

走行荷重が作用したはりの仮想仕事による解法

北大 工学部 正員 能町純雄
 北大 工学部 正員 角田与史雄
 北大 工学部 学生員 ○須藤典助

1 まえがき

走行荷重が作用するはりの解析において、動的たわみを静的たわみに倍率関数(時間のみ関数)を乗じたものと仮定し、仮想仕事の原理を適用することにより解く方法が良い近似解を与えることがわかった。また、本解析法は、振動形解析法にくらべて計算のプログラム化が簡単である。このため、荷重の慣性力などいろいろな要素を考慮したい場合や、2次以上の高次のモードがきいてくるような振動問題に対して特に有用であると考えられる(文献1)。本文は、この手法により、はりに走行荷重が作用する場合、はりのスパン長、荷重の走行速度、重量、減衰力などの変化がはりの動的応答にどのような影響を与えるかについて、特にはりの動的たわみに着目して理論的に検討したものである。

2. 解析方法

図-1のような1自由度モデルの走行荷重がはりに作用する場合を例にとり解析を行なう。

はりの動的たわみを $y(x,t)$ 、走行荷重のたわみを $y_0(t)$ とおくと、ある時刻 t において、はり上の点 x に作用する換算外力強度 $g(x,t)$ は次のようになる。

$$g(x,t) = \left\{ K(y_0 - y) + C \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\}_{x=vt} - PA \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{--- (1)}$$

また、バネ上荷重 W の運動方程式は、次のようになる。

$$W \left(1 - \frac{1}{8} \frac{\partial^2 y_0}{\partial t^2} \right) = \left\{ K(y_0 - y) + C \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\}_{x=vt} \quad \text{--- (2)}$$

ここで、 PA : はりの単位長さ当りの質量

K : 走行荷重のバネ定数

C : の減衰係数

W : のバネ上荷重重量

v : の走行速度

また、バネ下荷重重量はバネ上荷重に比して無視できるものとする。

いま、図-2のように、 $x=a$ に単位荷重が作用した仮定の系を考える。単位荷重によるたわみを $\bar{y}_{0a}(x)$ とおくと次の関係がある。

$$EI \frac{d^4 \bar{y}_{0a}}{dx^4} = 1 \times \delta(x-a) \quad \text{--- (3)}$$

$\delta(x-a)$ は、Diracsche のデルタ関数で次のような性質をもつものである。

$$\left. \begin{aligned} x=a \text{ で } \delta(x-a) = \infty, \quad x \neq a \text{ で } \delta(x-a) = 0 \\ \int_0^l \delta(x-a) dx = 1 \\ \int_0^l f(x,t) \delta(x-a) dx = f(a,t) \end{aligned} \right\} \quad \text{--- (4)}$$

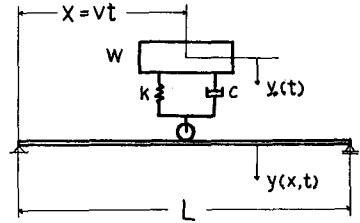


図-1

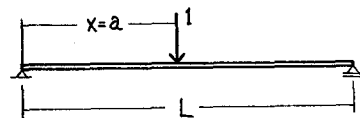


図-2

ここで、実際の系(図-1)から外力 $g(x,t)$ と内力 σ を、仮想の系(図-2)から仮想たわみ $\bar{y}_{sa}(x)$ と仮想ひずみ $\bar{\epsilon}$ をとり、仮想仕事の原理を適用すると次のようになる。

$$\int_0^l g(x,t) \bar{y}_{sa}(x) dx = \int_0^l \int_A \sigma \bar{\epsilon} dA dx \quad \text{-----}(5)$$

(5)式の右辺に、 $\sigma = \frac{M}{I} z$ 、 $\bar{\epsilon} = \frac{M}{EI} z$ (z ははりの中立軸からの距離)を代入すると、

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \int_0^l \int_A \frac{MM}{EI^2} z^2 dA dx = \int_0^l \frac{MM}{EI^2} dx \int_A z^2 dA = \int_0^l \frac{MM}{EI} dx = EI \int_0^l \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \cdot \frac{d^2 \bar{y}_{sa}}{dx^2} dx \\ &= EI \left[\frac{\partial y}{\partial x} \cdot \frac{d^2 \bar{y}_{sa}}{dx^2} \right]_0^l - EI \left[y \cdot \frac{\partial^3 \bar{y}_{sa}}{\partial x^3} \right]_0^l + EI \int_0^l y \cdot \frac{d^4 \bar{y}_{sa}}{dx^4} dx \end{aligned}$$

境界条件 $x=0, l$ において $\frac{d^3 \bar{y}_{sa}}{dx^3} = 0$ 、 $y=0$ より第1項、第2項はゼロとなり、第3項に(4)式の関係を代入すると次のようになる。

$$\text{右辺} = \int_0^l y \cdot EI \frac{d^4 \bar{y}_{sa}}{dx^4} dx = \int_0^l y(x,t) \delta(x-a) dx = y(a,t) \quad \text{-----}(6)$$

よって、(1)(5)(6)式より

$$\int_0^l \left[\left\{ K(y_0 - y) + C \left(\frac{dy_0}{dt} - \frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\}_{x=vt} - PA \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right] \cdot \bar{y}_{sa}(x) dx = y(a,t) \quad \text{-----}(7)$$

$y(x,t)$ は、(2)式の2階2元連立微分方程式を解くことにより求められる。ここで、動的たわみ曲線 $y(x,t)$ を $x=vt$ 点に単位荷重が作用したときの静的たわみ曲線 $\bar{y}_s(x,vt)$ に倍率関数 $f(t)$ を乗じたものと仮定する。そして、 $\bar{y}_s(x,vt)$ を級数表示すると

$$y(x,t) = f(t) \cdot \bar{y}_s(x,vt) = f(t) \frac{2}{l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi vt}{l} \sin \frac{m\pi x}{l}}{EI \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} \quad \text{-----}(8)$$

(8)式を(7)式に代入して、 $f(t)$ について整理すると

$$\begin{aligned} & \left[\frac{PA}{EI} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^8} \right] f''(t) + \left[\frac{2vPA}{EI} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \cos \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^7} + \frac{2C}{lEI} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} \sum_m \frac{\sin^2 \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} \right] f'(t) \\ & + \left[\sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} - \frac{v^2 PA}{EI} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^6} + \frac{2K}{lEI} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} \sum_m \frac{\sin^2 \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} + \frac{2vC}{lEI} \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} \right. \\ & \left. \times \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi vt}{l} \cos \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^3} \right] f(t) = (Ky_0 + C \frac{dy_0}{dt}) \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi a}{l} \sin \frac{m\pi vt}{l}}{\left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} \quad \text{-----}(9) \end{aligned}$$

$f''(t), f'(t), f(t)$ の係数はそれぞれ時間 t に関する級数係数であるが、これらはすべて閉じた式にすることができ、本文では、(9)式の計算を初期条件 $t=0$ で $f(t)=0, f'(t)=0$ として、差分法により解くことにする。

(2)式を整理し、 $n^2 = gK/w$ 、 $\rho_0 = C/2\sqrt{gK}$ (減衰定数)、 $n' = n\sqrt{1-\rho_0^2}$ とおくと、

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} + 2\rho_0 n \frac{dy_0}{dt} + n^2 y_0 = g + n^2 y_i + 2\rho_0 n \frac{dy_i}{dt} \quad \text{-----}(2')$$

ここで、 i は $x=vt$ 点を表す。(2')式はデュアメル積分によって表すことができ、初期条件 $t=0$ で $y_0=0, \frac{dy_0}{dt}=0$ とすれば次のようになる。

$$y_0(t) = \frac{1}{n'} \int_0^t (g + n^2 y_i + 2\rho_0 n \frac{dy_i}{dt}) e^{-\rho_0 n(t-\tau)} \sin n'(t-\tau) d\tau \quad \text{-----}(10)$$

3 計算結果と考察

計算例のはりの断面諸元は、建設省土木研究所設計合成桁橋標準設計書の値を引用したものである。走行速度は、はりの1次振動に共振する速度を $v_R=1.0$ とする。 $v_R=1.0$ における速度は超高速となり実際上ありえない

速度であり、動的たわみは $v_R=0.5$ 付近で最大となる場合が多いので v_R は0.5以内で変化させた。

図-3は、スパン長50m、総重量136ton、 $EI=42.20 \times 10^2 \text{ kg}\cdot\text{cm}^2$ 、1次固有振動数2.45cps なるはり上を、 $W=27.2\text{ton}$ (はり重量の0.21倍)、 $f=4.0\text{cps}$ 、 $\rho=0.0$ なる走行荷重が作用する場合のスパンセンターの影響線で、横軸にスパン方向、縦軸に動的たわみの静的最大たわみに対する比をとったものである。速度が速くなるにつれて、はりと荷重の振動が重ね合わさって非常に複雑な応答となる。また速度がこれ以上高速になると影響線もなめらかになり応答も小さくなる。これは、はりのたわみが大きくなる前に荷重がはり上を走行し終わるためである。

表-1は、減衰定数の変化に対する動的たわみの変化を示したもので、表中の数値は、それぞれの減衰定数における動的たわみの最大値の $\rho=0.00$ の場合の動的最大たわみに対する比である。表より、走行速度がおそい場合に減衰の割合が大きく、特に減衰定数の小さい範囲($\rho=0.00 \sim 0.04$)での減衰効果が著しいことがわかる。そして、減衰定数がさらに大きくなっても、あまり減衰効果はあらわれない。これに対し走行速度が速くなると、減衰定数の増加によるたわみの減少率は直線的に変化し、その値も低速時に比べて小さくなる。

図-4は、はりの支間長を変化させた場合の動的たわみの最大値をプロットしたものである。それぞれの支間長に対する断面諸元は、表-2のとうりである。走行荷重の固有振動数は3.0であり、減衰定数は0.03を用いた。図においてたて軸は動的たわみの最大値のその支間長における静的最大たわみに対する比である。速度パラメータ v_R は $l=50\text{m}$ の橋に対する値を用いている。図より一部例外はあるが、同一速度の走行荷重による動的たわみ比は、スパン長の大きけたほど小さくなる傾向があることがわかる。

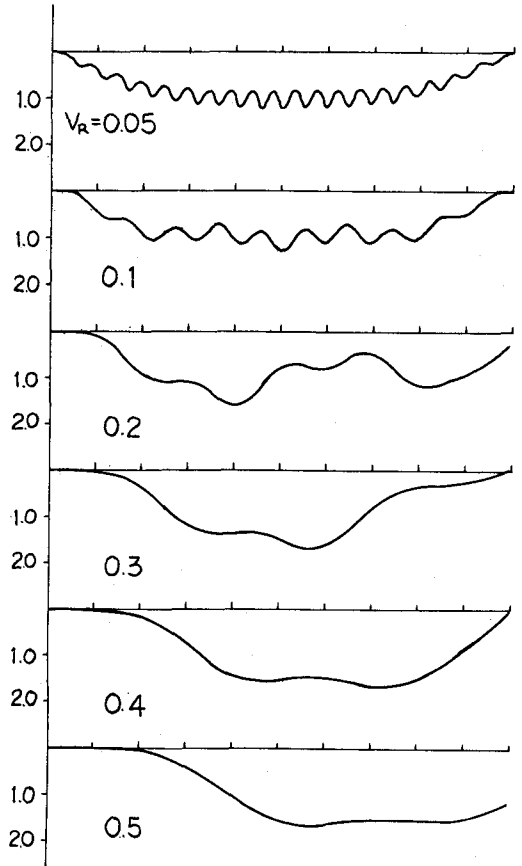


図-3

$v_R \backslash \rho$	0.00	0.02	0.04	0.06	0.08	0.10
0.05	1.000	0.881	0.829	0.828	0.819	0.813
0.1	1.000	0.931	0.883	0.852	0.830	0.815
0.2	1.000	0.981	0.965	0.950	0.938	0.932
0.3	1.000	0.982	0.966	0.953	0.940	0.928
0.4	1.000	0.981	0.962	0.947	0.939	0.927

表-1

スパン長 (m)	総重量 (ton)	曲げ剛性 $\times 10^2$ (kg \cdot m)	1次固有振動数 (cps)
20	48.4	6.21	6.23
30	77.6	12.42	3.79
40	106.8	24.41	2.94
50	136.0	42.20	2.45
60	165.2	65.78	2.11

表-2

図-5は、走行荷重のバネ上荷重重量を変化させた場合で、バネ定数は一定で減衰定数は0とした。たて軸はその荷重での動的最大たわみの静的最大たわみに対する比である。バネ定数は一定に保ってあるので荷重の増加とともに荷重の振動数は減少する。図より、荷重の増加とともに動的たわみ比は増加するのかわかる。これは、荷重が増加するにつれて、その慣性力が増加するためと考えられる。

また全計算例を通して、 $V_R = 0.5$ までの範囲では、はりの最大たわみは、はりと荷重の諸元が同一であれば、走行速度が大きくなるほど大きくなる傾向があることがわかる。

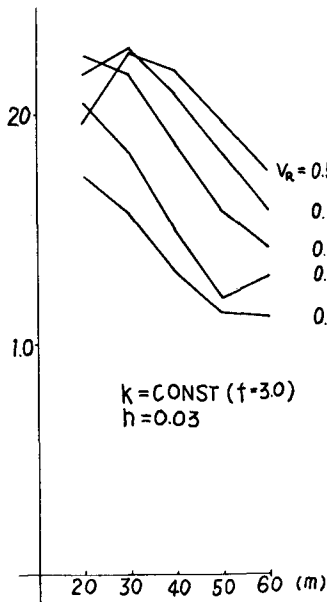


図-4

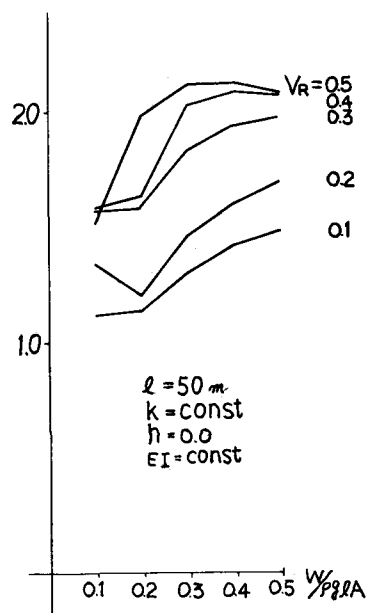


図-5

参考文献

- 1) 能町・須藤 : 「バネを有する走行荷重が作用したはりの仮想仕事による解法」
32 回年次学術講演会講演概要集
- 2) 山田・小堀 : 「活荷重に対する道路橋の動的応答」
土木学会論文集 NO 148 (昭 42)
- 3) 小坪 : 「土木振動学」 森北出版