3.27	1.13	0.049	0.016	-0.461	0.054	-0.40			2.54	0.062	150
2	内	内	—	有	無	固	3.57	1.48	0.056	0.013	-0.66	0.027	-0.38			2.64	0.064	149
3	外	外	—	無	無	単	4.38	0.77	0.038	0.019	0.39	0.135	0.26			2.28	0.055	158
4	外	外	—	有	有	単	3.75	0.31	0.020	0.045	0.47	0.033	0.19			3.74	0.091	158
5	外	内	—	無	無	単	3.80	0.64	0.042	0.018	0.45	0.347	-0.07			2.51	0.061	149
6	—	—	内	無	無	単	3.83	2.56	0.038					0.026	-0.64	2.21	0.054	153
7	—	—	外	有	有	単	6.11	1.73	0.063					0.048	0.69	4.19	0.102	192
8	外	外	外	無	無	単	4.33	0.60	0.031	0.009	0.47	0.044	0.43	0.014	0.13	2.00	0.049	149
9	外	外	外	有	有	単	3.65	0.89	0.040	0.061	0.59	0.019	0.22	0.003	0.03	3.37	0.082	156
10	内	内	外	有	有	単	5.70	0.77	0.041	0.003	-0.13	0.025	-0.13	0.038	0.52	3.77	0.091	144

(2) 補剛材別の座屈解析例　　ストリンガ、リング、および螺旋補剛材の円筒内面および外面への配置またこれら補剛材の組合せによる解析を行い荷重として軸力のみをかけた場合と内圧を合せ作用させた場合、また軸力に偏心を与えた場合の数例を表－1にまとめた。比較の基準としては全体座屈に合せて補剛材自身の座屈補剛材で囲まれた円筒シェル部分の局部座屈解析（本稿では省略）を行い与えられた外力に耐える補剛材およびシェル板厚を求めてその寸法や重量などを比較するものである。典形的な座屈前変形 w_A 全体座屈変形モード w_B は図－6,7に示めされている。

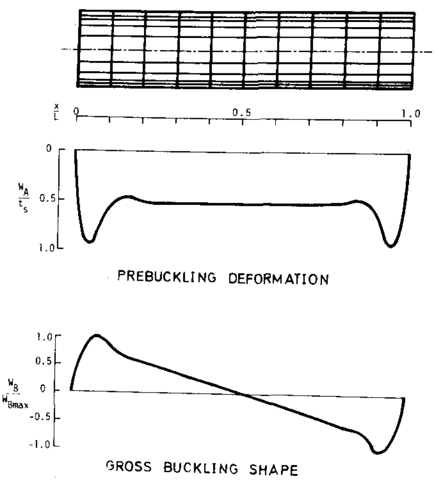

図-6　縦横補剛円筒の解析例

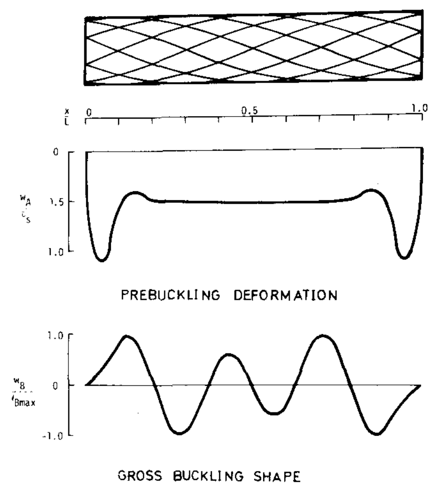

図-7　螺旋補剛円筒の解析例

6. 結　言

非線形座屈解析を行うことにより補剛円筒シェルにおいても座屈前変形が円筒端部に著しく現われることが理論的に確認された。その結果として従来の線形解析による座屈荷重よりも5～30％位減少した値が得られ種々の補剛材や円筒の形状などについてより多くの研究による一般的な結論を得ることが必要である。総和ポテンシャルエネルギによる定式化により螺旋補剛材の考慮が比較的容易になされ螺旋補剛材の有効性が認められた。非線形固有値問題を解くにあたってTaylor展開による2次の近似式を反復する方法によりほぼ安定した解が得られるようになったのであるが数値解析的により改良されるのはこの点であろう。

参考文献

1. Stein, M., *The Influence of Prebuckling Deformations and Stresses on the Buckling of Perfect Cylinders*, NASA R-190 1964
2. Card, M. and Jones, R., *Experimental and Theoretical Results for Buckling of Eccentrically Stiffened Cylinders*, NASA TN D-3639 1966
3. Yoshida, N., *Modified Davidon's Variable Metric Method for Structural Optimization*, 14th Int. Conf. on Theor. and Appl. Mech. Delft 1976