

有限帯板法による板の座屈について

北海道大学 正員 能町 純雄  
 北海道大学 正員 角田 典史雄  
 北海道大学 学生員 高橋 義裕

1. ま え が き

直接的応力や直接的せん断応力または、それらの荷重群の組合せにより一様分布した応力のもとでの矢形板の座屈については、広く研究されその結果も多く発表されている。またガーダーのフランジ部に荷重が作用する様な場合のウェブプレート座屈に関しては、Zetlin<sup>1)</sup>, Rocky<sup>2)</sup>, Kahn<sup>3)</sup>の研究がある。分布荷重が一つの面内に作用する場合、その面内の応力分布は、複雑となり座屈荷重を求める事が困難となるが、著者らの用いた有限帯板法を用いる事により応力分布の変化する系においても容易に精度良く座屈荷重を求める事ができる。

2. 解析法

面内分布荷重を受ける平板の座屈を考えるには、まずこれらの分布荷重による面内応力分布を決定しなければならぬ。そのためには、まず平板構造を構成する平板要素の幅方向を分割しその一つの幅を  $b$ 、長さ  $l$  とし、 $b \times l$  を一つの帯板要素と考え、その要素に変位せん断公式<sup>4)</sup>を用い、面内応力分布を決定する。

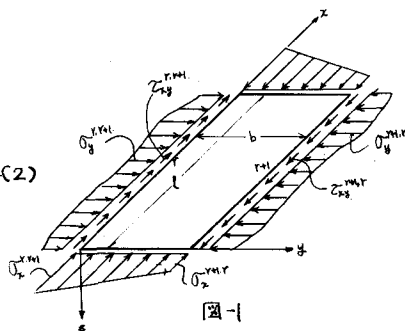
座屈変形にもなう変位とし面外変位  $w$ 、面内変位  $u, v$  を考え、これらの変位関数を次の様に仮定す。

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^m \{ (1-3\eta^2+2\eta^3)W_i^e + (\eta-2\eta^2+\eta^3)b\Theta_i^e + (3\eta^2-2\eta^3)W_i^{m1} + (\eta^2+\eta^3)b\Theta_i^{m1} \} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha \\ v &= \sum_{i=1}^m \{ (1-\eta)V_i^e + \eta V_i^{m1} \} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad u = \sum_{i=1}^m \{ (1-\eta)U_i^e + \eta U_i^{m1} \} \cos \frac{i\pi}{l} \alpha \end{aligned} \right\} \text{---(2)}$$

ここで  $\eta = \frac{y}{b}$  である。

接線変位は、次の様に表わされる。

$$\left. \begin{aligned} w_r &= \sum_{i=1}^m W_i^e \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad w_{rm} = \sum_{i=1}^m W_i^{m1} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad \theta_r = \sum_{i=1}^m \Theta_i^e \sin \frac{i\pi}{l} \alpha \\ \theta_{rm} &= \sum_{i=1}^m \Theta_i^{m1} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad u_r = \sum_{i=1}^m U_i^e \cos \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad u_{rm} = \sum_{i=1}^m U_i^{m1} \cos \frac{i\pi}{l} \alpha \\ v_r &= \sum_{i=1}^m V_i^e \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad v_{rm} = \sum_{i=1}^m V_i^{m1} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha \end{aligned} \right\} \text{---(2)}$$

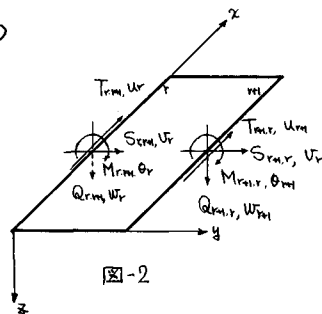


接線変位に対応する節線力は

$$\left. \begin{aligned} Q_{r,m1} &= \sum_{i=1}^m Q_i^{r,m1} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad Q_{m,r} = \sum_{i=1}^m Q_i^{m,r} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad M_{rm} = \sum_{i=1}^m M_i^{r,m1} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha \\ M_{m,r} &= \sum_{i=1}^m M_i^{m,r} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad T_{rm} = \sum_{i=1}^m T_i^{r,m1} \cos \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad T_{m,r} = \sum_{i=1}^m T_i^{m,r} \cos \frac{i\pi}{l} \alpha \\ S_{rm} &= \sum_{i=1}^m S_i^{r,m1} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha, \quad S_{m,r} = \sum_{i=1}^m S_i^{m,r} \sin \frac{i\pi}{l} \alpha \end{aligned} \right\} \text{---(3)}$$

$Q, M, T, S$  は、それぞれ節線直上における単位長さ当りの合断力、曲げモーメント、 $x$ 方向面内力、 $y$ 方向面内力を示す(図-2参照)

帯板要素の座屈変形にもなうポテンシャルエネルギー  $\Pi$  は、変形が微小で面外と面内との連成はないものとするとする。



変位関数を(1)式の様に仮定した場合  $\alpha=0, l$  の辺では、変位又は、対応する境界力が0となりエネルギーに寄与しない。従ってポテンシャルエネルギー  $\pi$  は、次の様に書かれる。(図1と図2参照)

$$\begin{aligned} \pi = & \frac{1}{2} D \int_0^l \int_0^b \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ & - \frac{1}{2} \frac{E t}{1-\nu^2} \int_0^l \int_0^b \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\nu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2}(1-\nu) \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \left\{ \sigma_x^{r+1} (1-\eta) + \sigma_y^{r+1} \eta \right\} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - \frac{1}{2} t \int_0^l \int_0^b \left\{ \sigma_y^{r+1} (1-\eta) + \sigma_x^{r+1} \eta \right\} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \\ & - t \int_0^l \int_0^b \left\{ \tau_{xy}^{r+1} (1-\eta) + \tau_{xy}^{r+1} \eta \right\} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right\} dx dy \\ & - \int_0^l \int_0^b \left\{ (M_{r+1} \theta_r + Q_{r+1} w_r + S_{r+1} v_r + T_{r+1} u_r) + (M_{r+1} \theta_{r+1} + Q_{r+1} w_{r+1} + S_{r+1} v_{r+1} + T_{r+1} u_{r+1}) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (4)$$

(1), (2), (3) 式を(4)式に代入し変分  $\delta \pi$  を求め  $\delta \pi / \delta U = 0$  (ただし  $U = \theta_r, w_r, v_r, u_r, \theta_{r+1}, w_{r+1}, v_{r+1}, u_{r+1}$ ) より帯板要素の剛性行列を求め。

節線力ベクトル, 節線変位ベクトルを

$$f = \left\{ T_m^{r+1}, S_m^{r+1}, Q_m^{r+1}, \frac{1}{b_0} M_m^{r+1}, T_m^{r+1}, S_m^{r+1}, Q_m^{r+1}, \frac{1}{b_0} M_m^{r+1} \right\}^T \quad (5)$$

$$U = \left\{ U_1^r, V_1^r, W_1^r, b_0 \theta_1^r, U_1^{r+1}, V_1^{r+1}, W_1^{r+1}, b_0 \theta_1^{r+1} \right\}^T \quad (6)$$

$$\text{とすれば } f = KU \quad (7)$$

と書ける。  $b_0$  は基準にとる帯板要素の幅である。また(4)式の座屈前応力  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  は変位を断公式より決定される確定値で帯板区間  $(r, r+1)$  で線形に変化するものとする。  $K$  の具体的内容については後述付録参照

### 3. 座屈係数の計算及 $\mu$ 計算例

上記2. で求められた要素剛性行列を  $A-\lambda B$  の形に整理し全体座標系  $\lambda$  の座標変換を行ない系全体の剛性行列の最小固有値  $\lambda_{min}$  を求め座屈係数  $\mu$  を決定する。

今、簡単な計算例として図-3に示されている四辺単純支持矩形板に一方方向  $y$  に沿って直線的に変化する圧縮応力

$$\sigma_x = \sigma_0 (1 - \varphi \eta) \quad (8)$$

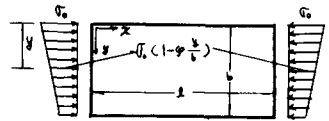


図-3

が作用する場合、特に  $\varphi=2$  (糸曲げ) と  $\varphi=0$  (糸圧縮) の時、幅  $b$  の4分割で本方法による座屈係数  $\mu$  は

i)  $\varphi=2$  の場合

$$\frac{\mu}{1} = \frac{2}{1} \text{ で } \mu = 23.9654 \quad (\text{厳密解}^5) \quad 23.88$$

ii)  $\varphi=0$  の場合

$$\frac{\mu}{1} = 1 \text{ で } \mu = 4.0010 \quad (\text{厳密解}^5) \quad 4.00 \text{ となった。 (ただし i), ii) とは } m=1 \text{ である。)}$$

次に図-4に示されている細長い長方形断面をもつ単純支持梁の横ばい座屈について本方法と文献(5)による計算結果と比較を行った。文献(5)のP-269で図心に集中荷重及び等分布荷重が作用した場合の荷重の臨界値が与えられている。

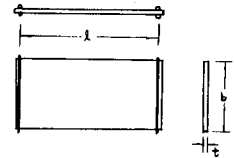


図-4

i) 図心に集中荷重が作用した場合

$$P_{cr} = 16.94 \frac{\sqrt{EI_1 C}}{l^2} \xrightarrow{\text{変形1}} \frac{P_{cr}}{b_0 t} \left(\frac{l}{b_0}\right)^2 = 1.9273 \frac{D_1 \pi^2}{t b_0^2} = R_1 \frac{D_1 \pi^2}{t b_0^2} \text{-----(9)}$$

ii) 図心に等分布荷重が作用した場合

$$(8l)_{cr} = 28.3 \frac{\sqrt{EI_1 C}}{l^2} \longrightarrow \frac{(8l)_{cr}}{b_0 t} \left(\frac{l}{b_0}\right)^2 = 3.2364 \frac{D_2 \pi^2}{t b_0^2} = R_2 \frac{D_2 \pi^2}{t b_0^2} \text{-----(10)}$$

となり i), ii) の座屈係数を  $R_1 = 1.9273$ ,  $R_2 = 3.2364$  とした。

以下本方法による計算結果を示す。(ただしすべて  $m=1$  とする)

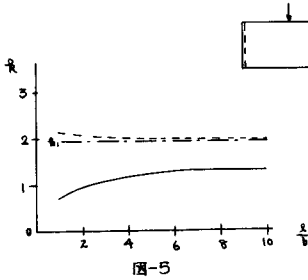


図-5

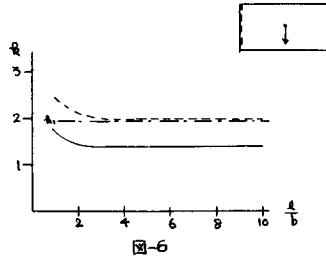


図-6

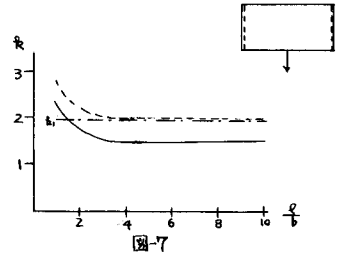


図-7

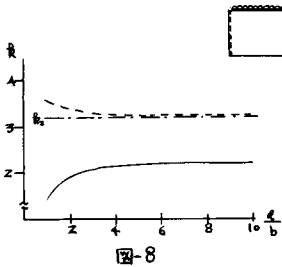


図-8

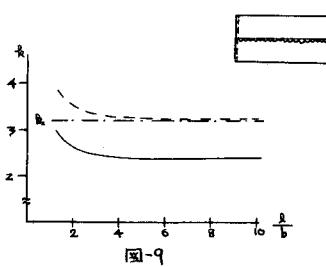


図-9

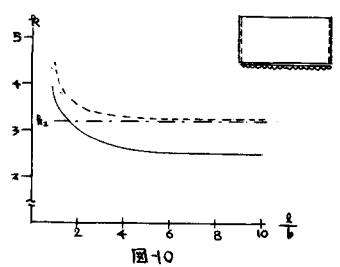


図-10

図-5～図-7は、集中荷重、図-8～図-10は等分布荷重を作用させた場合の座屈係数  $R$  をプロットしたものである。横軸はアスペクト比  $\alpha = \frac{l}{b}$  である。図中の一点鎖線は、(9)式、又は(10)式で与えられる  $R$  値である。破線は、(4)式中の  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  を無視した場合の  $R$  値で、実線は  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  をすべて含めて計算した場合の  $R$  値である。 $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  を無視した場合、 $\alpha$  が6以上になると単純支持梁の  $R$  値とはほぼ一致するが、 $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  を考慮して計算した場合は、単純支持梁の  $R$  値の約30%低い値となっている。

図-11は、周辺単純支持板で載荷幅  $c$  を変化させた場合、それぞれ  $\alpha$  に対する座屈係数  $R$  をプロットしたものである ( $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  をすべて含めて計算)。破線は Rockey<sup>2)</sup> (有限要素法による) による計算値である。アスペクト比  $\alpha$  が2くらいになると本方法と Rockey の値とは、ほぼ一致してくるが、 $\alpha$  が小さい場合は、若干の差がある。

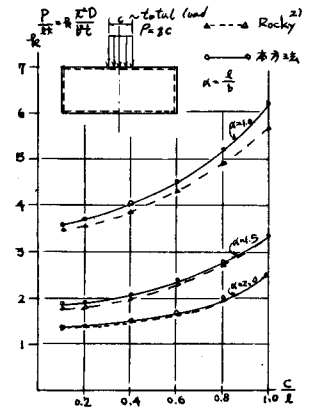


図-11

4. おとがき

以上一つの平板について上縁, 図心, 下縁に等分布荷重及び集中荷重が作用する場合について座屈係数を求めた。また載荷幅を变化させた場合の長の変化を知る事ができた。本方法は、I型断面部材, J型断面部材等にも容易に適用できる。計算には、北大大型計算センターの FACOM 230-75 を使用した。

5. 参考文献

- 1). Zetlin, L.; Elastic Instability of Flat Plates Subjected to Partial Edge Loads., Proc. ASCE, Vol. 81, Sept. 1955.
- 2). Rokey, K.C. and Bagchi, D. K.; Buckling of Plate Girder Webs under Partial Edge Loadings, Int. J. mech. Sci. 1970, Vol. 12
- 3). Khan, M. Z. and Walker, A.C.; Buckling of Plates Subjected to Localised Edge Loading, The Str. Eng. Vol. 50, No. 6. 1992
- 4). 能町, 尾崎, 大島, 佐藤; ホ-IIスラブの応力計算について, 土木学会北支, 研究発表論文集昭和46年度
- 5). Timoshenko, S. P.; Theory of Elastic Stability

〈付録〉

帯板要素の剛性行列

$$\begin{bmatrix} T_m^{YH} \\ S_m^{YH} \\ Q_m^{YH} \\ M_m^{YH} \\ T_m^{YH} \\ S_m^{YH} \\ Q_m^{YH} \\ M_m^{YH} \end{bmatrix} = \frac{1}{b_0} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} & a_{16} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & a_{25} & a_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} & 0 & 0 & a_{37} & a_{38} \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & 0 & 0 & a_{47} & a_{48} \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & a_{55} & a_{56} & 0 & 0 \\ a_{61} & a_{62} & 0 & 0 & a_{65} & a_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{73} & a_{74} & 0 & 0 & a_{77} & a_{78} \\ 0 & 0 & a_{83} & a_{84} & 0 & 0 & a_{87} & a_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ W \\ \Delta \theta \\ \Delta u \\ \Delta v \\ W \\ \Delta \theta \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & b_{15} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & 0 & 0 & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{44} & 0 & 0 & b_{47} & b_{48} \\ b_{51} & 0 & 0 & 0 & b_{55} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{62} & 0 & 0 & 0 & b_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{73} & b_{74} & 0 & 0 & b_{77} & b_{78} \\ 0 & 0 & b_{83} & b_{84} & 0 & 0 & b_{87} & b_{88} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ W \\ \Delta \theta \\ \Delta u \\ \Delta v \\ W \\ \Delta \theta \end{bmatrix}$$

$b_0$  = 基準板幅,  $h_0$  = 基準板厚,  $\eta = \frac{b}{b_0}$ ,  $\xi = \frac{h}{h_0}$ ,  $\beta_m = \frac{m\xi}{b_0}$ ,  $\beta_n = \frac{n\xi}{b_0}$ ,  $\nu_0 = \frac{\nu}{\nu_0}$ ,  $D_0 = \frac{Eh_0^3}{12(1-\nu_0^2)}$ ,  $\nu_5 = 1 + \nu_0$

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= \frac{1}{b_0} \left\{ 4\eta^2 \beta_m^2 + \frac{6}{\xi} (1-\nu) \right\}, \quad a_{12} = \frac{1}{b_0} \xi \beta_m \frac{3}{\xi} (3\nu-1), \quad a_{15} = \frac{1}{b_0} \xi \left\{ 2\eta^2 \beta_m^2 - \frac{6}{\xi} (1-\nu) \right\}, \quad a_{16} = -\frac{1}{b_0} \xi \beta_m \frac{3}{\xi} (1+\nu) \\
 a_{22} &= \frac{1}{b_0} \xi \left\{ 4(1-\nu)\eta^2 \beta_m^2 + \frac{12}{\xi} \right\}, \quad a_{25} = \frac{1}{b_0} \xi \beta_m \frac{3}{\xi} (\nu+1), \quad a_{26} = \frac{1}{b_0} \xi \eta \left\{ (1-\nu)\eta^2 \beta_m^2 - \frac{12}{\xi} \right\} \\
 a_{33} &= \frac{13}{55} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{12}{5} \eta^2 \beta_m^2 + \frac{12}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad a_{34} = \frac{11}{210} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{1}{5} \nu_2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{6}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad a_{37} = \frac{9}{110} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{12}{5} \eta^2 \beta_m^2 - \frac{12}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2} \\
 a_{38} &= -\frac{12}{420} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{1}{5} \xi^3 \beta_m^2 + \frac{6}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad a_{44} = \frac{1}{105} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{4}{105} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{6}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad a_{47} = \frac{13}{420} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 - \frac{1}{5} \xi^3 \beta_m^2 - \frac{6}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2} \\
 a_{48} &= -\frac{12}{420} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 - \frac{1}{105} \xi^3 \beta_m^2 + \frac{2}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad a_{55} = \frac{1}{b_0} \xi \eta \left\{ 4\eta^2 \beta_m^2 + \frac{6}{\xi} (1-\nu) \right\}, \quad a_{56} = -\frac{1}{b_0} \xi \beta_m \frac{3}{\xi} (3\nu-1), \quad a_{66} = \frac{1}{b_0} \xi \eta \left\{ 4(1-\nu)\eta^2 \beta_m^2 + \frac{12}{\xi} \right\} \\
 a_{73} &= \frac{13}{55} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{12}{5} \eta^2 \beta_m^2 + \frac{12}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad a_{74} = -\frac{11}{210} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 - \frac{1}{5} \nu_2 \xi^3 \beta_m^2 - \frac{6}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2}, \quad a_{83} = \frac{1}{105} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{4}{105} \eta^2 \xi^3 \beta_m^2 + \frac{6}{\xi} \frac{\xi^2}{\eta^2} \\
 b_{11} &= \frac{1}{12} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (3O_{x_j}^{YH} + O_{x_j}^{YH}) + \frac{3}{4} H_0 O_{y_j}^{YH}, \quad b_{15} = \frac{1}{12} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (O_{x_j}^{YH} + O_{x_j}^{YH}) - \frac{1}{2} \frac{3}{4} H_0 (O_{y_j}^{YH} + O_{y_j}^{YH}) + \frac{1}{2} \xi \beta_n \pi H_0 (Z_j^{YH} + Z_j^{YH}) \\
 b_{22} &= \frac{1}{12} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (3O_{x_j}^{YH} + O_{x_j}^{YH}) + \frac{3}{4} H_0 O_{y_j}^{YH}, \quad b_{26} = \frac{1}{12} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (O_{x_j}^{YH} + O_{x_j}^{YH}) - \frac{1}{2} \frac{3}{4} H_0 (O_{y_j}^{YH} + O_{y_j}^{YH}) - \frac{1}{2} \xi \beta_n \pi H_0 (Z_j^{YH} + Z_j^{YH}) \\
 b_{33} &= \frac{1}{55} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (10O_{x_j}^{YH} + 3O_{x_j}^{YH}) + \frac{1}{10} \frac{3}{4} H_0 (11O_{y_j}^{YH} + O_{y_j}^{YH}), \quad b_{34} = \frac{1}{220} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (15O_{x_j}^{YH} + 7O_{x_j}^{YH}) + \frac{1}{10} \xi H_0 O_{y_j}^{YH} - \frac{1}{20} \xi \beta_n \pi H_0 (5Z_j^{YH} + Z_j^{YH}) \\
 b_{37} &= \frac{9}{110} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (O_{x_j}^{YH} + O_{x_j}^{YH}) - \frac{3}{5} \frac{3}{4} H_0 (O_{y_j}^{YH} + O_{y_j}^{YH}) - \frac{1}{2} \xi \beta_n \pi H_0 (Z_j^{YH} + Z_j^{YH}) \\
 b_{38} &= -\frac{12}{420} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (7O_{x_j}^{YH} + 6O_{x_j}^{YH}) + \frac{1}{10} \xi H_0 O_{y_j}^{YH} + \frac{1}{20} \eta^2 \xi^3 \beta_n \pi H_0 (7Z_j^{YH} + 5Z_j^{YH}), \quad b_{44} = \frac{1}{220} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (5O_{x_j}^{YH} + 3O_{x_j}^{YH}) + \frac{1}{10} \xi H_0 (3O_{y_j}^{YH} + O_{y_j}^{YH}) \\
 b_{47} &= \frac{1}{220} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (6O_{x_j}^{YH} + 7O_{x_j}^{YH}) - \frac{1}{10} \xi H_0 O_{y_j}^{YH} - \frac{1}{20} \eta^2 \xi^3 \beta_n \pi H_0 (5Z_j^{YH} + 7Z_j^{YH}) \\
 b_{48} &= -\frac{12}{420} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (O_{x_j}^{YH} + O_{x_j}^{YH}) - \frac{1}{20} \eta^2 \xi^3 \beta_n \pi H_0 (O_{y_j}^{YH} + O_{y_j}^{YH}) + \frac{1}{20} \xi \beta_n \pi H_0 (Z_j^{YH} + Z_j^{YH}), \quad b_{55} = \frac{1}{12} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (3O_{x_j}^{YH} + 3O_{x_j}^{YH}) + \frac{3}{4} H_0 O_{y_j}^{YH} \\
 b_{66} &= \frac{1}{12} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (O_{x_j}^{YH} + 3O_{x_j}^{YH}) + \frac{3}{4} H_0 O_{y_j}^{YH}, \quad b_{77} = \frac{1}{55} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (3O_{x_j}^{YH} + 10O_{x_j}^{YH}) + \frac{1}{10} \frac{3}{4} H_0 (O_{y_j}^{YH} + 11O_{y_j}^{YH}) \\
 b_{78} &= -\frac{12}{420} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (7O_{x_j}^{YH} + 15O_{x_j}^{YH}) - \frac{1}{10} \xi H_0 O_{y_j}^{YH} - \frac{1}{20} \eta^2 \xi^3 \beta_n \pi H_0 (Z_j^{YH} + 5Z_j^{YH}) \\
 b_{83} &= \frac{1}{220} \eta^2 \xi^3 \beta_n^2 \pi^2 H_0 (3O_{x_j}^{YH} + 5O_{x_j}^{YH}) + \frac{1}{10} \xi H_0 (O_{y_j}^{YH} + 3O_{y_j}^{YH})
 \end{aligned}$$