

多径間吊橋のねじりを考慮した剛性マトリックス解析法について

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇
 北海道大学工学部 正員 佐藤 浩一
 北海道大学工学部○学生員 戸田 敦

1. まえがき

本報告は吊橋のねじりを考慮した微分方程式よりその剛性マトリックスを誘導し、これを用いて鉛直たわみ、ねじり、水平たわみが連成する場合の解析を行い、その特性を検討しようとするものである。

2. 解析理論

吊橋の曲げとねじりに関する基礎微分方程式は次式で表わされる。

$$EI v''''(x) - (H_1 + H_2) v''(x) + (H_1 - H_2) e \theta'(x) = p_1(x) + (H_{p1} + H_{p2}) y'' \quad (1)$$

$$EC_S \theta''''(x) - GI_T \theta''(x) - (H_1 + H_2) e^2 \theta''(x) + (H_1 - H_2) e v''(x) + EI_y y_M w''(x) = m_T(x) + p_2(x) e_1 - p_1(x) e_2 - (H_{p1} - H_{p2}) e y'' \quad (2)$$

$$EI_y y_M \theta''(x) + EI_y w''(x) = p_2(x) \quad (3)$$

ケーブルに関する基礎方程式は、

$$H_{p1} \frac{Lc}{EcAc} + y'' \int_0^L v_1(x) dx = 0 \quad (4)$$

$$H_{p2} \frac{Lc}{EcAc} + y'' \int_0^L v_2(x) dx = 0 \quad (5)$$



Fig-1

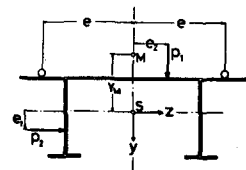


Fig-2 S: 重心 M: セン断中心

ここに $H_1 = H_{g1} + H_{p1}$, $H_2 = H_{g2} + H_{p2}$, $C_M = C_S - y_M^2 I_y$

いま節点間に荷重が作用しないと考える事により、式(1)(2)(3)の右辺の荷重項を0と置き、その一般解を求めると、

$$v(x) = A_1 \sinh \alpha x + A_2 \cosh \alpha x + A_3 \sinh \beta x + A_4 \cosh \beta x + A_5 x + A_6 \quad (6)$$

$$\theta(x) = \frac{M^2 - \alpha^2}{\epsilon} (A_1 \sinh \alpha x + A_2 \cosh \alpha x) + \frac{M^2 - \beta^2}{\epsilon} (A_3 \sinh \beta x + A_4 \cosh \beta x) + \frac{M^2}{\epsilon} (A_5 x + A_6) + A_7 x + A_8 \quad (7)$$

$$w(x) = -y_M \frac{M^2 - \alpha^2}{\epsilon} (A_1 \sinh \alpha x + A_2 \cosh \alpha x) - y_M \frac{M^2 - \beta^2}{\epsilon} (A_3 \sinh \beta x + A_4 \cosh \beta x) - y_M \frac{M^2}{\epsilon} (A_5 x + A_6) - y_M (A_7 x + A_8) + A_9 x^2 + A_{10} x + A_{11} \quad (8)$$

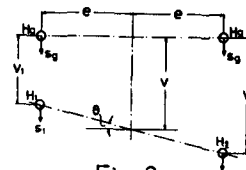


Fig-3

ここに

$$\left[\begin{aligned} \alpha &= \sqrt{\frac{T}{4} + \sqrt{\frac{C}{4}}} + \sqrt{\frac{T}{4} - \sqrt{\frac{C}{4}}}, & \beta &= \sqrt{\frac{T}{4} + \sqrt{\frac{C}{4}}} - \sqrt{\frac{T}{4} - \sqrt{\frac{C}{4}}}, \\ T &= M^2 + r^2, & C &= r^2 M^2 - \epsilon \delta, \\ M^2 &= \frac{H_1 + H_2}{EI}, & r^2 &= \frac{GI_T + (H_1 + H_2) e^2}{EC_M}, & \epsilon &= \frac{(H_1 - H_2) e}{EI}, & \delta &= \frac{(H_1 - H_2) e}{EC_M} \end{aligned} \right]$$

節点力の式に上述の式(6)(7)(8)を代入すると

$$Q(x) = -EI v''''(x) + (H_1 + H_2) v''(x) - (H_1 - H_2) e \theta'(x) = -EI \epsilon A_7 \quad (9)$$

$$M(x) = -EI v''(x) = -EI \alpha^2 (A_1 \sinh \alpha x + A_2 \cosh \alpha x) - EI \beta^2 (A_3 \sinh \beta x + A_4 \cosh \beta x) \quad (10)$$

$$M_T(x) = -EC_M \theta''(x) + \{GI_T + (H_1 + H_2) e^2\} \theta'(x) - (H_1 - H_2) e v'(x) + y_M Q_2(x)$$

$$= -EC_M \left\{ -r^2 \left(\frac{M^2}{E} A_6 + A_7 \right) + \delta A_5 \right\} - \gamma_M EI_y 6A_9 \quad (11)$$

$$M_w(x) = -EC_M \theta''(x) + \gamma_M M_y(x) \quad (12)$$

$$= -EC_M \left\{ \frac{M^2 - \alpha^2}{E} \alpha^2 (A_1 \sinh \alpha x + A_2 \cosh \alpha x) + \frac{M^2 - \beta^2}{E} \beta^2 (A_3 \sinh \beta x + A_4 \cosh \beta x) \right\} - EI_y \gamma_M (6A_9 x + 2A_{10})$$

$$Q_z(x) = -EI_y w'''(x) - EI_y \gamma_M \theta'''(x) = -EI_y 6A_9 \quad (13)$$

$$M_y(x) = -EI_y w''(x) - EI_y \gamma_M \theta''(x) = -EI_y (6A_9 x + 2A_{10}) \quad (14)$$

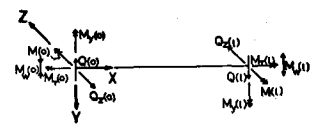
式(9)~(14)において $x=0$, $x=l$ として両端の断面力を積分定数 $A_1 \sim A_{12}$ を用いてマトリックス表示すると $\{F\} = [H]\{A\}$. また両端 $x=0$, $x=l$ の変形量を積分定数によりマトリックス表示すると $\{u\} = [G]\{A\}$. これより $\{A\} = [G]^{-1}\{u\}$. 従って $\{F\} = [H][G]^{-1}\{u\}$. この $[H][G]^{-1}$ が剛性マトリックスである.

断面力の符号の変更を行い剛性マトリックス表示すると次式となる.

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ M_T(0) \\ M_w(0) \\ Q_z(0) \\ M_y(0) \\ Q(1) \\ M(1) \\ M_T(1) \\ M_w(1) \\ Q_z(1) \\ M_y(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} & K_{10} & K_{11} & K_{12} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} & K_{20} & K_{21} & K_{22} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} & K_{30} & K_{31} & K_{32} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} & K_{40} & K_{41} & K_{42} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} & K_{50} & K_{51} & K_{52} \\ & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} & K_{69} & K_{60} & K_{61} & K_{62} \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} & K_{79} & K_{70} & K_{71} & K_{72} \\ & & & & & & & K_{88} & K_{89} & K_{80} & K_{81} & K_{82} \\ & & & & & & & & K_{99} & K_{90} & K_{91} & K_{92} \\ & & & & & & & & & K_{100} & K_{101} & K_{102} \\ & & & & & & & & & & K_{111} & K_{112} \\ & & & & & & & & & & & K_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V(0) \\ V'(0) \\ \theta(0) \\ \theta'(0) \\ W(0) \\ W'(0) \\ V(1) \\ V'(1) \\ \theta(1) \\ \theta'(1) \\ W(1) \\ W'(1) \end{Bmatrix}$$

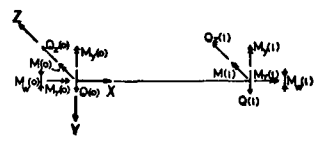
Sym.

(15)



微分方程式における節点力の正の方向

Fig-4



剛性マトリックスにおける節点力の正の方向

$$\begin{aligned} K_{17} &= -K_{11}, & K_{18} &= K_{12}, & K_{19} &= -K_{13}, & K_{10} &= K_{14}, \\ K_{23} &= K_{14}, & K_{27} &= -K_{12}, & K_{29} &= -K_{14}, \\ K_{37} &= -K_{13}, & K_{38} &= K_{14}, & K_{39} &= -K_{33}, & K_{30} &= K_{34}, & K_{31} &= -K_{35}, & K_{32} &= K_{36}, \\ K_{45} &= K_{36}, & K_{47} &= -K_{14}, & K_{48} &= K_{20}, & K_{49} &= -K_{34}, & K_{41} &= -K_{36}, \\ K_{59} &= -K_{35}, & K_{50} &= K_{36}, & K_{51} &= -K_{55}, & K_{52} &= K_{56}, \\ K_{69} &= -K_{36}, & K_{60} &= K_{42}, & K_{61} &= -K_{56}, \\ K_{77} &= K_{11}, & K_{78} &= K_{27}, & K_{79} &= K_{13}, & K_{70} &= -K_{14}, \\ K_{88} &= K_{22}, & K_{89} &= -K_{14}, & K_{90} &= K_{24}, \\ K_{99} &= K_{33}, & K_{90} &= -K_{34}, & K_{91} &= K_{35}, & K_{92} &= -K_{36}, \\ K_{100} &= K_{44}, & K_{101} &= -K_{36}, & K_{102} &= K_{46}, \\ K_{111} &= K_{55}, & K_{112} &= -K_{56}, \\ K_{1212} &= K_{66}, \end{aligned}$$

剛性マトリックスの各要素は以下の様である.

$$\begin{aligned} K_{11} &= -EI [\alpha^3 M_B \cdot \nu_{1\alpha} / D_1 + \beta^3 M_\alpha \cdot \nu_{1\beta} / D_2] \\ K_{12} &= -EI [\alpha^2 M_B \cdot \nu_{2\alpha} / D_1 + \beta^2 M_\alpha \cdot \nu_{2\beta} / D_2] \\ K_{13} &= +EC_M [\alpha^3 \delta \cdot \nu_{1\alpha} / D_1 + \beta^3 \delta \cdot \nu_{1\beta} / D_2] \end{aligned}$$

記号の説明

$$\begin{aligned} D_1 &= (\alpha^2 - \beta^2)(2 \cosh \alpha l - 2 - \alpha l \sinh \alpha l) \\ D_2 &= (\beta^2 - \alpha^2)(2 \cosh \beta l - 2 - \beta l \sinh \beta l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1,4} &= +EC_M[\alpha^2 \delta \cdot \nu_{2\alpha} / D_1 + \beta^2 \delta \cdot \nu_{2\beta} / D_2] \\
K_{2,2} &= +EC_M[\alpha \cdot M_\beta \cdot \nu_{3\alpha} / D_1 + \beta \cdot M_\alpha \cdot \nu_{3\beta} / D_2] \\
K_{2,4} &= -EC_M[\alpha \cdot \delta \cdot \nu_{3\alpha} / D_1 + \beta \cdot \delta \cdot \nu_{3\beta} / D_2] \\
K_{2,8} &= -EI[\alpha \cdot M_\beta \cdot \nu_{4\alpha} / D_1 + \beta \cdot M_\alpha \cdot \nu_{4\beta} / D_2] \\
K_{2,10} &= +EC_M[\alpha \cdot \delta \cdot \nu_{4\alpha} / D_1 + \beta \cdot \delta \cdot \nu_{4\beta} / D_2] \\
K_{3,3} &= -EC_M[\alpha^3 G_\beta \cdot \nu_{1\alpha} / D_1 + \beta^3 G_\alpha \cdot \nu_{1\beta} / D_2] + 12EI_y \gamma_M^2 / l^3 \\
K_{3,4} &= -EC_M[\alpha^2 G_\beta \cdot \nu_{2\alpha} / D_1 + \beta^2 G_\alpha \cdot \nu_{2\beta} / D_2] + 6EI_y \gamma_M^2 / l^2 \\
K_{3,5} &= +12EI_y \gamma_M / l^3 \\
K_{3,6} &= +6EI_y \gamma_M / l^2 \\
K_{4,4} &= +EC_M[\alpha \cdot G_\beta \cdot \nu_{3\alpha} / D_1 + \beta \cdot G_\alpha \cdot \nu_{3\beta} / D_2] + 4EI_y \gamma_M^2 / l \\
K_{4,6} &= +4EI_y \gamma_M / l \\
K_{4,10} &= +EC_M[\alpha \cdot M_\alpha \cdot \nu_{4\alpha} / D_1 + \beta \cdot M_\beta \cdot \nu_{4\beta} / D_2] + 2EI_y \gamma_M^2 / l \\
K_{4,12} &= +2EI_y \gamma_M / l \\
K_{5,5} &= +12EI_y / l^3 \\
K_{5,6} &= +6EI_y / l^2 \\
K_{6,6} &= +4EI_y / l \\
K_{6,12} &= +2EI_y / l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\alpha &= \mu^2 - \alpha^2 \\
M_\beta &= \mu^2 - \beta^2 \\
G_\alpha &= r^2 - \alpha^2 \\
G_\beta &= r^2 - \beta^2 \\
\nu_{1\alpha} &= \sinh \alpha l \\
\nu_{1\beta} &= \sinh \beta l \\
\nu_{2\alpha} &= \cosh \alpha l - 1 \\
\nu_{2\beta} &= \cosh \beta l - 1 \\
\nu_{3\alpha} &= \sinh \alpha l - \alpha l \cosh \alpha l \\
\nu_{3\beta} &= \sinh \beta l - \beta l \cosh \beta l \\
\nu_{4\alpha} &= \sinh \alpha l - \alpha l \\
\nu_{4\beta} &= \sinh \beta l - \beta l
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{1,5} &= K_{1,6} = K_{1,11} = K_{1,12} = K_{2,5} = K_{2,6} = K_{2,11} = K_{2,12} = 0 \\
K_{5,7} &= K_{5,8} = K_{6,7} = K_{6,8} = K_{7,11} = K_{7,12} = K_{8,11} = K_{8,12} = 0
\end{aligned}$$

a. 鉛直たわみだけの場合の剛性マトリックス

式(15)において $r=0, \varepsilon=0, \delta=0$ とすれば $\beta=0, \alpha=\mu$

従って

$$\begin{Bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(1) \\ M(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,7} & K_{1,8} \\ & K_{2,2} & K_{2,7} & K_{2,8} \\ & & K_{7,7} & K_{7,8} \\ & & & K_{8,8} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V(0) \\ V'(0) \\ V(1) \\ V'(1) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

これは、曲げに関する微分方程式から既に求めた剛性マトリックスに一致する。

c. ねじりと水平たわみとが連成する場合の剛性マトリックス

式(15)において $\mu=0, \varepsilon=0, \delta=0$ とすれば $\beta=0, \alpha=r$

従って

$$\begin{Bmatrix} M_T(0) \\ M_W(0) \\ Q_z(0) \\ M_y(0) \\ M_T(1) \\ M_W(1) \\ Q_z(1) \\ M_y(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,5} & K_{3,6} & K_{3,9} & K_{3,10} & K_{3,11} & K_{3,12} \\ & K_{4,4} & K_{4,5} & K_{4,6} & K_{4,9} & K_{4,10} & K_{4,11} & K_{4,12} \\ & & K_{5,5} & K_{5,6} & K_{5,9} & K_{5,10} & K_{5,11} & K_{5,12} \\ & & & K_{6,6} & K_{6,9} & K_{6,10} & K_{6,11} & K_{6,12} \\ & & & & K_{9,9} & K_{9,10} & K_{9,11} & K_{9,12} \\ & & & & & K_{10,10} & K_{10,11} & K_{10,12} \\ & & & & & & K_{11,11} & K_{11,12} \\ & & & & & & & K_{12,12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \\ W(0) \\ W'(0) \\ \theta(1) \\ \theta'(1) \\ W(1) \\ W'(1) \end{Bmatrix} \quad (18)$$

b. ねじりだけの場合の剛性マトリックス

式(15)において $\mu=0, \varepsilon=0, \delta=0$ とすれば $\beta=0, \alpha=r$

従って

$$\begin{Bmatrix} M_T(0) \\ M_W(0) \\ M_T(1) \\ M_W(1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{3,3} & K_{3,4} & K_{3,9} & K_{3,10} \\ & K_{4,4} & K_{4,9} & K_{4,10} \\ & & K_{9,9} & K_{9,10} \\ & & & K_{10,10} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(0) \\ \theta'(0) \\ \theta(1) \\ \theta'(1) \end{Bmatrix} \quad (17)$$

これは、ねじりに関する微分方程式から既に求めた剛性マトリックスに一致する。

これは、ねじりと水平たわみに関する微分方程式から既に求めた剛性マトリックスに一致する。

3. 数値計算例

例としては図-5のような三径間連続吊橋とした。

断面諸元 $f_1=3.125\text{ m}$, $f_2=5.0\text{ m}$,
 $R_1=R_2=625\text{ m}$, $L_c=85.125\text{ m}$, $H_g=9375\text{ t}$
 $A_c=0.28\text{ m}^2$. 片側ケーブルにつき, $E_c=1.6\times 10^7\text{ t/m}^2$
 $I=3.0\text{ m}^4$. 全断面につき,
 $I_y=150\text{ m}^4$. 全断面につき,
 $I_T=4.5\times 10^{-4}\text{ m}^4$. 全断面につき,
 $C_S=525\text{ m}^6$. 全断面につき,
 $e=10.50\text{ m}$, $y_M=-1.50\text{ m}$,
 吊構造重量 $g=15\text{ t/m}$. 片側ケーブルにつき,
 活荷重偏心量 $e_1=5\text{ t/m}$,
 活荷重偏心距離 $e_2=5.0\text{ m}$,

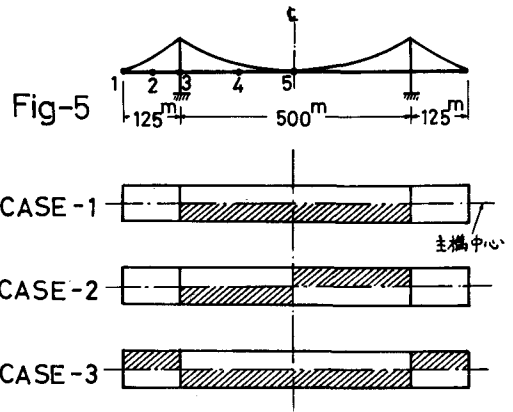


Fig-5

Fig-6

補剛桁は120の要素に分割して計算を行い、活荷重の載荷状態を図-6に示す。図-7、図-8はそれぞれのたわみ、ねじり角を表わす。表-1、表-2は本解析法と式(16)による鉛直たわみだけの場合(解法(A))と式(17)によるねじりだけの場合(解法(B))との比較を示しており左端の数字は図-5の補剛桁の各着目点を示す。

4. あとがき

鉛直たわみ、ねじり、水平たわみの3成分が連成する場合の解析法として剛性マトリックスを誘導し、これによりさまざまな荷重状態に対して立体的に解析する事が容易になった。また連成する場合と連成しない場合の差異はたわみにおいては2~5%程度で連成法が小さくなった。なお要素間に作用した部分分布荷重とねじり荷重に対しては、ステップ関数とデルタ関数を用い、微分方程式のラプラス変換をはかる事により剛性マトリックスに荷重項として組み入れる事ができ、荷重を要素の両端に置き換える事なく厳密解を得る事ができ分割数も非常に少なくできるがこれについては後日発表する予定である。計算には北海道大学大型計算機センターのFACOM 230-75を使用した。

参考文献

A. ハウラネック/O. シュタインハルト: 鋼橋の理論と計算(訳)

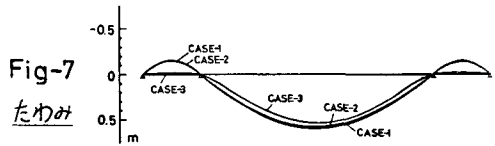


Fig-7

たわみ

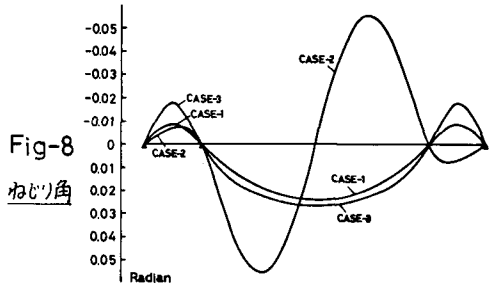


Fig-8

ねじり角

たわみ (cm)

	CASE-1	CASE-2 (A)	CASE-3 (A)
1	0	0	0
2	-14.8	-15.0	-15.1
3	0	0	0
4	47.0	48.2	48.9
5	56.9	58.3	59.3

Table-1

ねじり角 ($\times 10^2$ Radian)

	CASE-1 (B)	CASE-2 (B)	CASE-3 (B)
1	0	0	0
2	-0.85	-0.93	-0.70
3	0	0	0
4	2.04	2.33	5.43
5	2.42	2.77	6.00

Table-2