土木学会北海道支部　論文報告集　昭和52年度

移動荷重を受ける粘弾性床上の梁の解析

室工大　正員　中村作太郎
室工大　正員　松岡健一
室工大　学生員　○小林茂

1 まえがき

弾性床上のはりの解析は、今日ではすでに解決ずみと思われる。また線形粘弾性床上の有限長弾性はりの問題は、先に園田氏等により静荷重に対して解かれているが　線形粘弾性床上の移動荷重を受ける無限長弾性はりの問題はまだ取り扱われていないように思われる。

本論文は　線形粘弾性床上の移動分布荷重を受ける無限長弾性はりの定常的応答すなわちはりのたわみ、曲げモーメント、せん断力および基礎反力の各解式を誘導したものである。基礎には線形粘弾性の応力歪関係を、はりには弾性はりの4階微分方程式を用い、その各々を静止座標から移動座標へ変換した後、一次元フーリエ変換およびその逆変換を行い求めたものである。

2 線形粘弾性床上の弾性はりの微分方程式

(a)静止座標から移動座標への変換（Fig 1）

Fig 1 より静止座標を x、移動座標を X、移動座標の移動速度を V とする。移動荷重 q の中心に移動座標 X の原点をとる。しからば　$x = X + Vt$ の関係があるから

時間微分に対して　　座標微分に対して

$$\frac{\partial}{\partial t} = -V\frac{\partial}{\partial X}, \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial X} \tag{1}$$

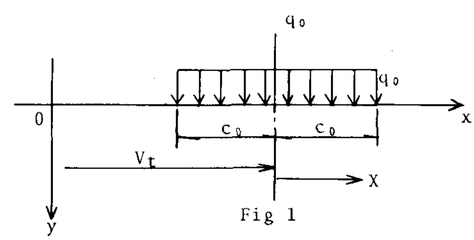

Fig 1

の変換式が成立する。

(b)移動荷重の移動座標による表現

単位長当り移動荷重を q、単位長当り等分布荷重を q_0 およびその分布幅を X 座標の原点を中心に正負方向に各 c_0 だけ分布するものとする。x 方向の単位ステップ函数を $\square(x)$ とすると、$q = q_0[\square(Vt - c_0) - \square(Vt - c_0)]$ 故に、これを移動座標で表わすと

$$q = q_0[\square(-c_0) - \square(c_0)] \tag{2}$$

(c)はりの微分方程式　　はりの曲げ剛性を EI（はりの全長にわたり一定と仮定する），はりの単位長当りの密度を ρ および断面積を A とするとはりの微分方程式は静止座標では $EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = q - p - \rho A\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ で表わされるが、式(1)を用いて移動座標に変換すると

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial X^4} = q_0[\square(-c_0) - \square(c_0)] - p - \rho AV^2\frac{\partial^2 y}{\partial X^2} \tag{3}$$

ただし、q には式(2)を用いた。

(d)境界条件、初期条件、　　この場合初期条件は必要ないが、境界条件は存在する。従って弾性はりの境界条件は次の通りである。

$$y)_{X=\pm\infty} = \frac{\partial y}{\partial X}\Big)_{X=\pm\infty} = \frac{\partial^2 y}{\partial X^2}\Big)_{X=\pm\infty} = \frac{\partial^3 y}{\partial X^3}\Big)_{X=\pm\infty} = 0 \tag{4}$$

3 基礎の粘弾性力学モデル

線形粘弾モデルは、ばね、ダッシュポットを基本要素として表現されるが、本論文で用いた基礎の線形粘弾性モデルは、Fig 2 に示す通り3要素モデルである。Fig 2 に示すマックスウェル要素、ばね要素に分配される合力を p_1, p_2 とする。記号について、k_1, k_2 (Kg/cm²) をばね定数、系のばね定数を k とし $k = k_1 + k_2$，系の力（基礎の反力）$p = p_1 + p_2$，粘性定数を η (Kg·sec/cm²)，遅延または緩和時間を $\tau_1 = \eta/k_1$，系の変形を y で表わす。

(a)ばね要素　　これは Fig 2 の右側部分で表わされ、系の変形 y と力 p_2 は　$p_2 = k_2 y$ 　(5)

の関係で結ばれている。　　(b)マックスウェル要素　　これは Fig 2 の左側部分で表わされ、系の変形 y と力 p_1 は次の関係で結ばれる。

$$k_1\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{\partial p_1}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1}p_1 \tag{6}$$

言い換えると、Fig 2でマックスウェル要素を表現するためには$k_2 \to 0$ならしめると所要のモデルに帰着するという事を意味している。すなわちばねとダッシュポットが直列接続である。

(c)フォクト要素　Fig 3に示す通りこの要素はばねとダッシュポットが並列接続である。Fig 2をFig 3に帰着させるには$k_1 \to \infty$とすればよいのであるがこの場合系の力pと系の変形yは次の関係で結ばれる。$p = \eta \frac{\partial y}{\partial t} + k_2 y$　(7)

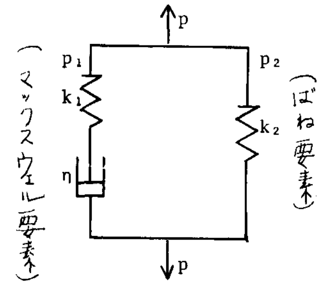

Fig 2

(d)3要素モデル　$k = k_1 + k_2$，$p = p_1 + p_2$の関係と、(5)，(6)式からp_1，p_2を消去すると、系の力pと系の変形yは次の関係で結ばれる。$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\tau_1} p = k \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{k_2}{\tau_1} y$、この式において、$k_1 \to \infty$にすると(7)式になり、$k_2 \to 0$とし$p \to p_1$とすると式(6)になる。この式を(1)式の関係を用いて移動座標へ変換すると次式になる。$\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\tau_1 V} p = k \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{k_2}{\tau_1 V} y$ (8)

(e)境界条件、初期条件、初期条件は必要ないので境界条件のみを考える。従って粘弾性基礎の境界条件は次の通りである。　$p)_{x=\pm\infty} = 0$　(9)

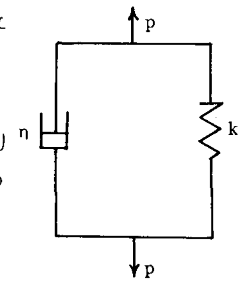

Fig 3

4 基礎方程式の一次元フーリエ変換および逆変換による解、

(a)一次元フーリエ変換および逆変換　函数$f(x)$および$g(x)$が$x \in [-\infty, \infty]$でディリクレーの条件を満足するとすると、次の一次元フーリエ変換$\tilde{f}(x)$および逆変換$\tilde{g}^{-1}(x) = g(x)$が成立する。$\tilde{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\xi x} dx$ (10)，$\tilde{g}^{-1}(x) = g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x) e^{j\xi x} d\xi$ (11)

茲に、$j = \sqrt{-1}$で虚数を表わし、ξはフーリエ変換および逆変換のパラメータを表わす。

(b)一次元フーリエ変換および逆変換による基礎方程式の解の誘導　基礎方程式(3)と(8)式を、pとyを未知数として連立して解く。ここで$K^4 = EI/k$，$K_2^4 = EI/k_2$とおき長さの次元をもつパラメータとする。

a)はりのたわみ　(3)と(8)式を(4)と(9)式を考慮しつつ(10)式を用いてそれぞれフーリエ変換すると未知数p，yのフーリエ変換$\tilde{p}$，$\tilde{y}$の連立方程式が次の様に得らる。$EI\xi^4 \tilde{y} = 2g_0 \sin\xi c_0/\xi - \tilde{p} + \rho A V^2 \xi^2 \tilde{y}$，$(j\xi - 1/V\tau_1)\tilde{p} = (jk\xi - k_2/V\tau_1)\tilde{y}$、この連立方程式から$\tilde{p}$を消去して$\tilde{y}$を求めると次式が得られる。

$$\tilde{y} = \frac{2g_0}{EI} \sin\xi c_0 \frac{(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)/\xi + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4) - jV\tau_1(1/K_2^4 - 1/K^4)}{(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)^2 + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4)^2}$$

この式を(11)式によりフーリエ逆変換する。虚数部は全て奇函数となるので有理化するとたわみが求まる。

$$y = \frac{g_0}{EI}\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{[(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)/\xi + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4)]\cos\xi x + V\tau_1(1/K_2^4 - 1/K^4)\sin\xi x}{(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)^2 + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4)^2} \sin\xi c_0 \, d\xi \quad (12)$$

b)はりの曲げモーメント　はりの曲げモーメントは、はり理論から$M = -EIy''$故、(12)式を2度微分した後、この式に代入すると曲げモーメントは次の様に求まる。

$$M = g_0 \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{[(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)/\xi + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4)]\cos\xi x + V\tau_1(1/K_2^4 - 1/K^4)\sin\xi x}{(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)^2 + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4)^2} \xi^2 \sin\xi c_0 \, d\xi \quad (13)$$

c)はりのせん断力　はりのせん断力は$Q = M'$故，(13)式を1度微分したものをこの式に代入すると次の様にはりのせん断力が求まる。

$$Q = -g_0 \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{[(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)/\xi + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4)]\sin\xi x - V\tau_1(1/K_2^4 - 1/K^4)\cos\xi x}{(\xi^4 - \rho A V^2 \xi^2/EI + 1/K_2^4)^2 + (V\tau_1)^2(\xi^5 - \rho A V^2 \xi^3/EI + \xi/K^4)^2} \xi^3 \sin\xi c_0 \, d\xi \quad (14)$$

d)基礎反力　(12)式を(8)式に代入し、しかる後線形微分方程式$y' + P(x)y = Q(x)$の解は、Cを積分定数として$y = \exp\{-\int P(x)dx\}[\int Q(x)\exp\{\int P(x)dx\} + C]$なる事を用いて解くと基礎反力が求まる。積分定数

cは(9)式を用いると$c=0$であるから基礎反力が次のように求まる。

$$P=q_0\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\Big[\Big\{(\xi^4-\rho AV^2\xi^2+1/K_2^4)/\xi+(V\tau_1)^2(\xi^5-\rho AV^2\xi^3/EI+1/K^4)\Big\}\Big\{(1/K_2^4-1/K^4)\xi\sin\xi x-(V\tau_1\xi^2/K^4$$
$$+1/K_2^4V\tau_1)\cos\xi x\Big\}+V\tau_1(1/K_2^4-1/K^4)\Big\{(V\tau_1\xi^2/K^4-1/V\tau_1K_2^4)\sin\xi x-(1/K^4+1/K_2^4)\xi\cos\xi x\Big\}\Big]\sin\xi c_0$$
$$\times(V\tau_1)/\{(V\tau_1\xi)^2+1\}\{(\xi^4-\rho AV^2\xi^2/EI+1/K_2^4)^2+(V\tau_1)^2(\xi^5-\rho AV^2\xi^3/EI+\xi/K^4)^2\}\,d\xi \qquad (15)$$

5 数値計算例および考察　(12)～(15)式を無次元化パラメータc_0/K, $(K_2/K_1)^4$, $\tau_1\sqrt{E/\rho}/K$, $V/\sqrt{E/\rho}$, R/Kなどを用いて無次元化を行った。茲に$K_1^4=EI/k_1$で長さの次元をもつパラメータ、$\sqrt{E/\rho}$は棒を伝わる縦波速度、Kは回転半径$K=\sqrt{I/A}$である。遅延時間に関しては、$\tau_1\sqrt{E/\rho}/K=0$と10^3, 速度については$V/\sqrt{E/\rho}=0,\ 0.01,\ 0.015,\ 0.02$の4箇について各計算を行った。また荷重は集中荷重を考えた。

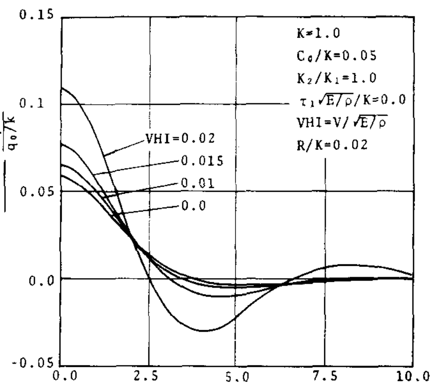

Fig 4

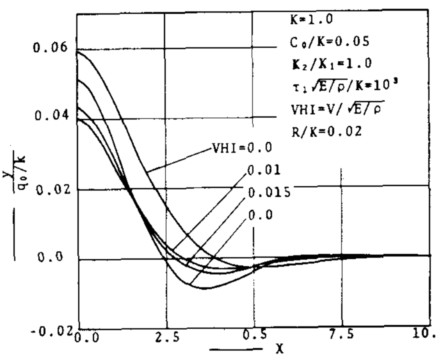

Fig 5

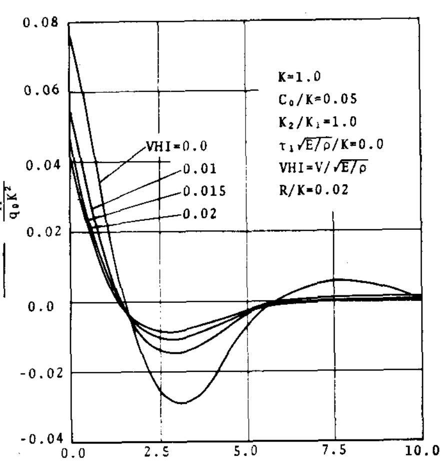

Fig 6

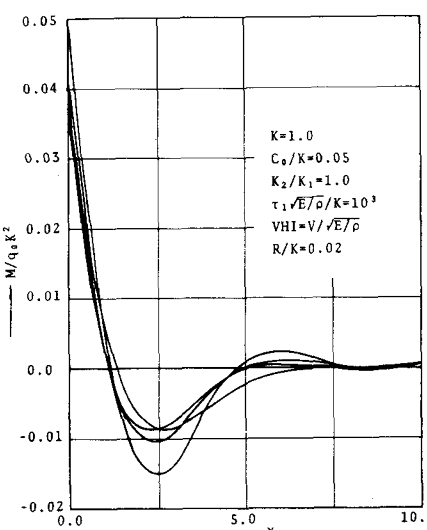

Fig 7

Fig4，5はたわみ曲線，Fig6，7は曲げモーメント曲線，Fig8,9は基礎反力線，Fig10はたわみ，曲げモーメントの各静荷重のたわみy_s，曲げモーメントM_sに対する応答倍率曲線を表わす。

(a)たわみ(Fig4,5)，曲げモーメント(Fig6,7)，基礎反力(Fig8,9)　$\tau_1\sqrt{E/\rho}/K\fallingdotseq 0$の場合は、粘弾性モデルにおいて弾性スプリングのみが作動する状態となるが、速度$V/\sqrt{E/\rho}$がふえるに従いその各値は増加する。この時は、当然標記の値は粘性の影響を受けていない。$\tau_1\sqrt{E/\rho}/K=10^3$の場合は、粘性の影響が表われて来る。

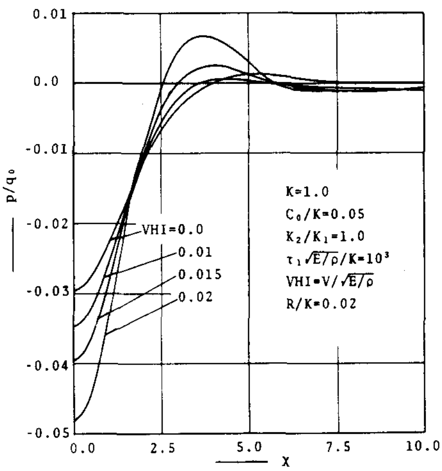

Fig 8

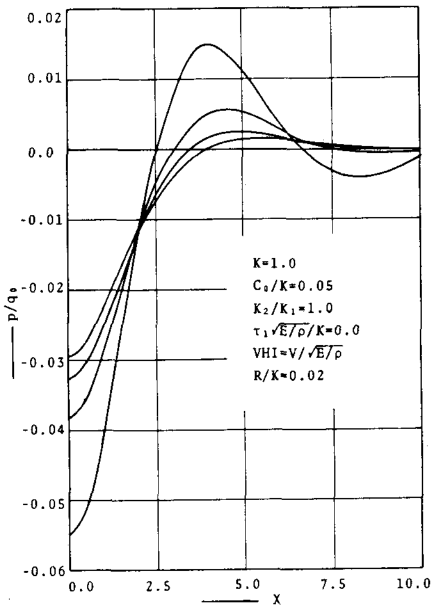

Fig 9

この解析では座標変換を行ったため$T\fallingdotseq 0$とした場合時間に関係がなくなり，常に弾性床上の値$\tau_1\sqrt{E/\rho}/K\fallingdotseq 0$の場合と一致し速度が増加するに従い移動荷重は注目点をその各速度に応じ，通り過ぎる時間が段々遅くなる。従ってたわみ，曲げモーメントの各々がとる値は，粘性項即ちダッシュポットの効果が表われ弾性床上の場合より減少するが，速度$V/\sqrt{E/\rho}$が増加するに従い粘性項の影響が減少し次第に大きくなる。

基礎反力の場合は速度$V/\sqrt{E/\rho}$が小なる程粘性項の影響が著しく，弾性スプリングの反力にダッシュポットの反力が加わるため，速度が比較的小さい間は弾性床上の基礎反力値よりも大きくなると思われる。速度がある程度以上になると，荷重は注目点にとどまる時間が減少するので弾性床上の値より小さくなると思われる。

(b)応答倍率曲線(Fig10)

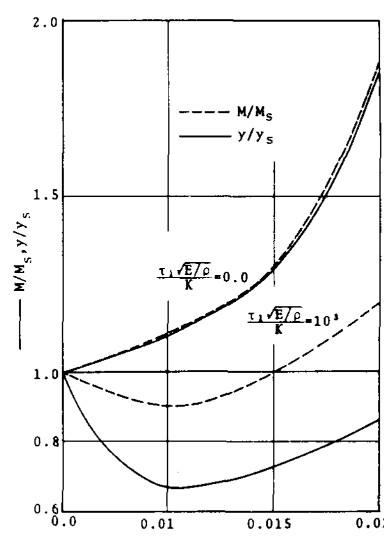

Fig 10

この図は弾性床上の速度$V/\sqrt{E/\rho}\fallingdotseq 0$の場合のたわみ$y_s$，曲げモーメント$M_s$と，速度有限のたわみ$y$，曲げモーメント$M$の各々の比を示したものである。この図によるとたわみ，曲げモーメントの各値は弾性床上の場合，速度が大きくなるに従い増加している。然し粘弾性床上の場合すなわち$\tau_1\sqrt{E/\rho}/K=10^3$のとき，粘性項の効果のため(a)で述べたと同じく速度がある程度までは減少し，それ以上になると次第に大きくなる。

以上に述べたものは全て荷重前方のものであり，荷重後方の計算は行っていないが，今後行う予定である。

計算は室工大情報センターFACOM230－28を使って行った。図面作製にお手伝い頂いた田中，渡部両氏に感謝する。

参考文献

1)園田，小林，石尾；線形粘弾性基礎上のはりの解析，土論，NO.247，1976－3，P1
2)W.フリューゲ：粘弾性学