

鉄筋コンクリート版の曲げに関する一考察

北海道大学 正員 ○堀 孝司

〃 〃 能町 純雄

〃 〃 角田 史雄

1. まえがき

コンクリート構造物の設計には、ひびわれ発生前の弾性状態、ひびわれ発生後の状態、塑性変形を伴う極限状態の各種の状態を想定してその使用性や安全性の検討が行われるが、それらの中において弾性解析のもつ意義は非常に大きい。鉄筋コンクリート版(以下、RC版と略記)の弾性解析においては、最も簡単には鉄筋の存在を無視した等方性版として、またより正確には、直交する二方向の鉄筋量が異なる場合、これを等価の剛性をもつ直交異方性版として取り扱われるのが一般的である。後者として通常用いられている方法は、Huberの一連の研究⁽²⁾⁽⁴⁾をもとに部分的修正を加えた Timoshenko の方法⁽⁶⁾であり、良く知られた次式を基礎偏微分方程式としている。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\sqrt{D_x D_y} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = P \quad (1)$$

ここに、 D_x 及び D_y は鉄筋のx及びy方向に対してはり理論を準用して得られる曲げ剛性で、 $2\sqrt{D_x D_y}$ は実際には網状をなす鉄筋群を知らして考え、あたかもコンクリート版と鋼板との内的複合体であるかのように仮想することによって導かれた係数である。この方法は解析上の便利さはもちろん、はり理論において用いられる換算断面の手法とそのまま準用し易い利点がある。

一方、上記の近似とは異なり、鉄筋群を網に近似する方法がある。このような鉄筋群の網近似は最近のシムバの研究⁽⁵⁾ほどに見られるが、古くは Huber の最初の論文⁽²⁾もこの網近似によっている。

実際の版では、鉄筋とコンクリートとの共同作用により、鉄筋のごく近傍のコンクリートに局部的応力の乱れが生じるために附加的抵抗は存在するが、通常のシムバ版では、鉄筋径に比べて鉄筋間隔が十分大きいのでこの附加的抵抗は無視出来る程小さいと考えることが出来る。⁽²⁾

本報告は、鉄筋群を上記のような網近似をすることにより、RC版の異方性版としての一般的の場合の弾性定数を与え、かつRC版中央面に対称な直交配筋の場合について式(1)と比較検討したものである。

2. 断面力と変位の関係

厚さ h の RC 版を考え、厚さの中央面に作用する単位長さ当りの力を T_x, T_y, T_{xy} 、及びモーメント成分を M_x, M_y, M_{xy} とする。これらの力のうち、コンクリートの受けもつ成分を $T_{cx}, T_{cy}, T_{cxy}, M_{cx}, M_{cy}, M_{cxy}$ によってまた鉄筋の受けもつ成分を $T_{sx}, T_{sy}, T_{sxy}, M_{sx}, M_{sy}, M_{sxy}$ によって表わす。更に、中央面に直角方向の剪断力 Q_x 及び Q_y とし、版には中央面に直角方向の力のみが外的に作用するものとし、その単位面積当りの大きさを p で表わす。尚、力はすべて引張を正とする。

2.1 ひずみと変位の関係 版中央面から下向きにz軸をとり、中央面上の点のx, y, z方向の変位を u, v, w とする。z方向のひずみを無視しかつ平面保持を仮定すれば、中央面からzだけ離れた点のx, y, z方向の変位は、それぞれ、 $u - z \partial w / \partial x$ 、 $v - z \partial w / \partial y$ 、 w となるので、この点でのひずみは、

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

と表わせば

2.2 鉄筋網の断面力と変位の関係 鉄筋は細い線状体であるのでその自身の曲げや剪断に対する抵抗は無視出来る程小さく軸応力に対してのみ有効に働くとする。今、図1に示すようにある角度だけ傾斜した方向にあり間隔で配列された平行鉄筋群を考えると、鉄筋の軸方向ひずみは次式で表わすことが出来る。

$$E_s = E_x \cos^2 \theta + E_y \sin^2 \theta + \gamma_{xy} \sin \theta \cos \theta \quad (3)$$

鉄筋一本当りの断面積を A_s 、 x - y 率を E_s とすれば、鉄筋群の受ける力の各方向成分の単位長さ当りの大きさは

$$T_{sx} = A_s E_s E_x \cos^2 \theta / s, \quad T_{sy} = A_s E_s E_y \sin^2 \theta / s, \quad T_{sxy} = T_{syx} = A_s E_s E_x \sin \theta \cos \theta \quad (4)$$

となる。式(3)を式(4)に代入し、かつ多数の平行鉄筋群が存在する場合に一般化する式を得る。

$$T_{sx} = E_s \sum_i (A_{si} / s_i) (E_x \cos^4 \theta_i + E_y \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i + \gamma_{xy} \sin \theta_i \cos^3 \theta_i)$$

$$T_{sy} = E_s \sum_i (A_{si} / s_i) (E_x \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i + E_y \sin^4 \theta_i + \gamma_{xy} \sin^3 \theta_i \cos \theta_i) \quad (5)$$

$$T_{sxy} = E_s \sum_i (A_{si} / s_i) (E_x \sin \theta_i \cos^3 \theta_i + E_y \sin^3 \theta_i \cos \theta_i + \gamma_{xy} \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i)$$

今、ある鉄筋群が $z = z_{si}$ の位置にあるものとする、式(2)と式(5)に代入して式を得る。

$$\begin{aligned} T_{sx} &= h E_s \sum_i \gamma_i \left[\frac{\partial u}{\partial x} \cos^4 \theta_i + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin \theta_i \cos^3 \theta_i \right] \\ &\quad - h E_s \sum_i \gamma_i z_{si} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^4 \theta_i + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta_i \cos^3 \theta_i \right] \\ T_{sy} &= h E_s \sum_i \gamma_i \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^4 \theta_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin^3 \theta_i \cos \theta_i \right] \\ &\quad - h E_s \sum_i \gamma_i z_{si} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^4 \theta_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin^3 \theta_i \cos \theta_i \right] \\ T_{sxy} &= h E_s \sum_i \gamma_i \left[\frac{\partial u}{\partial x} \sin \theta_i \cos^3 \theta_i + \frac{\partial v}{\partial y} \sin^3 \theta_i \cos \theta_i + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \right] \\ &\quad - h E_s \sum_i \gamma_i z_{si} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin \theta_i \cos^3 \theta_i + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \sin^3 \theta_i \cos \theta_i + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \right] \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\gamma_i = A_{si} / \Delta h$ である。また、これらの鉄筋群によるモーメント成分は式を求めせる。

$$M_{sx} = T_{sx} z_{si}, \quad M_{sy} = T_{sy} z_{si}, \quad M_{sxy} = T_{sxy} z_{si} \quad (7)$$

2.3 コンクリート版の断面力と変位の関係

コンクリートの弾性係数を E_c 、ポアソン比を ν_c 、そして剪断

係数を G_c とすると、版中央部から与える任意の位置におけるコンクリートの応力は式で表わされる。

$$\begin{aligned} \sigma_{cx} &= \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_c \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{E_c z}{1-\nu_c^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_c \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \sigma_{cy} &= \frac{E_c}{1-\nu_c^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_c \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{E_c z}{1-\nu_c^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \tau_{cxy} &= G_c \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 G_c z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (8)$$

従って、コンクリートが受ける断面力は、式(6)を積分することによって式となる。

$$T_{cx} = B_c \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_c \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad T_{cy} = B_c \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_c \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad T_{cxy} = \frac{1}{2} B_c (1-\nu_c) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (9)$$

$$M_{cx} = -D_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_c \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_{cy} = -D_c \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_c \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{cxy} = -(1-\nu_c) D_c \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (10)$$

ここで、 $B_c = E_c h / (1-\nu_c^2)$ 、 $D_c = E_c h^3 / 12 (1-\nu_c^2)$ である。

2.4 RC版の断面力と変位の関係

以上、コンクリートと鉄筋が受ける断面力を各々独立して求めたが、ここを合わせると

$T_x = T_{cx} + T_{sx}$, -----, $M_x = M_{cx} + M_{sx}$, ----- 等を考慮すると最終的に式を得る。

$$\begin{pmatrix} T_x \\ T_y \\ T_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ & & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} \\ & & & A_{44} & A_{45} & A_{46} \\ \text{Sym} & & & & A_{55} & A_{56} \\ & & & & & A_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (11)$$

上記係数マトリックスの各要素の値は以下の通りである。

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= B_c \{ 1 + m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \cos^4 \theta_i \} & Q_{33} &= B_c \{ \frac{1}{2}(1-\nu_c) + m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \} \\
Q_{12} &= B_c \{ \nu_c + m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \sin^2 \theta_i \cos^3 \theta_i \} & Q_{34} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin \theta_i \cos^3 \theta_i \\
Q_{13} &= \bar{B}_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin \theta_i \cos^3 \theta_i & Q_{35} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin^3 \theta_i \cos \theta_i \\
Q_{14} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \cos^5 \theta_i & Q_{36} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin^3 \theta_i \cos^2 \theta_i \\
Q_{15} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i & Q_{44} &= D_c \{ 1 + 12m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \xi_i^2 \cos^4 \theta_i \} \\
Q_{16} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin \theta_i \cos^3 \theta_i & Q_{45} &= D_c \{ \nu_c + 12m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \xi_i^2 \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \} \\
Q_{22} &= B_c \{ 1 + m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \sin^4 \theta_i \} & Q_{46} &= F_c m \sum_i \gamma_i \xi_i^2 \sin \theta_i \cos^3 \theta_i \\
Q_{23} &= \bar{B}_c m \sum_i \gamma_i \sin^3 \theta_i \cos \theta_i & Q_{55} &= D_c \{ 1 + 12m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \xi_i^2 \sin^4 \theta_i \} \\
Q_{24} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i & Q_{56} &= F_c m \sum_i \gamma_i \xi_i^2 \sin^3 \theta_i \cos \theta_i \\
Q_{25} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin^4 \theta_i & Q_{66} &= D_c \{ \frac{1}{2}(1-\nu_c) + 12m(1-\nu_c^2) \sum_i \gamma_i \xi_i^2 \sin^2 \theta_i \cos^2 \theta_i \} \\
Q_{26} &= C_c m \sum_i \gamma_i \xi_i \sin^3 \theta_i \cos \theta_i
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで、 $\bar{B} = E_c h$, $C_c = E_c h^3$, $F_c = E_c h^3$, $\xi_i = z_{si}/h$, $m = E_s/E_c$ である。

式(11) から明らかなように、多数の鉄筋群をもつた、その鉄筋群が任意の方向に配筋されたような版において、21個の弾性定数すべて独立に値に与る可能性を含んでいる。上下の鉄筋群がすべて版中央面に対して、対称の場合には、式(12)において ξ_i を含む項はすべて零になるので (ξ_i^2 を含む項は残る)、 T_x, T_y, T_{xy} は面内変形のみで、 M_x, M_y, M_{xy} は面外変形のみで、それぞれ表わすことが出来る。しかしながら、上下の鉄筋群が RC 版中央面に対して対称でない場合、直交配筋であっても面内と面外に相互作用が生じる。

3. 直交 RC 版の基礎偏微分方程式

多くの場合がとて直交 RC 版の基礎偏微分方程式を導く。良く知られているように板要素の力の釣り合

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_{xy}}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x &= 0 \\
\frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y &= 0 \\
\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q &= 0
\end{aligned} \tag{13}$$

によって表わすことが出来る。式(14)と式(13)の第3式に代入し、式(11)を考慮することによって、次の連立偏微分方程式を得る。

$$\begin{aligned}
A'_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A'_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + (A'_{21} + A'_{33}) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} &= A'_{16} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
A'_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + A'_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + (A'_{21} + A'_{33}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= A'_{25} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
A'_{44} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(A'_{45} + 2A'_{46}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + A'_{55} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} &= q + A'_{16} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + A'_{25} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3}
\end{aligned} \tag{15. a, b, c}$$

式(15)が直交 RC 版の基礎微分方程式である。式(15.c)は曲げに関するものであり、式(15.a, b)は面内変形に関する式を表わしているが、曲げの方程式には面内変形を表わす u, v が、面内変形に関する方程式には面外変形を表わす w がそれぞれ入っている。すなわち、式(15)は面内変形と面外変形の相互作用を表わしている。しかしながら、当然予想出来る事であるが、面内変形と面外変形への影響は非常に小さいものである。⁽¹⁾

そこで、一般的に用いられている RC 版の偏微分方程式との比較のために、中央面に対して対称配筋の場合すなわち、面内変形と面外変形の相互作用のない場合について考察してみる。この場合、式(15.c)は次式となる。

$$D_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
D_x &= E_c / (1 - \nu_c^2) \cdot (h^3/12 + 2m(1-\nu_c^2)h^3 \gamma_x \xi_x^2) \\
D_y &= E_c / (1 - \nu_c^2) \cdot (h^3/12 + 2m(1-\nu_c^2)h^3 \gamma_y \xi_y^2) \\
H &= E_c / (1 - \nu_c^2) \cdot h^3/12
\end{aligned} \tag{17. a, b, c}$$

ここで、 $r_x = A_x / I_{ax}$, $r_y = A_y / I_{ay}$, $\zeta_x = e_x / h$, $\zeta_y = e_y / h$ であり、 e_x, e_y は中央面から x, y 方向の鉄筋の位置までの距離である。

Huber は、RC 版に関する最も最初の論文⁽²⁾で、鉄筋を繊維状と考え、次の D_x, D_y, H を提案した。

$$\begin{aligned} D_x &= E_c / (1 - \nu_c^2) \cdot [I_c + m(1 - \nu_c^2) I_{sx}] \\ D_y &= E_c / (1 - \nu_c^2) \cdot [I_c + m(1 - \nu_c^2) I_{sy}] \\ H &= \nu_c (D_x + D_y) / 2 + (1 - \nu_c) D_c + \Delta \end{aligned} \quad (18. a, b, c)$$

ここで、 I_c はコンクリートの断面二次モーメント、 I_{sx}, I_{sy} は鉄筋の x 方向 y 方向についての断面二次モーメントであり、 Δ は鉄筋のねじりに対する剛性への寄与を表す定数であり、配筋量の少ない場合は $\Delta = 0$ と出来るとした。 D_x, D_y は、(17) 式と同じ結果を与える。その後、彼は H として、良く知られている次式を提案した⁽³⁾。

$$H = (\nu_y D_x + \nu_x D_y) / 2 + 2C \quad (19)$$

C は、ねじりモーメントによる変形仕事とそれと等価な 45° 方向の曲げモーメントによる変形仕事との釣り合いより求め、それを構成するファクターである曲げ剛性とポアソン比を、その二方向の相乗平均として表わした。

Timoshenko は、これらの一部を修正して

$$H = \sqrt{D_x D_y} \quad (20)$$

の式を用いた⁽⁴⁾。尚、 D_x, D_y は稜算断面の考え方を採用している。しかしながら、 H に関してこれらは、鉄筋群を板と考え、ねじりに対してもコンクリートと同じように抵抗するものとしており、明かに、過大評価である。さて、今、式 (18, c) と式 (19) とから H として次式を考える。

$$H = (\nu_y D_x + \nu_x D_y) / 2 + (1 - \nu_c) D_c + \Delta \quad (21)$$

よ式において、 $\nu_y D_x = \nu_x D_y = \nu_c D_c$ 、 $\Delta = 0$ とすれば

$$H = D_c = E_c / (1 - \nu_c^2) \cdot R^3 / 12 \quad (22)$$

となり、式 (17, c) と一致する。実際の H の値は $\sqrt{D_x D_y}$ と D_c との間にあり得る事は容易に想像出来る。

しかし、通常の鉄筋比程度では $H = D_c$ に近いと思われる。

4. 数値計算例及び考察

鉄筋が版中央面に非対称に配筋されている場合、面内変形、面外変形への影響や、式 (11) を用いた能力特性については、文献 (1) で述べた。

本報告では、鉄筋が版中央面に対して対称に配筋される場合について、 H の値として、 D_c を用いる場合、及び $\sqrt{D_x D_y}$ を用いる場合とを数値計算と比較検討する。

数値計算に用いる諸数値は、 $\zeta_x = 0.368$, $\zeta_y = 0.305$, $r_x = r_y = 0.01$,

$m = 7$ であり、周辺単純支持等分布荷重の正方形版を対象とする。

表 1 に、最大たわみ、最大曲げモーメントの値を示す。それによれば、 $H = D_c$ による値は $H = \sqrt{D_x D_y}$ による値と比して、たわみで約 16%、 $M_{x, max}$ で約 12%、 $M_{y, max}$ で約 7% 増加している。

上記したように、実際の値が二の中間にあることは疑いない。

また図 2 は、 45° 方向の M_{xy} の分布を $H = D_c$, $\sqrt{D_x D_y}$ の各々の場合について示したものである、中央で零、隅角部で最大になることが分る。

以上、RC 版の異方性版としての特性を調べたために、鉄筋を網とする方法でたわみ変位の関係を導く、基礎偏微分方程式を得た。これによって、直交に限らず、任意の方向に任意の数の鉄筋群が存在する場合についても、任意の異方性を表わす

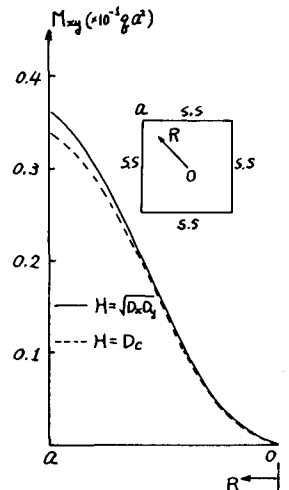


図 2

表 1

H	最大たわみ ($\times 10^{-3} \text{ g/d}$)	$M_{x, max}$ ($\times 10^4 \text{ g/d}$)	$M_{y, max}$ ($\times 10^4 \text{ g/d}$)
$\sqrt{D_x D_y}$	0.321	0.430	0.427
D_c	0.372	0.482	0.457

RC板としての基礎偏微分方程式を求めることが出来る。

また、中央面に対称に配筋した場合について、 $H=\sqrt{D_x D_y}$ を用いたものと $H=D_c$ を用いたものとを比較すると、両者の間には、かなりの差があることが分った。

尚、数値計算には、北大大型計算機センター FACOM 230-75を用いた。

《参考文献》

1. 堺, 能町, 角田 ; RC板の弾性応力について, 土木学会年次講演会, I-97
2. M.T. Huber ; Die Grundlagen einer rationellen Berechnung der kreuzweise bewehrten Eisenbetonplatten, Zeitschrift Des Österr. Ingenieur - Und Architekten-Vereins Nr. 30, 24. Juli. 1914
3. M.T. Huber ; Die Theorie der kreuzweise Bewehrten Eisenbetonplatten nebst Anwendungen auf mehrere bautechnisch wichtige Aufgaben über rechteckige Platten, Der Bauingenieur, Heft 12, Heft 13, 1923
4. M.T. Huber ; Über die genaue Biegungsgleichung einer orthotropen Platte in ihrer Anwendung auf kreuzweise bewehrte Betonplatten, Der Bauingenieur, Heft 30, 1925
5. Th. Baumann ; Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsmetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 217, 1972
6. S.P. Timoshenko ; Theory of Plates and Shells, 2-nd Edition, p. 366