土木学会北海道支部　論文報告集　昭和52年度

表面に剪断力を受ける粘弾性板の三次元解析

○ 北見工業大学　正員　大島俊之
北大工学部　正員　能町純雄

1．まえがき

粘弾性体の解析は古くから多くの研究がなされているが、大別すると時間に関しては積分変換する方法[1),2)]（Laplace変換，Fourier変換など）と時間微分を差分化する方法[3),4)]がある。また応力歪履歴については弾性解析との対応原理から，Faltung定理により履歴の影響を考慮する方法と有限要素法の応用にみられる様に，荷重増分法により逐次追跡する方法[3),4)]とに大別される。

Laplace変換を用いる場合は時間に対して境界条件が変化しないものに限られる他，一般化されたレオロジーモデルを用いる場合には、Laplace逆変換が複雑な形となり、一般形として解けないためいろいろな数値逆変換が考案されている。[8),9),10)]　また応力とひずみの関係を表わす緩和弾性率を長い時間領域内での応答として正確に表わすためには，かなりの数の粘弾性要素を必要とする。[11),12)]　R.A.Schapery[8)]が提案した粘弾性変形の指数関数的減衰の性質を利用したPronyの級数展開による指数関数表示は，多数の粘弾性モデルの合成を一般化したものであるという物理的意味を有するほか，係数を応力歪関係の実験結果に合うように必要な個数だけとれることや，Laplace変換しやすい形であることも利点の一つになっている。

一方数値Laplace逆変換については，Widderが提案した一般反転公式およびその応用としてAlfrey，ter Haar，Schaperyの簡単な近似式が提案されている[9)]ほか，最小自乗原理に基づく近似逆変換法やLegendreの多項式を用いて解を直交多項式によって表現する方法[14)]，ダイナミックプログラミングの手法を応用する方法[10)]なども研究されている。

本論文では離散型の有限Fourier変換である有限Fourier定和分変換を三次元構造体としての積層粘弾性平板の解析に適用することを目的とするため，有限プリズム解析法により構造を定式化する。また時間に関してはLaplace変換を用い，その逆変換には最小自乗原理に基づくSchaperyの数値逆変換を用いる。対応原理による弾性解析ではプリズムの長軸方向には有限フーリエ変換，二つの短軸方向には有限フーリエ定和分変換を用いる。

2．粘弾性プリズム要素の関係式

応力と歪の履歴積分による表示は一般に緩和弾性率を用いて，体積歪と偏差歪について次のように表わされる。

$$\sigma_{rr}(t)=3\int_0^t K(t-\tau)\frac{d\varepsilon_{rr}(\tau)}{d\tau}d\tau \quad \cdots(1)\quad , \quad \sigma'_{ij}(t)=2\int_0^t G(t-\tau)\frac{d\varepsilon'_{ij}(\tau)}{d\tau}d\tau \quad \cdots(2)$$

Laplace変換 $\mathbb{L}_s[f(t)]=\int_0^t f(t)e^{-st}dt$ を記号 $f^*_s(t)$ を用いて表示することにすると，上式はFaltung定理により

$$\sigma^*_{rr}(s)=3sK^*(s)\cdot\varepsilon^*_{rr}(s) \quad \cdots(3)\quad , \quad \sigma'^*_{ij}(s)=2sG^*(s)\cdot\varepsilon'^*_{ij}(s) \quad \cdots(4)$$

のように表示される。ここでK(t)，G(t)は緩和弾性率のそれぞれ体積歪成分，偏差歪成分，i，jは座標x，y，zに対応する指標1，2，3をとるものとする。

またこれらの変換された応力と歪の関係を通常の表示になおしてまとめると次のようになる。

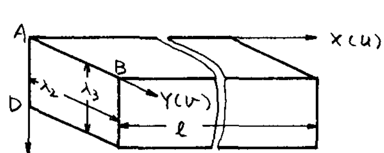

図1　プリズム要素

$$
\begin{bmatrix} \sigma_x^* \\ \sigma_y^* \\ \sigma_z^* \\ \tau_{yz}^* \\ \tau_{zx}^* \\ \tau_{xy}^* \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
K^*+\frac{4}{3}G^* & K^*-\frac{2}{3}G^* & K^*-\frac{2}{3}G^* & 0 & 0 & 0 \\
 & K^*+\frac{4}{3}G^* & K^*-\frac{2}{3}G^* & 0 & 0 & 0 \\
 & & K^*+\frac{4}{3}G^* & 0 & 0 & 0 \\
 & & & G^* & 0 & 0 \\
 & \mathrm{SYM.} & & & G^* & 0 \\
 & & & & & G^*
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \varepsilon_z^* \\ \gamma_{yz}^* \\ \gamma_{zx}^* \\ \gamma_{xy}^* \end{bmatrix}
\quad \cdots\cdots (5)
$$

一方、応力のつりあい式、および歪と変位の関係式は一般の三次元弾性論と同じ式[15]を用いて表示し、代入するとともに、図1のようなプリズム要素について考える。プリズム内の各変位をプリズムの節点間で直線変化すると仮定した式で表現し，Galerkin 法により積分して，粘弾性プリズム要素に関する次のような関係式を得ることができる。

$$
\begin{bmatrix} \bar{T}_A^* \\ \bar{T}_B^* \\ \bar{T}_C^* \\ \bar{T}_D^* \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
4c_1-2c_2-2c_3 & 2c_1+2c_2-c_3 & c_1+c_2+c_3 & 2c_1-c_2-2c_3 \\
2c_1-2c_2-c_3 & 4c_1-2c_2-2c_3 & 2c_1-c_2+2c_3 & c_1+c_2+c_3 \\
c_1+c_2+c_3 & 2c_1-c_2+2c_3 & 4c_1-2c_2-2c_3 & 2c_1+2c_2+c_3 \\
2c_1-c_2+2c_3 & c_1+c_2+c_3 & 2c_1+2c_2-c_3 & 4c_1-2c_2-2c_3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{u}_A^* \\ \dot{u}_B^* \\ \dot{u}_C^* \\ \dot{u}_D^* \end{bmatrix}
$$

$$
+\frac{\lambda_3}{12}
\begin{bmatrix}
-2(\lambda^*-\mu^*) & 2(\mu^*+\lambda^*) & \lambda^*+\mu^* & -(\lambda^*-\mu^*) \\
-2(\lambda^*+\mu^*) & 2(\lambda^*-\mu^*) & \lambda^*-\mu^* & -(\lambda^*+\mu^*) \\
-(\lambda^*+\mu^*) & \lambda^*-\mu^* & 2(\lambda^*-\mu^*) & -2(\lambda^*+\mu^*) \\
-(\lambda^*-\mu^*) & \lambda^*+\mu^* & 2(\lambda^*+\mu^*) & -2(\lambda^*-\mu^*)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_A^* \\ v_B^* \\ v_C^* \\ v_D^* \end{bmatrix}
+\frac{\lambda_2}{12}
\begin{bmatrix}
-2(\lambda^*-\mu^*) & -(\lambda^*-\mu^*) & \lambda^*+\mu^* & 2(\lambda^*+\mu^*) \\
-(\lambda^*-\mu^*) & -2(\lambda^*-\mu^*) & 2(\lambda^*+\mu^*) & \lambda^*+\mu^* \\
-(\lambda^*+\mu^*) & -2(\lambda^*+\mu^*) & 2(\lambda^*-\mu^*) & \lambda^*-\mu^* \\
-2(\lambda^*+\mu^*) & -(\lambda^*+\mu^*) & \lambda^*-\mu^* & 2(\lambda^*-\mu^*)
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_A^* \\ w_B^* \\ w_C^* \\ w_D^* \end{bmatrix}
\quad \cdots\cdots (6)
$$

$$
\begin{bmatrix} Y_A^* \\ Y_B^* \\ Y_C^* \\ Y_D^* \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
4d_1+2d_2-2d_3 & 2d_1+2d_2-d_3 & d_1+d_2+d_3 & 2d_1-d_2+2d_3 \\
2d_1+2d_2-d_3 & 4d_1-2d_2-2d_3 & 2d_1-d_2+2d_3 & d_1+d_2+d_3 \\
d_1+d_2+d_3 & 2d_1-d_2+2d_3 & 4d_1-2d_2-2d_3 & 2d_1+d_2+d_3 \\
2d_1-d_2+2d_3 & d_1+d_2+d_3 & 2d_1+2d_2-d_3 & 4d_1-2d_2-2d_3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_A^* \\ v_B^* \\ v_C^* \\ v_D^* \end{bmatrix}
$$

$$
+\frac{\lambda_3}{12}
\begin{bmatrix}
-2d_4 & 2d_4 & d_4 & d_5 \\
2d_5 & -2d_5 & -d_5 & -d_4 \\
-d_4 & -d_5 & -2d_5 & -2d_4 \\
d_5 & d_4 & 2d_4 & 2d_5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{u}_A^* \\ \dot{u}_B^* \\ \dot{u}_C^* \\ \dot{u}_D^* \end{bmatrix}
+\frac{1}{4}
\begin{bmatrix}
-d_4 & -d_5 & d_4 & d_5 \\
d_5 & d_4 & -d_5 & -d_4 \\
d_4 & d_5 & -d_4 & -d_5 \\
-d_5 & -d_4 & d_5 & d_4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_A^* \\ w_B^* \\ w_C^* \\ w_D^* \end{bmatrix}
\quad \cdots\cdots (7)
$$

ただし
$d_4 = \lambda^*+\mu^*$,
$d_5 = \lambda^*-\mu^*$

$$
\begin{bmatrix} Z_A^* \\ Z_B^* \\ Z_C^* \\ Z_D^* \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
4e_1+2e_2-2e_3 & 2e_1+2e_2-e_3 & e_1+e_2+e_3 & 2e_1-e_2+2e_3 \\
2e_1+2e_2-e_3 & 4e_1-2e_2-2e_3 & 2e_1-e_2+2e_3 & e_1+e_2+e_3 \\
e_1+e_2+e_3 & 2e_1-e_2+2e_3 & 4e_1-2e_2-2e_3 & 2e_1+e_2+e_3 \\
2e_1-e_2+2e_3 & e_1+e_2+e_3 & 2e_1+2e_2-e_3 & 4e_1-2e_2-2e_3
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} w_A^* \\ w_B^* \\ w_C^* \\ w_D^* \end{bmatrix}
$$

$$
+\frac{\lambda_2}{12}
\begin{bmatrix}
-2d_4 & 2d_4 & d_4 & d_5 \\
2d_5 & -2d_5 & -d_5 & -d_4 \\
-d_4 & -d_5 & -2d_5 & -2d_4 \\
d_5 & d_4 & 2d_4 & 2d_5
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \dot{u}_A^* \\ \dot{u}_B^* \\ \dot{u}_C^* \\ \dot{u}_D^* \end{bmatrix}
+\frac{1}{4}
\begin{bmatrix}
-d_4 & -d_5 & d_4 & d_5 \\
d_5 & d_4 & -d_5 & -d_4 \\
d_4 & d_5 & -d_4 & -d_5 \\
-d_5 & -d_4 & d_5 & d_4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_A^* \\ v_B^* \\ v_C^* \\ v_D^* \end{bmatrix}
\quad \cdots\cdots (8)
$$

ただし $c_1 = \frac{(2\mu^*+\lambda^*)\lambda_2\lambda_3}{36}$, $c_2 = \frac{\mu^*\lambda_3}{6\lambda_2 D_x^2}$, $c_3 = \frac{\mu^*\lambda_2}{6\lambda_3 D_x^2}$, $d_1 = \frac{\mu^*\lambda_2\lambda_3 D_x^2}{36}$, $d_2 = \frac{(2\mu^*+\lambda^*)\lambda_3}{6\lambda_2}$,
$d_3 = \frac{\mu^*\lambda_2}{6\lambda_3}$, $e_1 = \frac{\mu^*\lambda_2\lambda_3 D_x^2}{36}$, $e_2 = \frac{(2\mu^*+\lambda^*)\lambda_2}{6\lambda_3}$, $e_3 = \frac{\mu^*\lambda_3}{6\lambda_2}$, $D_x = \frac{d}{dx}$, $\dot{f} = \frac{df}{dx}$, $\bar{f} = \int f\,dx$,
$\mu^* = G^*$, $\lambda^* = K^* - \frac{2}{3}G^*$,

3. 解析理論

図2のような一般の座標について、$\Sigma T_{yz}=0$, $\Sigma Y_{yz}=0$, $\Sigma Z_{yz}=0$ の三方向の積線のつりあいをとれば次式のようになる。この場合、物体力、慣性項は無視する。

$$[L]\{u^*\} = \{0\} \quad \cdots (9) \qquad \text{ただし } \{u^*\}^T = \{u^*_{yz}, v^*_{yz}, w^*_{yz}\}$$

$[L]$は3×3元の対称マトリックスでその内容は次のようである。

$$L_{11} = \frac{(2\mu^*+\lambda^*)\lambda_2\lambda_3 D_x^2}{36}(\Delta^2 y+6)(\Delta^2 z+6) + \frac{\mu^*\lambda_3}{6\lambda_2}\Delta^2 y(\Delta^2 z+6)$$
$$+ \frac{\mu^*\lambda_2}{6\lambda_3}\Delta^2 z(\Delta^2 y+6), \quad L_{12} = \frac{(\mu^*+\lambda^*)}{12}\lambda_3 \triangle y(\Delta^2 z+6) D_x,$$
$$L_{13} = \frac{(\mu^*+\lambda^*)\lambda_2}{12}\triangle z(\Delta^2 y+6) D_x,$$
$$L_{22} = \frac{\mu^*\lambda_2\lambda_3 D_x^2}{36}(\Delta^2 y+6)(\Delta^2 z+6) + \frac{(2\mu^*+\lambda^*)\lambda_3}{6\lambda_2}\Delta^2 y(\Delta^2 z+6)$$
$$+ \frac{\mu^*\lambda_2}{6\lambda_3}\Delta^2 z(\Delta^2 y+6), \quad L_{21} = \frac{(\mu^*+\lambda^*)\lambda_3}{12} D_x \triangle y(\Delta^2 z+6),$$
$$L_{23} = \frac{\mu^*+\lambda^*}{4}\triangle y \triangle z, \quad L_{33} = \frac{\mu^*\lambda_2\lambda_3 D_x^2}{36}(\Delta^2 y+6)(\Delta^2 z+6)$$
$$+ \frac{(2\mu^*+\lambda^*)\lambda_2}{6\lambda_3}\Delta^2 z(\Delta^2 y+6) + \frac{\mu\lambda_3}{6\lambda_2}\Delta^2 y(\Delta^2 z+6)$$

ただし $\Delta^2 f(x) = f(x+1) - 2f(x) + f(x-1)$, $\triangle f(x) = f(x+1) - f(x-1)$。

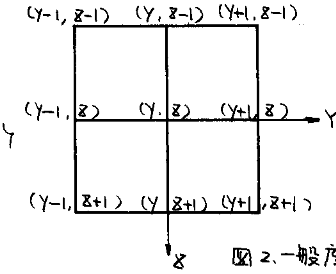

図2. 一般座標

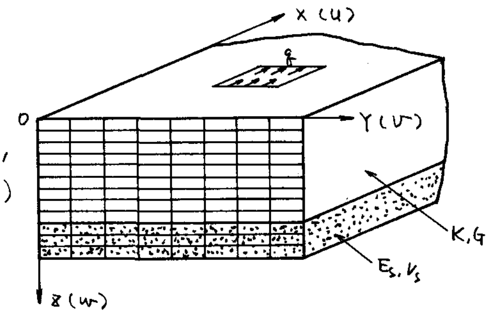

図3. 積層平板構造

一方、境界条件として、図3のような2層板構造を考えると境界条件式として、次式が得られる。

表面 $(z=0)$ において: $T_{(y\cdot y+1)_0} + T_{(y\cdot y-1)_0} = -Q_{(y_0)}$ (10), $Y_{(y\cdot y+1)_0} + Y_{(y\cdot y-1)_0} = 0$ (11)

$Z_{(y\cdot y+1)_0} + Z_{(y\cdot y-1)_0} = -P_{(y_0)}$ (12), ただしQは剪断力、Pは垂直荷重。

境界面 $(z=r)$ において: $T_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ r,r-1}\right)} + T_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ r,r-1}\right)} + T_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ r,s}\right)} + T_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ r,s}\right)} = 0$ (13)

$Y_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ r,r-1}\right)} + Y_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ r,r-1}\right)} + Y_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ r,s}\right)} + Y_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ r,s}\right)} = 0$ (14), $Z_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ r,r-1}\right)} + Z_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ r,r-1}\right)} + Z_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ r,s}\right)} + Z_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ r,s}\right)} = 0$ (15)

境界面(下面, $z=s+2$ において):

$T_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ s+2,s+1}\right)} + T_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ s+2,s+1}\right)} = 0$ (16), $Y_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ s+2,s+1}\right)} + Y_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ s+2,s+1}\right)} = 0$ (17), $Z_{\left(\substack{y\cdot y+1\\ s+2,s+1}\right)} + Z_{\left(\substack{y\cdot y-1\\ s+2,s+1}\right)} = 0$ (18)

また下層の $z=s$, $z=s+1$ 面については(9)式の緩和弾性率、要素の厚さを下層の値に置き換えることによって得られる。また分割の巾はすべて等間隔とする。

4. 解法

以上の式によって表現された(9)及び(10)~(18)式について空間座標のx軸方向には有限フーリエ変換、yおよびz軸方向には有限フーリエ定積分変換、およびその逆変換を用いて解析する。[6),7)]

時間軸については解関数を $f(t) = A + Bt + \sum_{i=1}^{N} C_i e^{-t/D_i}$ の形に予想し、D_iを仮定して、この式をLaplace変換し、未定係数A, B, C_i $(i=1\sim N)$の個数$(N+2)$に相当する数だけの選点したパラメータsについて、仮定式と基本解式の等号をつくり、これを連立に解いて、解関数の未知係数を決定する。sの選点のしかたはD_iの仮定とともに精度に大きな影響を及ぼす。

5. 数値計算例

以上の解法にしたがって図4の構造について、次の諸数値で数値計算した結果を図5に示している。理論式では下層板を多分割する式を示したが、ここでは分割しない構造で計算した。

$\lambda_2 = 20^{cm}$, $\lambda_3 = 5^{cm}$, $l = 200^{cm}$, $c = 10^{cm}$, $q = 8\ kg/cm^2$, $n = r = 8$ 分割,

$E_s = 2.1\times 10^6\ kg/cm^2$, $H_K = 1.094\times 10^5\ kg/cm^2$, $H_G = 0.89\times 10^5\ kg/cm^2$, $\nu_s = 0.3$, $K_0 = H_K$,

$K_1 = 0.5H_K$, $K_2 = 0.4H_K$, $K_3 = 0.3$, $G_0 = H_G$, $G_1 = 0.5H_G$, $G_2 = 0.4H_G$, $G_3 = 0.3H_G$

$K(t)=K_0+\sum_{\alpha=1}^{3}K_\alpha e^{-t/T_{K\alpha}}$

$G(t)=G_0+\sum_{\alpha=1}^{3}G_\alpha e^{-t/T_{G\alpha}}$

$T_{K_1}=3$日, $T_{K_2}=4$日, $T_{K_3}=5$日, $T_{G_1}=3$日, $T_{G_2}=4$日, $T_{G_3}=5$日,

S_i=0.006, 0.002, 0.01, 0.04, 0.08, 0.20, 0.6, 1.0, 4.0, 8.0 の10個,

D_i=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 の8個。

級数20項。周辺単純支持。

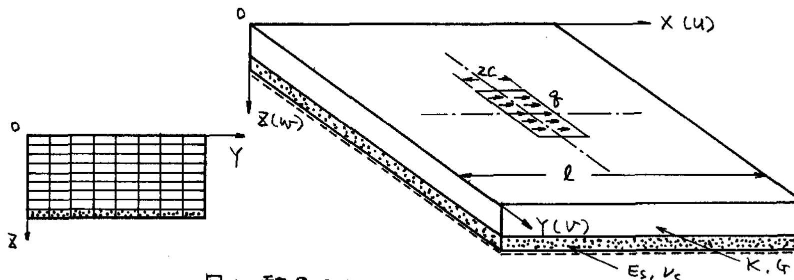

図4. 積層平板

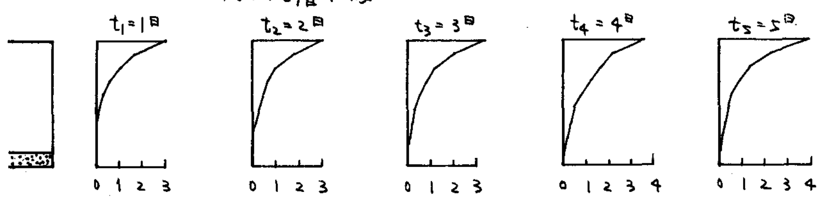

図5. 平板中央点のz方向変位の時間経過 (桁数10^{-3}, 単位, cm)

6. あとがき

本論で取扱ったような層状の平板構造は，厚さの方向に非対称変形をし，一般の薄板理論とは，中立軸の位置に大きなちがいがあらわれ，三次元解析の意義がある。また粘弾性層と弾性層の互層をなす平板構造は強制振動をする場合，粘弾性層の減衰効果が大きく，最近この方面の研究も文献に見られる。[13] しかし数値計算の経済性の面から考えると，本論文の数値計算でも66Kw（九大センター FACOM 230-60/75, M-VII）の記憶容量を必要とし，分割を細かくし，もっと精度をあげるには，かなりの記憶容量を必要とし，プログラムにもかなりの制約を受けるので，実用的にはもっと工夫する必要があると思われる。

参考文献

1) 平坂鹿樵：線形粘弾性理論の最近の進歩，日本機械学会誌，第64巻，第513号，1961.

2) 国尾武，M. L. Williams：粘弾性体の力学的挙動，同上，第68巻，第552号，1965.

3) 赤木知之，大野大明，色部誠：有限要素法によるPC格納容器の粘弾性解析，土木学会論文報告集，第214号，1973.

4) 塩井健一郎，川原睦人：有限要素法による粘弾性体の解析法，同上，第179号，1970.

5) E. H. Lee: Stress Analysis in Visco-elastic Bodies, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 13, 1955.

6) R. Muki, E. Sternberg: On Transient Thermal Stress in Viscoelastic Materials with Temperature-Dependent Properties, Journal of Applied Mechanics, ASME, 1961.

7) E. H. Lee, T. G. Rogers: Solution of Viscoelastic Stress Analysis Problems Using Measured Creep or Relaxation Functions, 同上, 同上, 1963.

8) R. A. Schapery: Approximate Methods of Transform Inversion for V-E Stress Analysis, Proceedings of the Forth U.S. National Congress of Applied Mechanics, 1961.

9) T. L. Cost: Approximate Laplace Transform Inversions in Viscoelastic Stress Analysis, AIAA. Journal, Vol. 2, No. 12, 1964.

10) 田中豊喜：有限要素法による線形粘弾性体の応力解析，日本鋼構造協会第3回大会研究集会，マトリックス構造解析講演論文集，1969.
11) 山田嘉昭：マトリックス法材料力学，塑性・粘弾性，日本鋼構造協会編，培風館.
12) W. フリューゲ：粘弾性学，固体力学シリーズ，培風館，1973.
13) Y. V. K. Sadasiva Rao, B. C. Nacra: Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores, Journal of Sound and Vibration, 1974. 34. 3.
14) A. Papoulis: A New Method of Inversion of the Laplace Transform, Quarterly of Applied Mathematics, 14, 1957.
15) Timoshenko; Goodier: Theory of Elasticity, McGraw-Hill, 1970
16) 能町純雄, 大島俊之：弾性層と粘弾性層よりなる2層板構造の有限フーリエ変換法による粘弾性解析. 第27回応用力学連合講演会講演論文抄録集，1977.
17) 大島俊之, 能町純雄：舗装を考慮した鋼板の有限フーリエ変換法による三次元粘弾性解析，土木学会第32回年次学術講演会講演概要集，1977. I部.