

バネ支承上単純格子橋の解法

北海道工業大学 正員 猪又 稔
同上 学生員 口根本敏之

1. まえがき

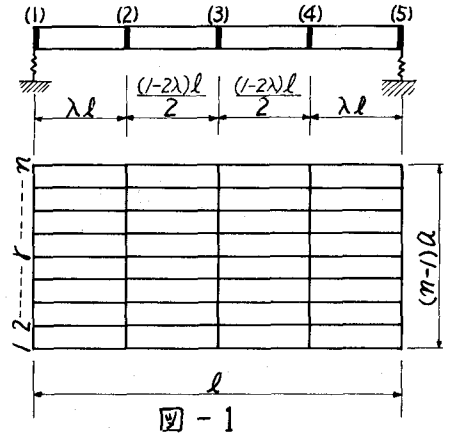
橋の支承は高強度鋼材、ゴム材など新材料の開発によって種々のものが使用されてあり、その取扱については便宜も作成され支承の設計施工に寄与している。支承の中でゴム支承は弾性変形が大きいという特性があるがこのようなバネ支承を格子橋や連続橋に使用する場合、剛支承上のそれとは異なるた力学的挙動を示すものである。本論文の解法は文献2)の剛支承上格子橋の解法をバネ支承上格子橋に拡張したものである。

2. 解法

本文であつかう格子橋は次の仮定を満足するものとする。

- 1) 主桁および横桁のねじり剛性は無視する。
- 2) 主桁と横桁は直交する。
- 3) 主桁は等間隔に配置されている。
- 4) 各横桁はそれぞれ自身等断面とする。
- 5) すべての主桁は等断面でかつ曲げ剛性は等しい。
- 6) 主桁は回転自由なバネに支えられている。

図-1のようなn本の主桁と5本の横桁からなる格子橋において、横桁iの支点rに関する条件式は文献2)から次のようになる。



$$\frac{a}{6E_i I_i} M_{r-1}^{(i)} + \frac{2a}{3E_i I_i} M_r^{(i)} + \frac{a}{6E_i I_i} M_{r+1}^{(i)} + \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} M_{r-2}^{(k)} - \frac{4}{a^2} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} M_{r-1}^{(k)} + \frac{6}{a^2} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} M_r^{(k)} - \frac{4}{a^2} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} M_{r+1}^{(k)} + \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^n \delta_{ik} M_{r+2}^{(k)} = \frac{1}{a} (-\delta_{i(r-1)} + 2\delta_{i(r)} - \delta_{i(r+1)}) + \frac{1}{a} \delta_{i(r-1)} - \frac{1}{a} \delta_{i(r+1)} \quad (1)$$

基本系において主桁の点iに単位集中荷重が作用したときの支点A, Bの反力を δ_{Ar} , δ_{Br} とし、また支承のバネ定数をCとすれば図-2に示すように主桁の点iの鉛直変位量 δ_{ir} は次のようになる。

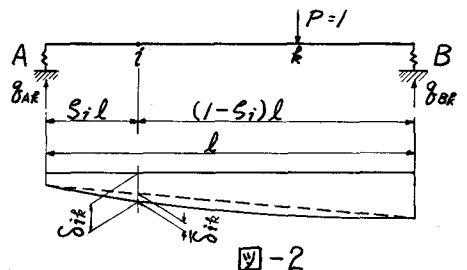
$$\delta_{ir} = \bar{\delta}_{ir} + \frac{1}{C} \{ (1-S_i) \delta_{Ar} + S_i \delta_{Br} \} \quad (2)$$

ここに $\bar{\delta}_{ir}$ は基本系の剛支承上主桁の単位集中荷重によるたみ量である。

同様に外力による主桁Yの支点A, Bの反力を Q_{Am}^0 , Q_{Bm}^0 とすれば点iの鉛直変位量は

$$\delta_{im}^0 = \bar{\delta}_{im}^0 + \frac{1}{C} \{ (1-S_i) Q_{Am}^0 + S_i Q_{Bm}^0 \} \quad (3)$$

となる。



式(2),(3)を式(1)に代入すれば

$$\frac{a}{6E_i I_i} M_{r-1}^{(i)} + \frac{2a}{3E_i I_i} M_r^{(i)} + \frac{a}{6E_i I_i} M_{r+1}^{(i)} + \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} M_{r-k}^{(i)} - 4 \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} M_{r-1}^{(i)} + 6 \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} M_r^{(i)} - 4 \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} M_{r+1}^{(i)} + \sum_{k=1}^r \alpha_{ik} M_{r+2}^{(i)}$$

$$= \frac{1}{a} \left[-\bar{\delta}_{i(r-1)} + 2\bar{\delta}_{i(r)} - \bar{\delta}_{i(r+1)} + a \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{r-1}^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{r+1}^2} \right) - \frac{1}{c} \left\{ (1-S_i)(Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 + Q_{A(r+1)}^0) + S_i(Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 + Q_{B(r+1)}^0) \right\} \right] \quad (4)$$

ここに $\alpha_{ik} = \frac{1}{a^2 c} \left\{ c \bar{\delta}_{ik} + (1-S_i) \delta_{Aik} + S_i \delta_{Bik} \right\}$ ----- (5)

また、主桁の曲げ剛性を $E_o I_o$ とすれば $\bar{\delta}_{ik}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\delta}_{11} = \bar{\delta}_{12} = \bar{\delta}_{13} = \bar{\delta}_{14} = \bar{\delta}_{15} = 0, \quad \bar{\delta}_{51} = \bar{\delta}_{52} = \bar{\delta}_{53} = \bar{\delta}_{54} = \bar{\delta}_{55} = 0 \\ \bar{\delta}_{22} = \bar{\delta}_{44} = \frac{\lambda^2 (1-\lambda)^2 l^3}{3E_o I_o}, \quad \bar{\delta}_{24} = \bar{\delta}_{42} = \frac{\lambda^2 (1-2\lambda^2) l^3}{6E_o I_o} \\ \bar{\delta}_{33} = \bar{\delta}_{32} = \bar{\delta}_{34} = \bar{\delta}_{43} = \frac{\lambda(3-4\lambda^2) l^3}{48E_o I_o}, \quad \bar{\delta}_{33} = \frac{l^3}{48E_o I_o} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

式(4)より $5(n-2)$ 個の方程式がえられるが、 S 横桁の支点モーメントは次のように求まることになる。

$$\begin{Bmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \\ M_5^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_3^{(1)} \\ B_4^{(1)} \\ B_5^{(1)} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

ここに $M_i = \{ M_{i2}^{(1)} \ M_{i3}^{(1)} \ \dots \ M_{i(n-1)}^{(1)} \}^T$ ----- (8)

サブマトリックス A はいずれも $(n-2)$ 次の正方マトリックスで、その値は次のようである。

$$A_{11} = A_{55} = \begin{bmatrix} 2(2+3\omega l^3) & 1-4\omega l^3 & \omega l^3 & & \\ & \text{sym.} & & & \\ & & \omega l^3 & & \\ & & & 1-4\omega l^3 & \\ & & & & 2(2+3\omega l^3) \end{bmatrix}, \quad A_{13} = A_{53} = \begin{bmatrix} 3\omega l^3 & -2\omega l^3 & 0.5\omega l^3 & & \\ & \text{sym.} & & & \\ & & 0.5\omega l^3 & & \\ & & & -2\omega l^3 & \\ & & & & 3\omega l^3 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = A_{54} = \begin{bmatrix} 6(1-\lambda)\omega l^3 & -4(1-\lambda)\omega l^3 & (1-\lambda)\omega l^3 & & \\ & \text{sym.} & & & \\ & & (1-\lambda)\omega l^3 & & \\ & & & -4(1-\lambda)\omega l^3 & \\ & & & & 6(1-\lambda)\omega l^3 \end{bmatrix}, \quad A_{14} = A_{52} = \begin{bmatrix} 6\lambda\omega l^3 & -4\lambda\omega l^3 & \lambda\omega l^3 & & \\ & \text{sym.} & & & \\ & & \lambda\omega l^3 & & \\ & & & -4\lambda\omega l^3 & \\ & & & & 6\lambda\omega l^3 \end{bmatrix}$$

ただし

$$\beta = \left(\frac{L}{2a}\right)^3 \frac{E_3 I_3}{E_0 I_0}, \quad \gamma = \frac{6E_3 I_3}{a^3 C}, \quad \omega_1 = \frac{E_1 I_1}{E_3 I_3}, \quad \omega_2 = \frac{E_2 I_2}{E_3 I_3} \quad \text{----- (10)}$$

ここに $E_1 I_1, E_2 I_2, E_3 I_3$ は横桁(1)(5), (2)(4), (3)の曲げ剛性である。

次に

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2 & \mathbf{B}_3 & \text{-----} & \mathbf{B}_{n-2} & \mathbf{B}_{n-1} \end{pmatrix}^T \quad \text{----- (11)}$$

であり, ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_1 &= \frac{6EI}{a} (\mathcal{C}_{r,r-1}^{(0)} - \mathcal{C}_{r,r+1}^{(0)}) - \omega_1 \gamma a (Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 - Q_{A(r+1)}^0) \\ \mathbf{B}_r &= \frac{6E_2 I_2}{a^2} \{ \bar{\delta}_{2(r-1)}^0 + 2\bar{\delta}_{2(r)}^0 - \bar{\delta}_{2(r+1)}^0 + a(\mathcal{C}_{r,r-1}^{(2)} - \mathcal{C}_{r,r+1}^{(2)}) \} - \omega_2 \gamma a \{ (1-\lambda)(Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 + Q_{A(r+1)}^0) + \lambda(Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 + Q_{B(r+1)}^0) \} \\ \mathbf{B}_r &= \frac{6E_3 I_3}{a^2} \{ \bar{\delta}_{3(r-1)}^0 + 2\bar{\delta}_{3(r)}^0 - \bar{\delta}_{3(r+1)}^0 + a(\mathcal{C}_{r,r-1}^{(3)} - \mathcal{C}_{r,r+1}^{(3)}) \} - 0.5 \gamma a (Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 + Q_{A(r+1)}^0 + Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 + Q_{B(r+1)}^0) \\ \mathbf{B}_r &= \frac{6E_2 I_2}{a^2} \{ \bar{\delta}_{4(r-1)}^0 + 2\bar{\delta}_{4(r)}^0 - \bar{\delta}_{4(r+1)}^0 + a(\mathcal{C}_{r,r-1}^{(4)} - \mathcal{C}_{r,r+1}^{(4)}) \} - \omega_2 \gamma a \{ \lambda(Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 + Q_{A(r+1)}^0) + (1-\lambda)(Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 + Q_{B(r+1)}^0) \} \\ \mathbf{B}_r &= \frac{6EI}{a} (\mathcal{C}_{r,r-1}^{(4)} - \mathcal{C}_{r,r+1}^{(4)}) - \omega_1 \gamma a (Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 - Q_{B(r+1)}^0) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

また, 主桁 $(r-1), r, (r+1)$ にそれぞれ P_{r-1}, P_r, P_{r+1} なる集中荷重が作用し, 横桁に荷重がないときは $\delta_{i(r)} = \mathcal{Z}_{i(r)} \frac{P_r \beta}{E_0 I_0}$ とし, ば式(12)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_r &= -\omega_1 \gamma a (Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 + Q_{A(r+1)}^0) \\ \mathbf{B}_r &= 48\omega_2 \beta a \{ \mathcal{Z}_{2(r-1)} P_{r-1} + 2\mathcal{Z}_{2(r)} P_r - \mathcal{Z}_{2(r+1)} P_{r+1} \} - \omega_2 \gamma a \{ (1-\lambda)(Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 + Q_{A(r+1)}^0) - \lambda(Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 + Q_{B(r+1)}^0) \} \\ \mathbf{B}_r &= 48\beta a \{ \mathcal{Z}_{3(r-1)} P_{r-1} + 2\mathcal{Z}_{3(r)} P_r - \mathcal{Z}_{3(r+1)} P_{r+1} \} - 0.5 \gamma a (P_{r-1} - 2P_r + P_{r+1}) \\ \mathbf{B}_r &= 48\omega_2 \beta a \{ \mathcal{Z}_{4(r-1)} P_{r-1} + 2\mathcal{Z}_{4(r)} P_r - \mathcal{Z}_{4(r+1)} P_{r+1} \} - \omega_2 \gamma a \{ \lambda(Q_{A(r-1)}^0 - 2Q_{A(r)}^0 + Q_{A(r+1)}^0) + (1-\lambda)(Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 + Q_{B(r+1)}^0) \} \\ \mathbf{B}_r &= -\omega_1 \gamma a (Q_{B(r-1)}^0 - 2Q_{B(r)}^0 + Q_{B(r+1)}^0) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

両端の支点上横桁がないときは式(7)は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(1)} \\ \mathbf{A}^{(2)} \\ \mathbf{A}^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{(1)} \\ \mathbf{B}^{(2)} \\ \mathbf{B}^{(3)} \end{pmatrix} \quad \text{----- (14)}$$

さらに, (1)(2)(4)(5)の横桁がある場合

$$\begin{Bmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \\ M_4^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{14} & A_{15} \\ A_{21} & A_{22} & A_{24} & A_{25} \\ A_{41} & A_{42} & A_{44} & A_{45} \\ A_{51} & A_{52} & A_{54} & A_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_2^{(1)} \\ B_4^{(1)} \\ B_5^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (15)}$$

(1)(3)(5)の横桁からなる場合

$$\begin{Bmatrix} M_1^{(1)} \\ M_2^{(1)} \\ M_3^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{13} & A_{15} \\ A_{31} & A_{33} & A_{35} \\ A_{51} & A_{53} & A_{55} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} B_1^{(1)} \\ B_3^{(1)} \\ B_5^{(1)} \end{Bmatrix} \quad \text{----- (16)}$$

のように横桁の支点モーメントを求めることができる。

3. 数値計算

図-1の格子桁において $n=4, \lambda=1/4, \beta=10, \delta=10, \omega_2=1, \omega_1=0.3$ の場合について単位集中荷重を主桁の8等分点に作用させたときの $M_1^{(1)}, B_1^{(1)}, M_{21}^{(1)}$ を求めその結果を表-1,2に示す。また、図-3は主桁中央点の曲げモーメントの影響線を示したものである。

表-1, 荷重項 B および横桁の支点モーメント M の計算表

荷重点	1-0	1-1	1-2	1-3	1-4	2-0	2-1	2-2	2-3	2-4
B_2/a	-3.000	-2.625	-2.250	-1.875	-1.500	6.000	5.250	4.500	3.750	3.000
B_3/a	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-3.000	-2.625	-2.250	-1.875	-1.500
B_4/a	-7.500	-10.039	-11.875	-12.461	-11.875	15.000	20.078	23.750	24.922	23.750
B_5/a	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-7.500	-10.039	-11.875	-12.461	-11.875
B_6/a	-5.000	-8.672	-11.875	-14.141	-15.000	10.000	17.344	23.750	28.282	30.000
B_7/a	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-5.000	-8.672	-11.875	-14.141	-15.000
B_8/a	-2.500	-5.430	-8.125	-10.352	-11.875	5.000	10.860	16.250	20.704	23.750
B_9/a	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-2.500	-5.430	-8.125	-10.352	-11.875
B_{10}/a	0.0	-0.375	-0.750	-1.125	-1.500	0.0	0.750	1.500	2.250	3.000
B_{11}/a	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.375	-0.750	-1.125	-1.500
M_{12}/a	-0.1420	-0.0809	-0.0325	-0.0060	0.0043	0.2218	0.1187	0.0399	0.0022	-0.0079
M_{13}/a	-0.0623	-0.0430	-0.0251	-0.0099	0.0007	-0.0174	0.0052	0.0177	0.0137	0.0029
M_{14}/a	-0.1083	-0.1559	-0.1710	-0.1339	-0.0761	0.1330	0.2206	0.2503	0.1876	0.0929
M_{15}/a	-0.0837	-0.0912	-0.0918	-0.0801	-0.0593	0.0590	0.0266	0.0125	0.0264	0.0425
M_{16}/a	0.0144	-0.0269	-0.0761	-0.1325	-0.1610	-0.0264	0.0231	0.0929	0.1858	0.2354
M_{17}/a	0.0024	-0.0307	-0.0593	-0.0792	-0.0867	0.0095	0.0344	0.0425	0.0260	0.0123
M_{18}/a	0.0207	0.0090	-0.0074	-0.0335	-0.0761	-0.0217	-0.0118	0.0035	0.0325	0.0929
M_{19}/a	0.0198	0.0062	-0.0112	-0.0345	-0.0593	-0.0189	-0.0033	0.0151	0.0354	0.0425
M_{20}/a	0.0023	0.0044	0.0062	0.0071	0.0043	-0.0018	-0.0041	-0.0065	-0.0087	-0.0079
M_{21}/a	0.0027	0.0047	0.0060	0.0054	0.0007	-0.0032	-0.0050	-0.0057	-0.0037	0.0029

表-2, 格点力 V_r および主桁中央点の曲げモーメント M_{4cn}

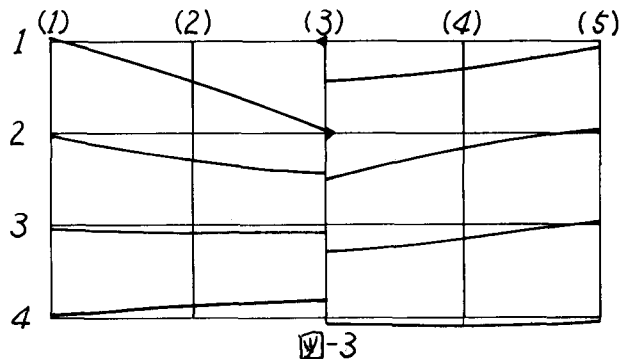
荷重点	1-0	1-1	1-2	1-3	1-4	2-0	2-1	2-2	2-3	2-4
$V_1^{(1)}$	-0.1420	-0.0809	-0.0325	-0.0060	0.0043	0.2218	0.1187	0.0399	0.0022	0.0079
$V_2^{(1)}$	0.2218	0.1187	0.0399	0.0022	-0.0079	-0.4610	-0.2321	-0.0621	0.0092	0.0187
$V_3^{(1)}$	-0.0174	0.0052	0.0177	0.0137	0.0029	0.2567	0.1082	0.0045	-0.0251	-0.0136
$V_4^{(1)}$	-0.0623	-0.0430	-0.0251	-0.0099	0.0007	-0.0174	0.0052	0.0177	0.0137	0.0029
$V_1^{(2)}$	-0.1083	-0.1559	-0.1710	-0.1339	-0.0761	0.1330	0.2206	0.2503	0.1876	0.0929
$V_2^{(2)}$	0.1330	0.2206	0.2503	0.1876	0.0929	-0.2070	-0.4146	-0.4880	-0.3488	-0.1432
$V_3^{(2)}$	0.0590	0.0266	0.0125	0.0264	0.0425	0.0150	0.1674	0.2252	0.1348	0.0078
$V_4^{(2)}$	-0.0837	-0.0912	-0.0918	-0.0801	-0.0593	0.0590	0.0266	0.0125	0.0264	0.0425
$V_1^{(3)}$	0.0144	-0.0269	-0.0761	-0.1325	-0.1610	-0.0264	0.0231	0.0929	0.1858	0.2354
$V_2^{(3)}$	-0.0264	0.0231	0.0929	0.1858	0.2354	0.0623	-0.0118	-0.1432	-0.3456	-0.4584
$V_3^{(3)}$	0.0095	0.0344	0.0425	0.0260	0.0123	-0.0454	-0.0457	0.0078	0.1338	0.2107
$V_4^{(3)}$	0.0024	-0.0307	-0.0593	-0.0792	-0.0867	0.0095	0.0344	0.0425	0.0260	0.0123
$V_1^{(4)}$	0.0207	0.0090	-0.0074	-0.0335	-0.0761	-0.0217	-0.0118	0.0035	0.0325	0.0929
$V_2^{(4)}$	-0.0217	-0.0118	0.0035	0.0325	0.0929	0.0244	0.0204	0.0081	-0.0295	-0.1432
$V_3^{(4)}$	-0.0189	-0.0033	0.0151	0.0354	0.0425	0.0162	-0.0052	-0.0267	-0.0384	0.0078
$V_4^{(4)}$	0.0198	0.0062	-0.0112	-0.0345	-0.0593	-0.0189	-0.0033	0.0151	0.0354	0.0425
$V_1^{(5)}$	0.0023	0.0044	0.0062	0.0071	0.0043	-0.0018	-0.0041	-0.0065	-0.0087	-0.0079
$V_2^{(5)}$	-0.0018	-0.0041	-0.0065	-0.0087	-0.0079	0.0005	0.0031	0.0073	0.0137	0.0187
$V_3^{(5)}$	-0.0032	-0.0050	-0.0057	-0.0037	0.0029	0.0045	0.0060	0.0049	-0.0013	-0.0136
$V_4^{(5)}$	0.0027	0.0047	0.0060	0.0054	0.0007	-0.0032	-0.0050	-0.0057	-0.0037	0.0029
$M_{4cn}^{(1)}$	-0.0073	0.0374	0.0837	0.1335	0.1907	0.0073	0.0319	0.0549	0.0740	0.0821
	(0.0)	(0.0417)	(0.0854)	(0.1336)	(0.1902)	(0.0)	(0.0277)	(0.0533)	(0.0738)	(0.0824)
$M_{4cn}^{(2)}$	0.0073	0.0319	0.0549	0.0740	0.0821	-0.0073	0.0103	0.0292	0.0538	0.0996
	(0.0)	(0.0277)	(0.0533)	(0.0738)	(0.0824)	(0.0)	(0.0145)	(0.0309)	(0.0539)	(0.0992)
$M_{4cn}^{(3)}$	0.0074	0.0115	0.0141	0.0142	0.0137	-0.0075	0.0088	0.0268	0.0455	0.0546
	(0.0)	(0.0073)	(0.0124)	(0.0141)	(0.0141)	(0.0)	(0.0131)	(0.0285)	(0.0456)	(0.0543)
$M_{4cn}^{(4)}$	-0.0074	-0.0183	-0.0277	-0.0341	-0.0365	0.0074	0.0115	0.0141	0.0142	0.0137
	(0.0)	(-0.0141)	(-0.0260)	(-0.0340)	(-0.0369)	(0.0)	(0.0073)	(0.0124)	(0.0141)	(0.0141)

() は参考まで剛支承上格子桁の値を示した。

4. あとがき

n 本の主桁からなるバネ支承上単純格子桁の解を比較的簡単な式で示した。式中 $\delta=0$ とおけば剛支承上格子桁の解を与えることになる。

なお数値計算は北海道工業大学土木工学科所有のIBM-1130により行ったものである。



参考文献

- 1) 道路橋支承便覧, 日本道路協会 1973-4
- 2) 猪又, 猪口 ; 5連モーメント法による格子桁の解法, 土木学会北海道支部論文報告集第34号

1978-2