

内部に軸方向・鉄筋を有する長方形断面
コークリート梁の波動分散特性について

北工大工学部 正量 能町純雄
土木工学研究所 同 杉田修一
北見工業大学 同 大島俊之

1. まえがき

著者は先に有限要素法・関係式を Galerkin 法により誘導し、内部に等間隔、軸方向に配列された繊維補強材を有する弾性体を対象に静的三次元応力解析を行なった¹⁾。今回上記有限要素法・関係式を動的波動問題について求め、長方形断面コークリート梁に鉄筋が配置されている構造について、位相速度分散曲線、軸方向変位モードを描いて、鉄筋の波動分散曲線に及ぼす効果などを調べた。また、波動のエネルギー・伝播速度とわける群速度についても考察した。

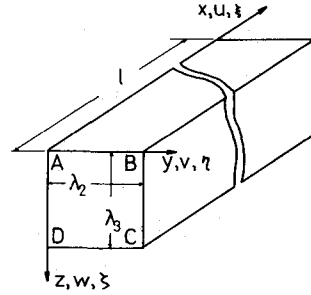


図1 7°リス4要素

二種の波動の研究はこれまでに多くなされてきた。補強材のない長方形断面梁に関しては L. Rayleigh²⁾, S. P. Timoshenko³⁾, E. Volterra⁴⁾, R. D. Mindlin⁵⁾, O. L. Engström⁶⁾ などの研究があげられる。また、平板構造としても井口⁷⁾ などの研究がある。⁸⁾

2. 7°リス4要素の動的関係式^{1), 9)}

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{--- (1)}$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad \text{--- (2)}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad \text{--- (3)}$$

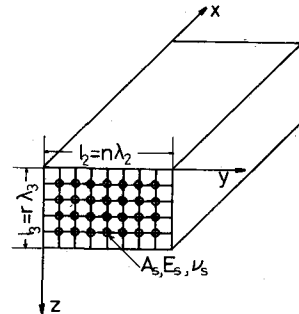


図2 補強材を有する
コークリートはり

ここで ρ = 密度。二つの動的フーリエ式を三次元弾性論に与える応力と変位の関係式を代入し、それを $f^u(\eta), f^u(\zeta), f^u(1-\eta), f^u(\zeta), f^u(1-\eta), f^u(1-\zeta), f^u(\eta), f^u(1-\zeta), f^u(1-\eta), f^u(1-\zeta)$ を乗じて、 η, ζ 方向に定積分を行なうと、Galerkin 法により、A, B, C, D 各稜線 η 方向・力 T, Y, Z と各稜線の変位 u, v, w の動的関係式が得られる。ここで、 $f^u(\alpha) = 1 - \alpha, f^u(1-\alpha) = \alpha, \alpha = \eta/\lambda_2$ 又は ζ/λ_3 。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_A & u_B & u_C & u_D \\ v_A & v_B & v_C & v_D \\ w_A & w_B & w_C & w_D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^u(\eta) \cdot f^u(\zeta) \\ f^u(1-\eta) \cdot f^u(\zeta) \\ f^u(1-\eta) \cdot f^u(1-\zeta) \\ f^u(\eta) \cdot f^u(1-\zeta) \end{bmatrix} \quad \text{--- (4)}$$

また、変位は次のようにする。x 方向の進行波を仮定する。

$$u = U \cos \frac{2\pi}{l} (x - ct), \quad v = V \sin \frac{2\pi}{l} (x - ct), \quad w = W \sin \frac{2\pi}{l} (x - ct) \quad \text{--- (5)}$$

FEAL, C = 位相速度, λ = 波長, u, v, w は それぞれ u, v, w の振幅を表す。

3. 動的基形式の誘導と固有方程式¹⁾

以上の7パラメータ要素に関する動的関係式を用いて、図2に示すような構造について、内部自由線に
会する各種の力つり合い条件から、動的基形式の連立微分方程式の形を求めらる。この際
軸方向補強材を被膜に集中する断面積と L_2 の力つり合いの中に組み入れてみる。

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ & L_{22} & L_{23} \\ \text{sym.} & & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_j [U_{y2}] \\ R_j [V_{y2}] \\ S_j [W_{y2}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} & N_{15} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} & N_{25} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & N_{34} & N_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{00} \\ S_j [U_{y0}] \\ S_k [U_{02}] \\ R_j [V_{y0}] \\ R_k [W_{02}] \end{bmatrix} \quad (6)$$

FEAL

$$L_{11} = (1 - \frac{C_p^2}{C_s^2}) \lambda \lambda_3 \bar{D}_j \bar{D}_k (\frac{2\pi}{\lambda})^2 + \frac{C_s^2}{C_p^2} \{ \frac{\lambda_3}{\lambda_2} D_j \bar{D}_k + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} D_k \bar{D}_j \} + 2(1 + \nu_s) \frac{C_r^2}{C_p^2} A_s (\frac{2\pi}{\lambda})^2$$

$$L_{22} = (1 - \frac{C_p^2}{C_s^2}) \lambda \lambda_3 \bar{D}_j \bar{D}_j (\frac{2\pi}{\lambda})^2 + \frac{C_s^2}{C_p^2} \frac{\lambda_3}{\lambda_2} D_j \bar{D}_k + \frac{\lambda_2}{\lambda_3} D_k \bar{D}_j, \quad L_{12} = (1 - \frac{C_p^2}{C_s^2}) \lambda_3 \sin \frac{\pi}{n} \bar{D}_k (\frac{2\pi}{\lambda})$$

$$L_{23} = (\frac{C_p^2}{C_s^2} - 1) \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{r}, \quad N_{11} = \frac{1}{6} \frac{C_s^2}{C_p^2} (\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}) - (1 - \frac{C_p^2}{C_s^2}) \frac{\lambda \lambda_3}{36} (\frac{2\pi}{\lambda})^2 a b \sin \frac{\pi}{n} \sin \frac{k\pi}{r}$$

$$N_{14} = \frac{1}{6} \{ (\frac{C_s^2}{C_p^2} - 1) \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{k\pi}{r}) - \frac{C_p^2}{C_s^2} + 2 \} \sin \frac{k\pi}{r} a b (\frac{2\pi}{\lambda}) = \frac{1}{6} b (\frac{2\pi}{\lambda}) N_{25}$$

$$N_{12} = \frac{1}{6} \frac{C_s^2}{C_p^2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} + (\frac{C_p^2}{C_s^2} - 1) \frac{\lambda \lambda_3}{36} (6 - D_j) (\frac{2\pi}{\lambda})^2 - \frac{1}{6} \frac{C_s^2}{C_p^2} (\frac{\lambda_2}{\lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_2}) D_j \sin \frac{k\pi}{r} b$$

$$N_{14} = N_{22} = -(\frac{C_p^2}{C_s^2} - 1) \frac{1}{6} \sin \frac{k\pi}{r} \sin \frac{\pi}{n} b (\frac{2\pi}{\lambda}), \quad N_{23} = \frac{1}{6} (\frac{C_p^2}{C_s^2} - 1) \frac{1}{2} (1 + \cos \frac{\pi}{n}) - \frac{C_p^2}{C_s^2} + 2 \{ \lambda_3 \bar{D}_k a (\frac{2\pi}{\lambda})$$

$$N_{24} = \frac{1}{6} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} \bar{D}_j - (1 - \frac{C_p^2}{C_s^2}) \frac{\lambda \lambda_3}{36} \bar{D}_j (\frac{2\pi}{\lambda})^2 - \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{\lambda_2}{\lambda_3} D_j \sin \frac{k\pi}{r} b, \quad \text{FEAL } L_{13}, L_{23}, N_{31}, N_{13}, N_{32}, N_{25}$$

N_{34} は それぞれ $L_{12}, L_{22}, N_{21}, N_{22}, N_{14}, N_{23}, N_{25}$ に λ_2, j, n, a を λ_3, k, r, b に置き
かえることにより得られる。FEAL $C_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $C_s = \sqrt{\mu/\rho}$, M_s, ν_s = 補強材
の縦断弾性係数, ポアソン比, λ_2, λ_3 = それぞれ y, z 方向の7パラメータ要素の幅, 厚さ, A_s = 補強材
の断面積, $a = 1 \pm (-1)^j$, $b = 1 \pm (-1)^k$, $D_j = 2(1 - \cos \frac{\pi j}{n})$, $D_k = 2(1 - \cos \frac{k\pi}{r})$, $\bar{D}_j = 1 - \frac{D_j}{6}$,
 $\bar{D}_k = 1 - \frac{D_k}{6}$, λ, μ = Lamé 定数, $C_r = \sqrt{M_s/\rho}$ 。 $N_{15} = N_{33}$ 。

以上のよう、動的基形式で y, z の断面2方向に離散型7パラメータ変換がある。7パラメータ
分散変換¹⁰⁾を行って整理すると、変位像函数が境界値に $y=0$ で表現される。

$$\text{FEAL } S_j [f(y)] = \sum_{j=1}^{n-1} f(y) \sin \frac{j\pi y}{n}, \quad R_j [f(y)] = \sum_{j=1}^{n-1} f(y) \cos \frac{j\pi y}{n} + \frac{1}{2} f(n)(-1)^j + \frac{1}{2} f(0)$$

FEAL $j=0, n$ のとき, R_j は $\frac{1}{2}$ を乗ずる。

(固有方程式) 内部に離散補強材を有する長方形断面の梁の境界条件は、2つの解法
の場合、上下左右自由面その他、隔矢の条件がある。これらの境界条件を満足する位相速
度を各被膜ごとに計算することにより、分散曲線を描くことができる。

$$K_B U_B = 0, \quad U_B \neq 0 \text{ のとき } |K_B| = 0 \quad (7)$$

FEAL, K_B = 境界条件式の係数, U_B = 境界変位

FEAL 位相速度が求まるので、 y, z の2方向に定分散変換を行って $y=0$ 変換モード
を求まることとなる。

$$f(y) = \frac{2}{n} \sum_{j=1}^{n-1} S_j [f(y)] \sin \frac{j\pi y}{n}, \quad f(y) = \frac{2}{n} \sum_{j=0}^{n-1} R_j [f(y)] \cos \frac{j\pi y}{n}$$

4. 数値計算例

図3の構造に於て、鉄筋が無い場合 ($A_s = 0$) と フリス4号素断面種 $a/10$ の断面種を有する鉄筋が入っている場合 ($A_s = A_p/10$) に於て、位相速度分散曲線と軸方向変位モードを比較した。

$$B = H = 15 \text{ cm}, E_c = 2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2, \rho = \gamma/g, \\ \gamma = 2.4 \text{ t/m}^3, \nu_c = 0.18, \nu_p = c_p/c_s = 1.601 \\ c_p = 3.051 \text{ km/sec}, c_s = 1.906 \text{ km/sec}, \\ E_s = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \nu_s = 0.3 \\ \alpha = B/L, \nu_E = c/c_s \text{ (比速度)}.$$

数値計算には反復法を用い、零判定基準を 10^{-9} にして、固有方程式を計算した。根の傍に Det. α 値が不連続的に発散する α の値、根の行数は有効数字4桁以上 α 値として得られた。

また鉄筋が無い場合の計算結果は E. Volterra の式に於ける結果と一致した。

軸方向変位モードは隔矢の変位を1として求めて α の値、値 α の大小関係はなく、変位 α 断面内の分布傾向を比較のために同一の図に示した。モードは一次についてのみ求めた。

(1) 軸回り曲げ振動

図4から補強材の効果は一次モードで、 α が 0.5 以下に於ける比速度 ν_E が多少大きく出てくる。それ以上 α の値は2次、3次モードに於てはあまり影響があらわれない。

軸方向変位モードは分散曲線の傾向を見て $\alpha = 0.5$ と 2.5 の場合の2種類について求めた。図7、図8から鉄筋の影響による傾向の変化を見ることもできる。

(2) ねじり振動

図5から一次モードについては $\alpha = 2$ あたりから St. Venant の理論より近くなり、Rayleigh 波速度に近づいていくことがわかる。また3次のモードに補強材の効果はあらわれない。

また図9、図10より $\alpha = 1$ と $\alpha = 5$ の場合について、軸方向変位の一次モードにおける鉄筋の影響を見ることもできる。

(3) 縦振動

図6から縦振動の位相速度分散曲線における一次モードは鉄筋が無い場合

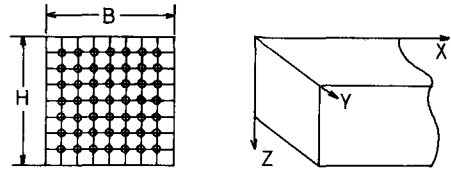


図3 コーリットはり

Table of Wave Pattern

Wave Pattern	Displacement	With respect to Y axis	With respect to Z axis
Bending Wave in the Z Direction	V	sym.	anti-sym.
	W	sym.	anti-sym.
Bending Wave in the Y Direction	V	anti-sym.	sym.
	W	anti-sym.	sym.
Torsional Wave	V	anti-sym.	anti-sym.
	W	anti-sym.	anti-sym.
Longitudinal Wave	V	sym.	sym.
	W	sym.	sym.

表1 波動パターン

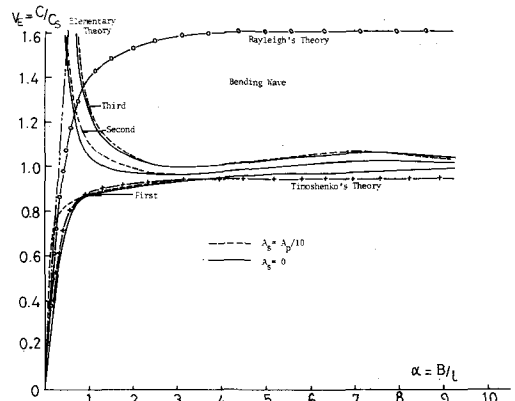


図4 曲げ振動の位相速度分散曲線

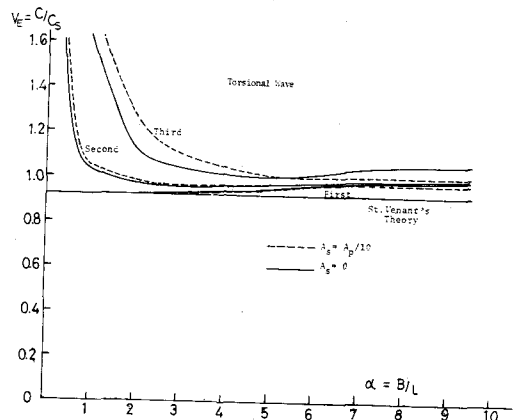


図5 ねじり振動の位相速度分散曲線

$V_E = 1.6$ (梁の縦波速度) から $\alpha = 2.0$ の極値をとり、徐々には上昇して Rayleigh 波速度に近づくが、補強材が加わった場合、 λ (波長) = 10 の $V_E = 4.5$ となり、分散曲線もかなり変化する傾向となり、2次、3次のモードもかなり鉛筋の影響が小さくなる。

2次場合の軸方向変位モードは示していないが、やはり補強材の影響が見られる。

5. 群速度

波動のエネルギーの伝播速度が物理的意味を持つ群速度 C_g は $C_g = C - \lambda \frac{dC}{d\lambda}$ により、次のようにある位相速度、波長を代入して位相速度と同様に $\frac{dC}{d\lambda}$ を反復法により計算する値により求めることができる。即ち (6) 式に与える係数4次のようになる。

$$L_{11} = \lambda_2 \lambda_3 \bar{D}_k \bar{D}_k \left\{ -2 \frac{C}{C^3} \left(\frac{dC}{d\lambda} \right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - \left(1 - \frac{C^2}{C^3} \right) 4 \frac{\pi^2}{\lambda^3} \right\} + 2 \left(1 + \frac{1}{C} \right) \frac{C^2}{C^3} A_5 \left(-4 \frac{\pi^2}{\lambda^3} \right)$$

$$L_{12} = \left(1 - \frac{C^2}{C^3} \right) \lambda_3 \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} \bar{D}_k \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \right)$$

$$L_{22} = \lambda_2 \lambda_3 \bar{D}_k \bar{D}_k \left\{ -2 \frac{C}{C^3} \left(\frac{dC}{d\lambda} \right) + \left(1 - \frac{C^2}{C^3} \right) \left(-4 \frac{\pi^2}{\lambda^3} \right) \right\} = L_{33}$$

$$L_{23} = L_{32} = 0,$$

$$N_{11} = -\frac{\lambda \lambda_3}{36} \left\{ -2 \frac{C}{C^3} \left(\frac{dC}{d\lambda} \right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 - 4 \frac{\pi^2}{\lambda^3} \left(1 - \frac{C^2}{C^3} \right) \right\}$$

$$\times \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} a b.$$

$$N_{21} = \frac{\lambda_3}{6} \left\{ \left(\frac{C^2}{C^3} - 1 \right) \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \eta}{\lambda} \right) + 2 - \frac{C^2}{C^3} \right\} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} a b \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \right) = \frac{\lambda_3}{6} b \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \right) N_{25}$$

$$N_{12} = \frac{\lambda \lambda_3}{6} \bar{D}_k \left\{ 2 \frac{C}{C^3} \left(\frac{dC}{d\lambda} \right) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 + 4 \frac{\pi^2}{\lambda^3} \left(1 - \frac{C^2}{C^3} \right) \right\} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} b$$

$$N_{14} = - \left(1 - \frac{C^2}{C^3} \right) \frac{\lambda_3}{6} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} b \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \right) = N_{22}$$

$$N_{33} = - \left(\frac{C^2}{C^3} - 1 \right) \frac{\lambda_3}{6} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} a \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \right) = N_{15}$$

$$N_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{C^2}{C^3} - 1 \right) \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi \eta}{\lambda} \right) + 2 - \frac{C^2}{C^3} \left\{ \lambda_3 \bar{D}_k a \left(-\frac{2\pi}{\lambda^2} \right) \right\}$$

$$N_{24} = + \frac{\lambda \lambda_3}{6} \bar{D}_k \left\{ 2 \frac{C}{C^3} \left(\frac{dC}{d\lambda} \right) + \left(1 - \frac{C^2}{C^3} \right) \left(4 \frac{\pi^2}{\lambda^3} \right) \right\} \sin \frac{\pi \eta}{\lambda} b$$

$$\text{また } L_{13}, L_{33}, N_{31}, N_{13}, N_{15}, N_{32}, N_{35}, N_{34} \text{ は}$$

それぞれ $L_{12}, L_{22}, N_{21}, N_{12}, N_{14}, N_{23}, N_{24}, N_{25}$ に $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, k, \eta, a, b$ の置きかえを $\lambda_1 = \lambda_2$ として境界条件式に代入して求められる。

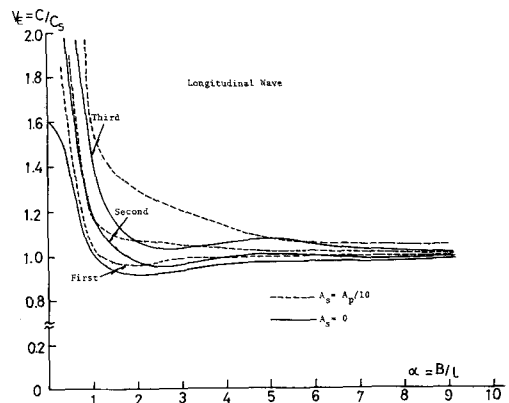


図6 縦波の位相速度分散曲線

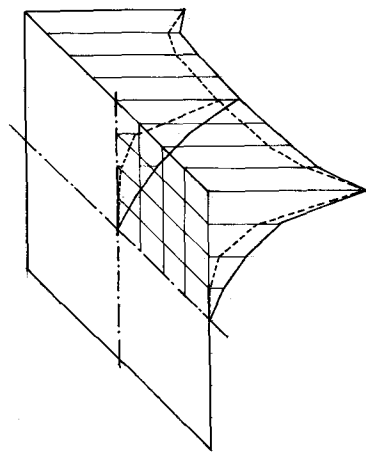


図7 曲中波動の一次モード ($\alpha = 0.5$ の場合)
(実線 $A_5 = 0$, 破線 $A_5 = A_p/10$)

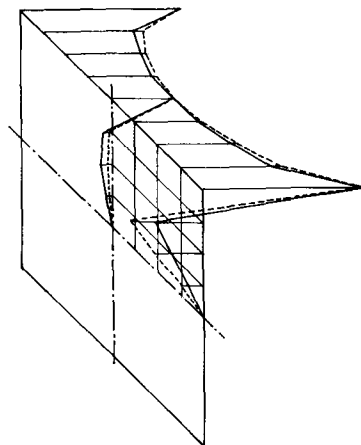


図8 曲中波動の二次モード ($\alpha = 2.5$ の場合)
(実線 $A_5 = 0$, 破線 $A_5 = A_p/10$)

6. 及び 7. である。

以上、内部に規則的に軸方向補強工の鉄筋コンクリート長方形断面梁の位相速度分散については理論式と数値計算結果とを報告した。

また本論文の応用としては、平板構造における他の境界条件への応用、不均一弾性体、サドイ干構造への応用、非補強材の偏心に与えられる構造の応答を考慮した場合、この場合は積分変換を用いること、差分式を直接解くこととなる。

参考文献

- 1) S. G. Nomachi, T. Okshima; On the Stress Analysis of the Beams with Rectangular Cross Section by Means of Finite Prism Method, Proc. of 24th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1974.
- 2) L. Rayleigh; The Theory of Sound, New York, Vol. I, Chapter VIII.
- 3) S. P. Timoshenko; On the Correction for Shear of the Differential Equation for Transverse Vibration of Prismatic Bars, Philos. Mag. 23 (1942) p. 744.
- 4) E. Volterra; A One-dimensional Theory of Wave Propagation in Elastic Rods Based on the Method of Internal Constraints, Ingenieur-Archiv, 1955, Bd 23, p. 410.
- 5) R. D. Mindlin; Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, Journal of Applied Mechanics, p. 31, March, 1951.
- 6) O. L. Engström; Dispersion of Torsional Waves in Uniform Elastic Rods, Journal of Applied Mechanics, 1974, Dec. p. 1041.
- 7) 井口康象; 相対2辺の単純支持他2辺が自由なる矩形板の振動に就て, 土木学会論説報告 第26巻, 第4号, p. 427, 1940.
- 8) Ewing, Jardetsky, Press; Elastic Wave in Layered Media, McGraw-Hill (1957)
- 9) 能町大島; 内部に軸方向の補強材を有する梁の波動分散曲線について, 第26回応用力学連合講演会講演集, 1976.
- 10) S. G. Nomachi, K. G. Matsuoka; Applications of Finite Fourier Integration Transforms for Structural Mechanics, Proc. of the 20th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1970.
- 11) 能町, 角田, 岸; 薄肉H形断面梁の弾性波の位相速度について, 土木学会論文報告集 第244号, 1975.
- 12) K. G. Matsuoka, S. G. Nomachi; On Stress Wave of a Cylinder Embedded in an Elastic Medium, Proc. of the 24th Japan National Congress for Applied Mechanics, 1974.

なお、本論文の数値計算は、NEC大型計算機センターのFACOM 230-75と東大大型計算機センターのHITAC 8800/8700を用いて行った。ここに記して謝意を表す。

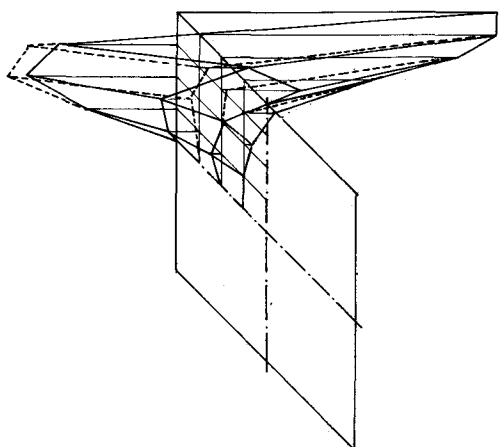


図9. ねじり波動の一次モード
 $(\alpha = 1 \text{ の場合})$
 (実線 $A_s = 0$, 破線 $A_s = A_p/10$)

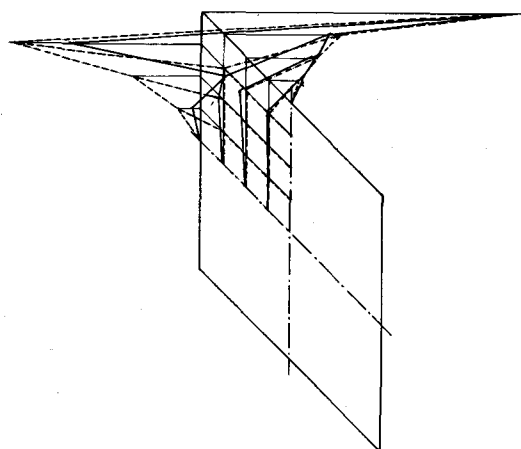


図10. ねじり波動の二次モード
 $(\alpha = 5 \text{ の場合})$
 (実線 $A_s = 0$, 破線 $A_s = A_p/10$)