

有限要素法による堤体内非Darcy浸透流の一解法

室蘭工業大学 学生員 ○寺島 俊夫

室蘭工業大学 正 員 藤間 聡

I. まえがき

ダムをはじめとする河川構造物の築造において、自重の軽い透過性のものが採用されつつある今日、浸透流は河川構造物の安定性において重要であり、各手法による解析が行われている。有限要素法による浸透解析もその一つであり、定常 Darcy 浸透流に関しては多くの解析が試みられ、実験値との比較により、その有効性も確かめられている。しかし、ロックフィルダムなどでは、浸透流は層流から乱流へと移行しているため、透水係数が速度の関数である非 Darcy 流としての取扱いが必要である。

本論文では、この様に必要性の高まっている非 Darcy 定常浸透流の解析を主眼とし、有限要素法を用いて浸潤線形状、流量、内部ポテンシャル値を推定し、同一条件下の実験でその精度を確かめるものである。

また、Darcy 流に関して従来の解析法（以下 Conventional F.E.M. と記す）では演算時間中、要素の形状を相替える事に多くの時間がかかっていた。そこで、本解析では要素の形状を固定し、時間的、経済的に有利な演算法に改良し、その有効性を Conventional F.E.M. と比較して論ずるものである。

尚、本研究においては汎用性を考慮し、境界条件として上・下流水深及び堤体長のみを与え、計算機内で要素を自動分割する計算方式を採用した。

II. 基礎理論

水の流れを考えた場合、その運動は全ポテンシャルエネルギーを最小とする原理に従う。浸透流に対してもこの原理が当てはまり、座標、水頭とその導関数で構成される関数がある区間について積分したものを全ポテンシャルエネルギーとし、その最小化を考える。

1. 非 Darcy 浸透流

本論文で取扱う非 Darcy 流は層流から乱流への遷移状態にあると考え、Forchheimer の抵抗則を満足するものとする。

$$I = a v + b v^2 \quad \text{---- (1)}$$

I : 動水勾配, v : 平均流速, a, b : 実験により決定される定数

$I = |\nabla H|$ であることを考慮すると、(1)より流速は次式(2)で示される。

$$v = \frac{1}{2b} \left\{ \sqrt{1 + (4b/a^2) |\nabla H|} - 1 \right\} \quad \text{---- (2)}$$

よって連続の式は

$$\begin{aligned} \text{div. } v &= \text{div. } (v |\nabla H|) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{2b} \frac{\sqrt{1 + (4b/a^2) |\nabla H|} - 1}{|\nabla H|} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{a}{2b} \frac{\sqrt{1 + (4b/a^2) |\nabla H|} - 1}{|\nabla H|} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \quad \text{---- (3)} \end{aligned}$$

汎関数を

$$\mathcal{J}(H) = \iint G(x, y, H, \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}) dx dy \quad \text{---- (4)}$$

で表わした場合の Euler の方程式は

$$\frac{\partial G}{\partial H} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial G}{\partial H_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial G}{\partial H_y} \right) = 0 \quad \text{---- (5)}$$

ここに、 $H_x = \partial H / \partial x$, $H_y = \partial H / \partial y$, H : 水頭値。

(3) と (5) を一致させることにより汎関数は次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} \chi(H) &= \iint \left[\frac{a}{4b} \frac{\sqrt{1 + (4b/a^2) |\nabla H|} - 1}{|\nabla H|} \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \\ &= \frac{1}{2} k(V) \iint \left\{ \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad \text{---- (6)} \end{aligned}$$

この汎関数の最小化を考えると、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi(H)}{\partial H_i} &= \frac{1}{2} \left[-k^2 \frac{b}{a} (1 + \frac{4b}{a^2} |\nabla H|) (|\nabla H|)^{\frac{3}{2}} \left\{ \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \right\} \right] \iint \left[\left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\quad + k \iint \left[\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_i} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] dx dy = 0 \quad \text{---- (7)} \end{aligned}$$

水頭値 H は、全要素について (7) を解くことにより、座標 (x, y) の関数として求められる。

2. Darcy 浸透流

1. において浸透理論の概略を述べたので、ここでは要素の形状を固定して行う解析法について述べる。本解析では、図-1 に示すアイソパラメトリック四辺形要素を用いる。

要素内の任意の水頭値 H は各節点値で表わされるものとする。

$$H = N_1 H_1 + N_2 H_2 + N_3 H_3 + N_4 H_4 \quad \text{---- (8)}$$

$$\text{ここで } N_1 = 1/4 (1 - \xi)(1 - \eta)$$

$$N_2 = 1/4 (1 + \xi)(1 - \eta)$$

$$N_3 = 1/4 (1 + \xi)(1 + \eta)$$

$$N_4 = 1/4 (1 - \xi)(1 + \eta)$$

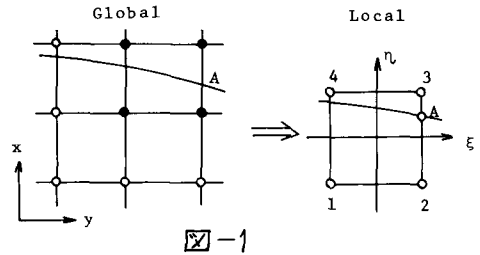


図-1

今、最初仮定した浸潤線上の各節点の鉛直流速に従い移動した後の状態を考える。この時、浸潤線上のある1点 $A(1, \eta_A)$ の水頭値を H_a とすると

$$H_a = 1/2 \{ (1 - \eta_A) H_2 + (1 + \eta_A) H_3 \} \quad \text{---- (9)}$$

よって、浸潤線よりも上部に位置する節点3の水頭値 H_3 は

$$H_3 = \{ 2H_a - (1 - \eta_A) H_2 \} / (1 + \eta_A) \quad \text{---- (10)}$$

ここで H_a は浸潤線の高さに等しく、 H_2 は既に反復法で解かれている水頭値を用いる。A が節点2に非常に接近している時は、節点2の直下に位置している節点の値を用いて補間する。浸潤線よりも上部に位置する他の節点についても順次同様の方法で行い、これらの節点における水頭値を既知の値として反復法により浸潤線の内部の水頭値を計算し、浸潤線を構成する各節点の流速が零に収束するまでくり返し計算する。この間、全要素の形状は変化しないので、各節点の座標関係により構成される全浸透マトリックスは計算の過程で不変であるゆえ、全浸透マトリックスの構成は最初に1度行うだけでよい。

尚、計算方法に汎用性を持たせるため、Darcy、非 Darcy を問わず、最初仮定する浸潤線は上流水深に等しく水平とし、要素分割方法も各堤体に対し相似とした。

Ⅲ. 実験方法 非 Darcy 浸透流

1. 流速の関数としての透水係数の決定

図-2 の様に上・下流水深が共に堤体材料の高さを上回る様に

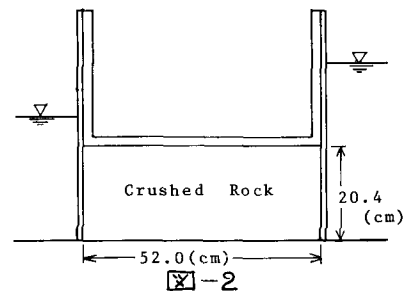


図-2

注意し、動水勾配 I と平均流速 v を測定した。それを図-4のグラフで表わし、式(1)中の定数 a 、 b を求めた。

2. 浸潤線の測定

表-1に示す物理及び水理特性を持つ材料を用いて、幅60cmの水路で実験を行い、堤体の長さは碎石の場合60cm、小砂利の場合30cmとした。上流の三角ゼキと下流端のセキ板上・下流水深を調節し、堤体内の浸透流が定常となるのを待って測定した。

表-1 堤体材料の特性

	D ₆₀ (mm)	比重	空隙率 (%)	a (sec/cm)	b (sec ² /cm ²)
碎石	28.0	2.68	41.7	0.0033	0.0041
小砂利	7.8	2.74	37.4	0.0230	0.0370

IV. 結果及び考察

1. 非 Darcy 浸透流

表-1の定数 a 、 b を用いて解析した結果は表-2の(e)~(h)及び図-3に示す通りである。但し、表-2の(a)~(d)の値は McCorguodale¹⁾によるもの($a=0.0103 \frac{\text{sec}}{\text{cm}}$ 、 $b=0.0095 \frac{\text{sec}^2}{\text{cm}^2}$)である。

表-2

	a	b	c	d	e	f	g	h
上流水深 (cm)	58.50	96.60	55.60	72.50	35.30	35.85	35.20	35.60
下流水深 (cm)	24.00	44.50	23.70	29.90	21.00	15.40	10.25	20.80
堤体長 (cm)	121.92	121.92	121.92	121.92	60.00	60.00	60.00	30.00
浸潤線 平均誤差 (%)	-0.95	-1.62	-0.86	-2.86	-0.66	-1.31	-3.57	-0.98
流量誤差 (%)	-3.94	+5.00	-2.61	-2.52	+1.56	-0.26	+0.53	----

尚、同図中の●丸は解析値をスプライン関数で補間した値である。⁴⁾

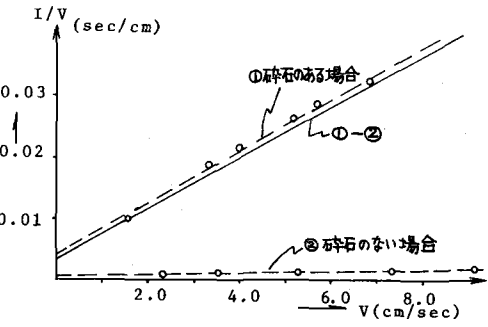
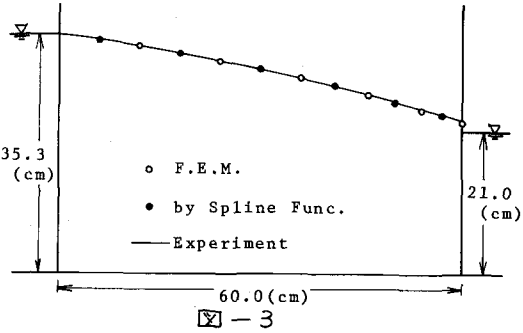
表-2からわかる様に上流水深と下流水深の差がある程度大きくなると解析値と実験値との間に不一致がみられるが、これは最初仮定した Forchheimer 則の適用範囲を既に越えていることによるものであると考える。

ここで György Kovács²⁾の提示した Reynolds 数

$$Re_p = \frac{4}{1-\lambda} \frac{Re}{\alpha} \quad \text{---- (11)}$$
$$\alpha = \frac{D_m \cdot (S.F.)}{V_s}$$

- Re : 砂粒子体積に等しい体積を持つ球の直径を特性長に用いた Reynolds 数
- $S.F.$: 材料の表面積
- V_s : 材料の体積
- $D_m = D_{60}$
- λ : 空隙率

を用いると $\log Re_p \approx 3$ で、本解析で仮定した遷移領域から乱流領域へ移行する。つまり、



$$I = a\psi + b\psi^2$$

という関係から

$$I' = b'\psi^2 \quad \text{-----(12)}$$

という関係になる。I>I'の関係から(1)を乱流領域でそのまま適用すると勾配が実際より大きくなり、浸潤線は下流部に行くにつれて実際より低下することになる。次に、各実験結果のRepを表-3に示す。

ここで本実験中、碎石を用いた堤体の場合を考えると、図-4から平均流速が $\psi = 6 \sim 7 \text{ cm/sec}$ 付近で直線の勾配が変化していると考えられる。この勾配の変化は $\log \text{Rep} \approx 3$ でおこる。

このことから、(d)では堤体の中間部から浸出部にかけて完全乱流領域に入っていると考えられることができる。ただ、本解析中、実験値との差が小さかった(e)、(f)については、対数グラフ上でのIとI'の差が $\log \text{Rep} \approx 3$ 付近ではまだ小さい事によるものであることから説明される。

他の解析結果との比較

前記の様に、遷移領域内の非Darcy浸透流は本解析で十分な近似が得られることがわかった。他の解析と精度を比較するため、同一条件で解析したMcCorquodale, 山上⁵⁾の結果を本解析結果と共に図-5に示す。各解析による流量は表-4に示してある。これから、本解析は他の解析と比較しても十分な近似解を与えるものであり、その有効性が確かめられた。

2. Darcy 浸透流

要素形状を固定化して全浸透マトリックスの再計算を省いた場合の結果は、図-6にConventional-F.E.M.と比較して示してある。浸潤線を構成する節点の鉛直流速成分が $|0.35|$ 以下に収束するまで反復して計算した場合、CPU-timeは178(sec)(FACOM 230-28 使用)であり、Conventional F.E.M.の場合に比べてほぼ $1/8$ のCPU-timeで済み、経済的な意義が達成された。

非Darcy 浸透流への適用について

非Darcy流の場合には、全浸透マトリックス内に各要素の速度の関数である透水係数が与えられる。浸潤線

表-3

	堤体中間部 浸潤線高さ(cm)	V(cm/s)	Rep	log Rep
a	48.5	4.29	625	2.56
b	83.0	5.47	797	2.67
c	45.5	4.15	605	2.55
d	61.5	7.95	3071	3.30
e	30.0	6.83	1679	3.07
f	29.4	7.79	1915	3.12
g	28.7	7.95	1954	3.13
h	31.8	3.42	234	2.35

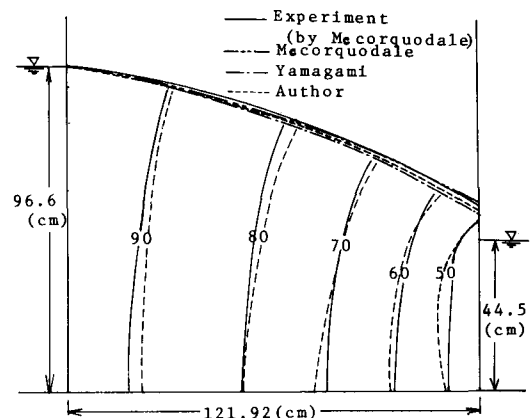


図-5

表-4

	理論流量 ($\text{cm}^3/\text{sec/cm}$)	実験流量 ($\text{cm}^3/\text{sec/cm}$)	実験との 誤差 (%)
McCorquodale	436.00	454.00	-3.96
山上 など	432.80		-4.67
本解析	476.70		+5.00

の移動による透水係数の変化が非常に小さければ、Darcy 流に対して適用した方法を非 Darcy 流にも適用できることになる。しかしながら、本解析においては透水係数の変化の幅が大きく、非 Darcy 流への適用は不適当であった。

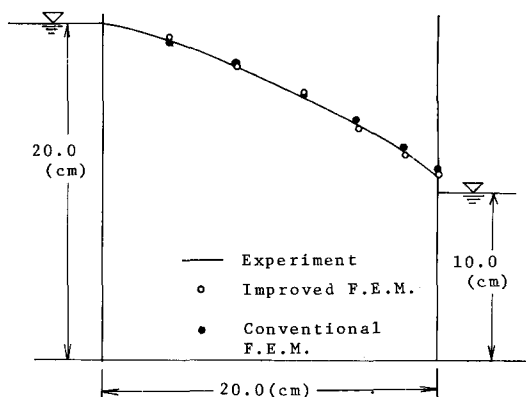


図-6

V. あとがき

遷移領域の非 Darcy 定常浸透流の浸潤線形状、流量、内部ポテンシャル値を有限要素法で解析することは、本研究においては有効な手段である事が確認された。しかしながら、実験例が少なく、検証もいまだ不十分であるので、今後完全乱流領域も含めて検討を行い、その上で非定常非 Darcy 流における堤体の安定性問題を研究する所存である。

本研究に関し、終始御指導頂いた本学土木工学科 近藤伸郎教授に謝意を表し、本研究の一部に佐藤卓二君（現苫小牧市役所）の御協力を得たことを記して感謝致します。

尚、数値解析には北海道大学大型計算機センター FACOM 230-75, 並びに本学情報処理教育センター FACOM 230-28 を使用した。

参考文献

- 1). McCorguodale, J. A. and H. C. Ng : Non-Darcy flow solved by finite element analysis , 13th Congress of the IAHR, Kyoto, Japan, Vol. 4 , 1969
- 2). Kovács, G. : Relationship between Velocity of seepage and hydraulic gradient in the zone of high velocity , 13th Congress of the IAHR, Kyoto, Japan, Vol. 4 , 1969
- 3). 山上拓男・小田英一 : 有限要素法による非ダルシー浸透流の一解法, 土木学会論文報告集, 1975
- 4). Desai, C. S. : Nonlinear analysis using spline functions, Proc. ASCE, october, 1971.
- 5). Zienkiewicz, O. C. : The finite element method in engineering science, McGraw-Hill, 1971