変位ポテンシャルによる3次元応力問題の解法について

北見工業大学　正員　奥村　勇

1. 緒　言

3次元応力問題の解法には種々あるが，大別すると有限要素法，差分法およびその他の方法に見受けられる数値的解法と場の方程式と境界条件を解析的に満たす解析的解法の二つに分類されると思われる。

後者の解析的解法にも大きな二つの流れがあり，その一つは積分変換による方法であり，他の一つは級数解法によるものである。前者の積分変換による方法は場の領域が無限あるいは半無限の境界を持つような場合には，非常に有利な解法と思われるが，有限な境界を持つ場合には，有限積分変換を用いても，一般的には境界値が残り，それを処理する困難さでは，後者の級数解法によるものと大同小異である。もちろん，後者の級数解法による場合も困難さはある。その内，最も困難で最も重要と思われるのは，変位ポテンシャルを求めるために，数学的に難解な微分方程式を直接解かなければならないことである。

この解析的解法における二つの流れの内，どちらが有利でしかも簡明であるかについては，一概にいうことはできないようである。やはり，当面した問題に応じて，どちらかの方法を選択すべき事かと思われる。

本論文の目的は，級数解法によるものの中で，特に従来より求められている基本解を用いる場合に，はたして，その基本解が任意の直交曲線座標系においても適用できる解であるのか否か，さらには，適用できた場合に，その基本解に含まれる変位ポテンシャルが従来良くいわれている調和関数にはたしてなるのか否かなどについて考察を加えるものである。

本論文の前半の部分では，物体力がある場合の特殊解について述べたものであり，この部分は文献1)によったものである。後半の部分は，特に目新しさはないが，Neuberの解あるいはGalerkinの解が座標系を限定して導出されたものではないことを示し，また従来Neuberの解についていわれることを自分なりに確め，まとめて見たものであり，この部分は，大幅に文献2)によったものである。

2. 物体力がある場合の特殊解について

物体力をベクトル$\mathbb{X}$で表わすと，弾性体のつり合い方程式は次式のようである。

$$\nabla^2 \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \frac{\mathbb{X}}{G} = 0 \quad \cdots\cdots (1)$$

ここで，$\mathbf{u}$：変位ベクトル，∇^2：ラプラス演算子，ν：ポアソン比，G：せん断弾性係数

式(1)をLaméの定数μ，λで表わすと

$$\mu\nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} + \mathbb{X} = 0 \quad \cdots\cdots (2)$$

とも表現できる。

式(1)にdiv.を作用させて，

$$\mathrm{div}\,\nabla^2\mathbf{u} = \nabla^2\mathrm{div}\,\mathbf{u},\quad \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,f = \nabla^2 f$$

であることに留意すると，次式が得られる。

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\,\mathrm{div}\,\nabla^2\mathbf{u} = -\frac{1}{G}\,\mathrm{div}\,\mathbb{X} \quad \cdots\cdots (3)$$

式(1)にrot.を作用させて，$\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,f = 0$の関係を用いれば，次式が得られる。

$$\mathrm{rot}\,\nabla^2\mathbf{u} = -\mathrm{rot}\,\mathbb{X}/G \quad \cdots\cdots (4)$$

式(3)および式(4)において，$G \neq 0$，$\nu \neq 1/2$，$\nu \neq 1$として

$$\mathrm{div}\,\mathbb{X} = 0,\quad \mathrm{rot}\,\mathbb{X} = 0 \quad \cdots\cdots (5)$$

とすると，式(3)および式(4)より，それぞれ

$$\mathrm{div}\,\nabla^2\mathbf{u} = \nabla^2\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \quad \cdots\cdots (6)$$

$$\mathrm{rot}\,\nabla^2\mathbf{u} = \nabla^2\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = 0 \quad \cdots\cdots (7)$$

の関係が得られる。したがって，物体力$\mathbb{X}$が式(5)の関係を満たす場合には，$\mathrm{div}\,\mathbf{u}$および$\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$はそれぞれ調和関数および調和ベクトルとなる。体積ひずみeは$\mathrm{div}\,\mathbf{u}$であるので，体積ひずみeもまた調和関数となる。

一方，直交曲線座標系における任意ベクトル$\mathbf{A}$には

$$\nabla^2\mathbf{A} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

の関係があるので，$\mathbf{A} = \mathbf{u}$とすると

$$\nabla^2\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$$

となる。上式に∇^2を作用させて，$\nabla^2\mathrm{grad} = \mathrm{grad}\,\nabla^2$の関係を用いれば

$$\nabla^2\nabla^2\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\nabla^2\mathbf{u} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\nabla^2\mathbf{u}$$

が得られる。したがって、式(6)および式(7)の関係により、上式の右辺は$\mathbf{0}$となり、

$$\nabla^2\nabla^2 \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots\cdots (8)$$

の関係が得られ、物体力$\mathbf{X}$が式(5)の関係を満たせば、変位ベクトル$\mathbf{u}$は重調和ベクトルとなる。もちろん、物体力$\mathbf{X}$が$\mathbf{0}$の場合にも、式(6)、(7)および式(8)の関係は成立する。

さて、式(3)に戻り、物体力がポテンシャルのgrad. で

$$\mathbf{X} = \mathrm{grad}\,\alpha \quad \cdots\cdots\cdots (9)$$

と与えられた場合には、式(9)を式(3)の右辺に代入して

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\alpha \quad \cdots\cdots (10)$$

が得られる。ここで

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi \quad \cdots\cdots\cdots (11)$$

とおいて、式(10)に代入すると

$$\nabla^2\varphi = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\alpha \quad \cdots\cdots\cdots (12)$$

が得られる。したがって、物体力$\mathbf{X}$が式(9)のように与えられた場合の特殊解は、式(11)および式(12)で与えられる。式(4)は

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{X} = \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\alpha = \mathbf{0}$$
$$\mathrm{rot}\,\nabla^2\mathbf{u} = \nabla^2\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \nabla^2\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\varphi = \mathbf{0}$$

の関係より満たされている。

また、式(4)において、物体力$\mathbf{X}$がベクトルポテンシャルの rot. で

$$\mathbf{X} = \mathrm{rot}\,\mathbf{\Xi} \quad \cdots\cdots\cdots (13)$$

と与えられた場合には、式(13)を式(4)の右辺に代入すると

$$\mathrm{rot}\,\nabla^2\mathbf{u} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Xi}/G \quad \cdots\cdots (14)$$

が得られる。ここで

$$\mathbf{u} = \mathrm{rot}\,\bar{\omega} \quad \cdots\cdots\cdots (15)$$

とおいて、式(14)に代入すると

$$\nabla^2\bar{\omega} = -\mathbf{\Xi}/G \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

が得られる。式(3)は

$$\mathrm{div}\,\mathbf{X} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{\Xi} = 0$$
$$\mathrm{div}\,\nabla^2\mathbf{u} = \nabla^2\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \nabla^2\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\bar{\omega} = 0$$

の関係より満たされている。したがって、物体力$\mathbf{X}$が式(13)のように与えられた場合の特殊解は、式(15)および式(16)で与えられることになる。

Helmholtzの定理より、物体力$\mathbf{X}$は、一般的に、

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{X} = \mathrm{grad}\,\alpha + \mathrm{rot}\,\mathbf{\Xi} \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{\Xi} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots (17)$$

と表わすことができるので、特殊解は

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\varphi + \mathrm{rot}\,\bar{\omega} \quad \cdots\cdots\cdots (18)$$

ここで

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\varphi = -\frac{1-2\nu}{2G(1-\nu)}\alpha \\ &\nabla^2\bar{\omega} = -\mathbf{\Xi}/G \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (18\cdot 1)$$

のように表わすことができる。

以上、物体力がある場合の特殊解を求めたので、以下では、物体力$\mathbf{X} = \mathbf{0}$としておく。

3. Papkovich－Neuberの解の導出について

物体力$\mathbf{X}$が$\mathbf{0}$の場合の弾性体のつり合い方程式は、式(1)あるいは式(2)において、$\mathbf{X} = \mathbf{0}$としたものであり、改めて書くと次のようである。

$$\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu}\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots (19)$$

Helmholtzの定理より

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{u} = \mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{rot}\,\mathbf{S} \\ &\mathrm{div}\,\mathbf{S} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (20)$$

とおくことができる。式(20)の第一式を式(19)に代入すると、次式が得られる。

$$\nabla^2\left\{\frac{2-2\nu}{1-2\nu}\mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{rot}\,\mathbf{S}\right\} = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots (21)$$

上式の右辺の{ }の中を

$$\frac{2-2\nu}{1-2\nu}\mathrm{grad}\,\Phi + \mathrm{rot}\,\mathbf{S} = \mathbf{B} \quad \cdots\cdots (22)$$

ただし

$$\nabla^2\mathbf{B} = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots\cdots (22\cdot 1)$$

とおいて、式(22)に div. を作用させると

$$\nabla^2\Phi = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\mathrm{div}\,\mathbf{B} \quad \cdots\cdots\cdots (23)$$

となる。上式を積分すると次式が得られる。

$$\Phi = \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}(\mathbf{r}\mathbf{B} + B_0) \quad \cdots\cdots (24)$$

ここで

$$\nabla^2 B_0 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (24\cdot 1)$$

また、 $\mathbf{r}$：位置ベクトル

式(23)から式(24)に至る過程では，$\mathbb{B}$が調和ベクトルのとき，$\nabla^2(\mathbf{r}\mathbb{B})=2\,\mathrm{div}\,\mathbb{B}$ となる関係を用いている。

したがって，式(20)，(22)および式(24)より

$$\mathbf{u}=\mathbb{B}-\frac{1}{4(1-\nu)}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{r}\mathbb{B}+B_0)\cdots\cdots(25)$$

が得られる。上式は，Papkovich の解(1932年)である。いま，上式において

$$\mathbb{B}=2(1-\nu)\boldsymbol{\Psi}/G,\quad B_0=2(1-\nu)\Psi_0/G\cdots\cdots(26)$$

ただし

$$\nabla^2\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{0},\quad \nabla^2\Psi_0=0\quad\cdots\cdots(26.1)$$

とおいて，書き替えると次式となる。

$$2G\mathbf{u}=-\mathrm{grad}\,(\mathbf{r}\boldsymbol{\Psi}+\Psi_0)+4(1-\nu)\boldsymbol{\Psi}\cdots\cdots(27)$$

上式はNeuber の解(1934年)である。したがって，Papkovich の解とNeuber の解とは，互いに全く等価な解である。

さて，式(22)に戻り，右辺を

$$\frac{2-2\nu}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\phi+\mathrm{rot}\,\mathbf{S}=\mathbb{B}+\frac{1}{G}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

ただし

$$\nabla^2\boldsymbol{\vartheta}=\mathbf{0}\cdots\cdots(28.1)$$

とおくと，

$$\mathbf{u}=\mathbb{B}-\frac{1}{4(1-\nu)}\,\mathrm{grad}\,(\mathbf{r}\mathbb{B}+B_0)+\frac{1}{G}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}\cdots\cdots\cdots(29)$$

が得られる。上式において，式(26)のような置き換えをすると，秦の一般化されたNeuberの解[2]

$$2G\mathbf{u}=-\mathrm{grad}\,(\mathbf{r}\boldsymbol{\Psi}+\Psi_0)+4(1-\nu)\boldsymbol{\Psi}++2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}\cdots\cdots\cdots(30)$$

ただし，

$$\nabla^2\Psi_0=0,\quad \nabla^2\boldsymbol{\Psi}=\mathbf{0},\quad \nabla^2\boldsymbol{\vartheta}=\mathbf{0}\cdots\cdots(30.1)$$

が得られる。上式において，$\Psi_0=-\varphi$，$\boldsymbol{\Psi}=-\boldsymbol{\lambda}$ と置き換えると，

$$2G\mathbf{u}=\mathrm{grad}\,(\mathbf{r}\boldsymbol{\lambda}+\varphi)-4(1-\nu)\boldsymbol{\lambda}++2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}\cdots\cdots\cdots(31)$$

と表わされる。上式は一般化されたBoussinesq の解であり，一般化されたNeuber の解と一般化されたBoussinesqの解は互に等価であるといいうる。

式(30)のΨ_0は変位のスカラーポテンシャル，$\boldsymbol{\Psi}$および$\boldsymbol{\vartheta}$は変位のベクトルポテンシャルと呼ばれるものである。式(30)の右辺の第三項 $2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\vartheta}$ を他の調和ベクトルに繰り込み，Neuber の解に形式的に変形することは，秦[2]が示している。

ここまで，Papkovich－Neuberの解の導出過程を示したが，大切なことは，座標系を特に限定していないことである(直交曲線座標系の制限はある)。したがって Papkovich-Neuber の解，秦の一般化されたNeuberの解あるいは一般化されたBoussinesq の解は，任意の直交曲線座標系に適用できる基本解である。

式(30)を直角座標系，円筒座標系および球座標系で表わしてみると次のようである。

(1) 直角座標系 (x, y, z)

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{u}=(u, v, w),\quad \mathbf{r}=(x, y, z)\\&\boldsymbol{\Psi}=(\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3),\quad \boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)\\&\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\cdots(32)$$

式(30.1)より，

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\Psi_0=0,\quad \nabla^2\Psi_1=\nabla^2\Psi_2=\nabla^2\Psi_3=0\\&\nabla^2\vartheta_1=\nabla^2\vartheta_2=\nabla^2\vartheta_3=0\end{aligned}\right\}\cdots(33)$$

となり，直角座標系では，調和ベクトル$\boldsymbol{\Psi}$および$\boldsymbol{\vartheta}$のそれぞれの成分はすべて調和関数となる。

変位成分を変位ポテンシャルで表わすと，

$$\left.\begin{aligned}2Gu&=-\frac{\partial F}{\partial x}+4(1-\nu)\Psi_1+2\left(\frac{\partial\vartheta_3}{\partial y}-\frac{\partial\vartheta_2}{\partial z}\right)\\2Gv&=-\frac{\partial F}{\partial y}+4(1-\nu)\Psi_2+2\left(\frac{\partial\vartheta_1}{\partial z}-\frac{\partial\vartheta_3}{\partial x}\right)\\2Gw&=-\frac{\partial F}{\partial z}+4(1-\nu)\Psi_3+2\left(\frac{\partial\vartheta_2}{\partial x}-\frac{\partial\vartheta_1}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

ここで

$$F=\Psi_0+x\Psi_1+y\Psi_2+z\Psi_3\quad\cdots\cdots(34.1)$$

となり，上式の変位ポテンシャルについては，Hataら[3]小林ら[4]および著者[5]が示している。

(2) 円筒座標系 (r, θ, z)

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{u}=(u_r, u_\theta, u_z),\quad \mathbf{r}=(r, \theta, z)\\&\boldsymbol{\Psi}=(\Psi_r, \Psi_\theta, \Psi_z),\quad \boldsymbol{\vartheta}=(\vartheta_r, \vartheta_\theta, \vartheta_z)\\&\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(35)$$

式(30.1)の第一式より，Ψ_0は調和関数となるが，第二式を成分で表わしてみると

$$\nabla^2\Phi_z = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (36\cdot1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\Phi_r - \frac{\Phi_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial\theta} = 0 \\ &\nabla^2\Phi_\theta - \frac{\Phi_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi_r}{\partial\theta} = 0 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots (36\cdot2)$$

となり，調和ベクトルΦの成分中，Φ_z は調和関数となるが，Φ_r および Φ_θ は式(36・2)に示されているように調和関数とはならないようである。

変位成分を変位ポテンシャルで表わすと

$$\left.\begin{aligned} &2Gu_r = -\frac{\partial F}{\partial r} + 4(1-\nu)\Phi_r + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial z}\right) \\ &2Gu_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} + 4(1-\nu)\Phi_\theta + 2\left(\frac{\partial\psi_r}{\partial z} - \frac{\partial\psi_z}{\partial r}\right) \\ &2Gu_z = -\frac{\partial F}{\partial z} + 4(1-\nu)\Phi_z + 2\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial(r\psi_\theta)}{\partial r} + \right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right\} \end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots (37)$$

ここで

$$F = \Phi_0 + r\Phi_r + z\Phi_z \quad \cdots\cdots (37\cdot1)$$

となる。上式の変位ポテンシャルについては，文献6)に発表している。

(3) 球座標系 (r, θ, φ)

$$\left.\begin{aligned} &u = (u_r, u_\theta, u_\varphi),\ r = (r, 0, 0) \\ &\Phi = (\Phi_r, \Phi_\theta, \Phi_\varphi),\ \psi = (\psi_r, \psi_\theta, \psi_\varphi) \\ &\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \\ &\quad + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \end{aligned}\right\} \cdots (38)$$

式(30・1)の第一式より，Φ_0は調和関数となるが第二式を成分で表わしてみると

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\Phi_r - \frac{2\Phi_r}{r^2} - \frac{2\cot\theta}{r^2}\Phi_\theta - \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial\varphi} = 0 \\ &\nabla^2\Phi_\theta - \frac{\Phi_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial\Phi_r}{\partial\theta} - \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Phi_\varphi}{\partial\varphi} = 0 \\ &\nabla^2\Phi_\varphi - \frac{\Phi_\varphi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Phi_r}{\partial\varphi} + \frac{2\cot\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\Phi_\theta}{\partial\varphi} = 0 \end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots (39)$$

となり，調和ベクトルΦの成分は，三つの成分とも調和関数とはならないようである。

変位成分を変位ポテンシャルで表わすと

$$\left.\begin{aligned} &2Gu_r = -\frac{\partial F}{\partial r} + 4(1-\nu)\Phi_r + 2\left(\frac{\cot\theta}{r}\psi_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_\varphi}{\partial\theta} + \right. \\ &\qquad \left. -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_\theta}{\partial\varphi}\right) \\ &2Gu_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\theta} - 4(1-\nu)\Phi_\theta + 2\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi_r}{\partial\varphi} + \right. \\ &\qquad \left. -\frac{\psi_\varphi}{r} - \frac{\partial\psi_\varphi}{\partial r}\right) \\ &2Gu_\varphi = -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial\varphi} + 4(1-\nu)\Phi_\varphi + \\ &\qquad + 2\left(\frac{\psi_\theta}{r} + \frac{\partial\psi_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right) \end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots\cdots (40)$$

ここで

$$F = \Phi_0 + r\Phi_r \quad \cdots\cdots (40\cdot1)$$

となる。式(39)を解いた数学的解は，文献7)に発表しているが，変位ポテンシャルの中に互に独立でない項が含まれているようであり，式(40)を用いて変位成分を求めた上で，独立性の検討を加えて用いる必要がある。

4. Galerkinの解の導出について

式(20)より，$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,A = 0$ であることに留意すると，

$$S = -\frac{2(1-\nu)}{2G}\mathrm{rot}\,\overline{w} \quad \cdots\cdots\cdots (41)$$

とおくことができる。上式に rot. を作用させると

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,S &= -\frac{2(1-\nu)}{2G}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\overline{w} \\ &= -\frac{2(1-\nu)}{2G}(\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{w} - \nabla^2\overline{w}) \quad \cdots (42) \end{aligned}$$

が得られる。上式を式(21)に代入すると

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla^2\mathrm{grad}\,\phi - \frac{2(1-\nu)}{2G}\nabla^2\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{w} + \frac{2(1-\nu)}{2G}\nabla^2\nabla^2\overline{w} = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots (43)$$

となる。上式において

$$\nabla^2\nabla^2\overline{w} = \mathbf{0} \quad \cdots\cdots\cdots (44)$$

とすると，すなわち，$\overline{w}$を重調和ベクトルとすると，式(43)は

$$\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}\nabla^2\mathrm{grad}\left\{\phi - \frac{1-2\nu}{G}\mathrm{div}\,\overline{w}\right\} = \mathbf{0}$$

となり，上式より

$$\phi = \{(1-2\nu)/2G\}\,\mathrm{div}\,\overline{w} + \phi_0 \quad \cdots\cdots (45)$$

ただし

$$\nabla^2\phi_0 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots (45\cdot1)$$

が得られる。式(45)の右辺の第二項ϕ_0は調和関数$\mathrm{div}\,\overline{w}$に繰り込むことができるので，一般的には，不必要な調和関数であり，$\phi_0 = 0$として，式(42)お

よび式（45）を式（20）の第一式に代入すると

$$2G\mathfrak{u} = -\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{w} + 2(1-\nu)\nabla^2\overline{w} \cdots\cdots (46)$$

が得られる。上式はGalerkinの解（1930年）であり$\overline{w}$がGalerkin Vectorと呼ばれるものである。

式（41）において，$\mathfrak{A}$が調和ベクトルのとき，

$$\mathrm{div}\,\{2\mathfrak{A} - \mathrm{grad}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{A})\} = 0$$

となることに着目して

$$\mathfrak{S} = -\frac{2(1-\nu)}{2G}\,\mathrm{rot}\,\overline{w} + \frac{1}{2G}\{2\mathfrak{A} + - \mathrm{grad}\,(\mathfrak{r}\mathfrak{A})\} \cdots\cdots (47)$$

とおけば，次の一般化されたGalerkinの解[2]

$$2G\mathfrak{u} = -\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{w} + 2(1-\nu)\nabla^2\overline{w} + 2\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} \cdots\cdots (48)$$

ただし，

$$\nabla^2\nabla^2\overline{w} = 0, \quad \nabla^2\mathfrak{A} = 0 \cdots (48.1)$$

が得られる。

ここまでのGalerkinの解の導出過程においても，座標系は特に限定していないことに留意する必要がある。

円筒座標系の軸対称問題に用いられるLoveの解[8]（1906年）あるいはMichellの解（1900年）は，式（46）のGalerkinの解より直接導出することができる。式（46）を円筒座標系（r, θ, z）に適用し，重調和ベクトル$\overline{w}(\overline{w}_r, \overline{w}_\theta, \overline{w}_z)$の成分の中で

$$\overline{w}_r = 0, \quad \overline{w}_\theta = 0, \quad \overline{w}_z = \Phi \cdots (49)$$

とおくと，$\nabla^2\nabla^2\overline{w} = 0$ より

$$\nabla^2\nabla^2\overline{w}_z = \nabla^2\nabla^2\Phi = 0 \cdots\cdots (50)$$

が得られる。すなわち，Φは重調和関数となる。変位成分を変位ポテンシャルで表わすと

$$2Gu_r = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}, \quad 2Gu_z = 2(1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \cdots\cdots (51)$$

ここで

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となる。ΦはLoveのひずみ関数あるいはMichellの関数と呼ばれるものである。

また，円筒座標系の非軸対称問題に用いられる牟岐の解[9]は式（48）の一般化されたGalerkinの解より導出することができる。式（48）を円筒座標系（r, θ, z）に適用して，重調和ベクトル$\overline{w}(\overline{w}_r, \overline{w}_\theta, \overline{w}_z)$および調和ベクトル$\mathfrak{A}(\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_\theta, \mathfrak{A}_z)$の中で，

$$\left.\begin{aligned}\overline{w}_r = \overline{w}_\theta = 0, \quad \overline{w}_z = 2G\Phi \\ \mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_\theta = 0, \quad \mathfrak{A}_z = 2G\psi\end{aligned}\right\} \cdots (52)$$

とすると，$\nabla^2\nabla^2\overline{w} = 0$ および $\nabla^2\mathfrak{A} = 0$ より

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = 0, \quad \nabla^2\psi = 0 \cdots\cdots (53)$$

が得られる。すなわち，Φは重調和関数，ψは調和関数となる。変位成分を変位ポテンシャルで表わすと

$$\left.\begin{aligned}u_r &= -\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z} + \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} \\ u_\theta &= -\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta\partial z} - 2\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ u_z &= 2(1-\nu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (54)$$

ここで

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

となる。式（54）を牟岐は拡張されたMichellの解と呼んでいる。

式（48）の一般化されたGalerkinの解の第3項 $2\times\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}$ を他の調和ベクトルに繰り込み，Galerkinの解に形式的に変形することができる。式（48）の$\overline{w}$を次のように置く。

$$\overline{w} = \frac{1}{2(1-\nu)}(\mathfrak{A}\times\mathfrak{r}) + \overline{w}' + \mathrm{grad}\,\Phi \cdots (55)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\mathfrak{A} = 0, \quad \nabla^2\nabla^2\overline{w}' = 0 \\ \nabla^2\Phi = \frac{1}{2(1-\nu)(1-2\nu)}\,\mathfrak{r}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A}\end{aligned}\right\} \cdots (55.1)$$

式（55）に∇^2を作用させると次式が得られる。

$$\nabla^2\overline{w} = -\frac{2}{2(1-\nu)}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} + \nabla^2\overline{w}' + \mathrm{grad}\,\nabla^2\Phi \cdots\cdots (56)$$

式（55）にdiv.を作用させると次式となる。

$$\mathrm{div}\,\overline{w} = \frac{1}{2(1-\nu)}\,\mathfrak{r}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{A} + \mathrm{div}\,\overline{w}' + \nabla^2\Phi \cdots\cdots (57)$$

式（56）および式（57）を式（48）に代入すれば

$$2G\mathfrak{u} = -\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{w}' + 2(1-\nu)\nabla^2\overline{w}' \cdots (58)$$

と変形できる。上式のプライム・サフィックスははずしても一般性をそこなわないので，式（58）はGalerkinの表現となる。

また，式（46）のGalerkinの解は，Neuberの

解に形式的に変形できる。式(46)において、次のようにおく。

$$\left.\begin{aligned} 2\mathrm{div}\,\overline{\varpi} - \boldsymbol{r}\nabla^2\overline{\varpi} &= 2\,\Phi_0{}' \\ \nabla^2\overline{\varpi} &= 2\,\boldsymbol{\Phi}' \end{aligned}\right\}\cdots(59)$$

ただし

$$\nabla^2\Phi_0{}'=0,\quad \nabla^2\boldsymbol{\Phi}'=\boldsymbol{0}\quad\cdots\cdots(59\cdot1)$$

式(59)より

$$2\mathrm{div}\,\overline{\varpi}=2\Phi_0{}'+\boldsymbol{r}\nabla^2\overline{\varpi}=2(\Phi_0{}'+\boldsymbol{r}\boldsymbol{\Phi}')$$

となるので，上式と式(59)の第二式を式(46)に代入すると

$$\begin{aligned} 2G\boldsymbol{u} &= -\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\overline{\varpi}+2(1-\nu)\nabla^2\overline{\varpi} \\ &= -\mathrm{grad}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\Phi}'+\Phi_0{}')+4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi}'\cdots(60) \end{aligned}$$

となり，Neuberの表現となる。

5．一般化されたNeuberの解より，$2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}$ およびベクトルポテンシャルの一つの成分を消去することについて

式(30)の$\boldsymbol{\Phi}(\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3)$のたとえば$\Phi_3$と$2\times\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi}$を消去して

$$2G\boldsymbol{u}=-\mathrm{grad}(\boldsymbol{r}\boldsymbol{\Phi}'+\Phi_0{}')+4(1-\nu)\boldsymbol{\Phi}'\cdots(61)$$

ここで，　$\boldsymbol{\Phi}'=(\Phi_1{}',\ \Phi_2{}',\ 0)$

に変形するということである。式(30)において

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi} &= \boldsymbol{\Phi}'+\mathrm{grad}\,H-\{1/2(1-\nu)\}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi} \\ \Phi_0 &= \Phi_0{}'-\boldsymbol{r}\,\mathrm{grad}\,H+4(1-\nu)H+ \\ &\quad+\{1/2(1-\nu)\}\,\boldsymbol{r}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\psi} \end{aligned}\right\}\cdots(62)$$

ただし

$$\left.\begin{aligned} &\nabla^2\Phi_0{}'=0,\ \nabla^2\boldsymbol{\Phi}'=\boldsymbol{0},\ \nabla^2\boldsymbol{\psi}=\boldsymbol{0},\ \nabla^2H=0 \\ &\mathrm{grad}_3H-\{1/2(1-\nu)\}\,\mathrm{rot}_3\boldsymbol{\psi}=\Phi_3 \end{aligned}\right\}\cdot(62\cdot1)$$

とおけば，式(61)が得られる。

6．結　語

Neuberの解，一般化されたBoussinesqの解，一般化されたNeuberの解あるいはGalerkinの解などが座標系を特に限定して導出されたものではないことを示し，それゆえ，これらの基本解が任意の直交曲線座標系においても適用できる解であることを示した。

従来，これらの基本解は直角座標系で表現されていることが多く，そのため，他の座標系に用いる場合には，解をその座標系に変換して用いることが多かったが，本論文で示したように，変位ポテンシャルそのものを直交曲線座標系における成分として取り扱えば，そのような変換の手段を取らなくとも良い事となる。

また，従来，変位ポテンシャルが調和関数あるいは重調和関数になるといわれているが，そのことは，直角座標系においてのみ真であり，一般的な直交曲線座標系においては，ベクトルポテンシャルが，たとえ，調和ベクトルであっても，その成分はかならずしも調和関数とはならないことを例題を上げて示した。

参考文献

1) Flügge, S.：Encyclopedia of Physics, Vol.VIa/2, Mechanics of Solids II, p.140, Springer-Verlag, 1972

2) 秦 謹一：三次元応力問題の解法について，北海道大学工学部研究報告，第13号，pp.13-44，昭30-12

3) Hata, K. and C. Minamisawa：Some problems of three-dimensional Stresses in a short cylinder of rectangular cross-section under uniform loadings over circular areas, Proc. 8th Japan Nat. Congr. Appl. Mech., pp.155-158, 1958

4) 小林道明・石川博将・秦 謹一：短直方柱の応力解析，機械学会論文集，第41巻348号，pp.2265-2277，昭50-8

5) Okumura, I.：On the three-dimensional stress analysis for a rectangular block under a partially distributed tangential load, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.25, pp.521-538, 1977

6) Okumura, I.：On the three-dimensional stress analysis for a short cylinder under a semi-circulary distributed uniform load, Theoretical and Applied Mechanics, Vol.24, pp.249-262, 1976

7) 奥村 勇：非軸対称荷重を受ける球および球殻の3次元応力問題について，第27回応用力学連合講演会講演論文抄録集，pp.299-300，昭52-11

8) Love, A. E. H.：A Treatise On The Mathematical Theory of Elasticity, p.276, Dover Pub., 4th edi., 1944

9) 牟岐鹿楼：表面の一部が剛体で圧縮された半無限弾性体の三次元応力問題，機械学会論文集，第21巻111号(第1部)，pp.767-773，1955