

断面変形を有する箱桁の曲げ不安定

北大工学部 正員 能町 純雄
 北見工大 正員 大島 俊え
 北大工学部 学生員 高橋 義裕

1. 緒言

箱桁の弾性不安定については、いろいろの場合について研究されているが、箱桁断面変形のために箱桁それ自身が横たおれ現象が生ずるおそれは充分ある。本論文では、特にこの点に検討を加える事を目的として単純曲げ状態の箱桁を考え、板要素は、たわみは、軸方向に三次曲線、面内歪は、一次変化とした仮定により、理論的議論を進めるものである。

2. 解析方法

Fig-1に示されている様な箱桁断面形状を有する構造物を4枚の板要素よりなっているものと考え、両端に曲げモーメント M_0 が作用している事により y 方向に一定で z 方向に沿って直線的に変化する圧縮応力

$$\sigma_x = 0.0(1 - \varphi \eta) \quad \text{--- (1)}$$

$$\eta = \frac{z}{t_x}$$

が作用する場合を考える。 $(\varphi = 2$ の場合は、軸方向力が0で、純曲げモーメント状態に相当する)。

Fig-2より座屈の微分方程式は、

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{但し } p_x = \sigma_x \cdot t, \quad D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

となる。たわみ w を次の様に三次曲線と仮定する。

$$w = w_r f_1(\eta) + w_{rm} f_2(\eta) + \theta_r l_z f_3(\eta) + \theta_{rm} l_z f_4(\eta) \quad \text{--- (3)}$$

$$\text{但し } f_1(\eta) = 1 - 3\eta^2 + 2\eta^3, \quad f_2(\eta) = 3\eta^2 - 2\eta^3, \quad f_3(\eta) = \eta - 2\eta^2 + \eta^3, \quad f_4(\eta) = -\eta^2 + \eta^3$$

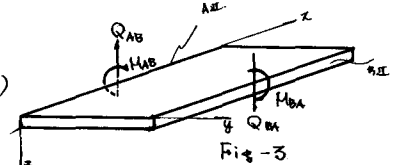
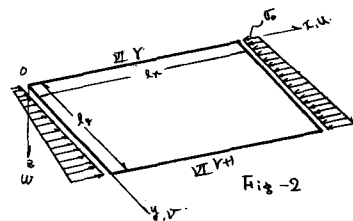
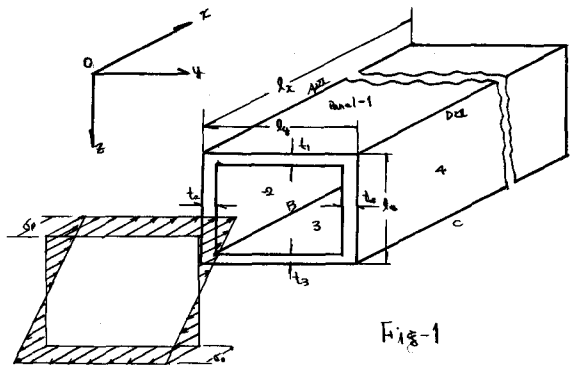
(2) 式にGalerkin法を適用して次式を導くことができる。

$$\int_0^{l_y} \left\{ D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + p_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} f_i(\eta) dy = 0 \quad \text{--- (4)}$$

($i = 1, 2, 3, 4$)

(4) 式を部分積分により面外力は、次の様になる (Fig-3参照)

$$\begin{aligned} Q_{rm} = & D \left\{ \frac{1}{10} l_y (26 \ddot{w}_r + 9 \ddot{w}_{rm}) + \frac{1}{480} l_y^3 (22 \ddot{\theta}_r - 13 \ddot{\theta}_{rm}) \right. \\ & + \frac{12}{5 l_y} (-\dot{w}_r + \dot{w}_{rm}) - \frac{1}{3} (v_r \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_{rm}) + \frac{12}{l_y} (w_r + w_{rm}) + \frac{6}{l_y} (\theta_r + \theta_{rm}) \\ & + p_x \left\{ \frac{1}{10} l_y (6 \ddot{w}_r + 9 \ddot{w}_{rm}) + \frac{1}{480} l_y^3 (22 \ddot{\theta}_r - 13 \ddot{\theta}_{rm}) \right\} \\ & \left. - p_x \left\{ \frac{1}{140} l_y (12 \ddot{w}_r + 9 \ddot{w}_{rm}) + \frac{1}{480} l_y^3 (7 \ddot{\theta}_r - 6 \ddot{\theta}_{rm}) \right\} \right\} \quad \text{--- (5)} \end{aligned}$$



$$Q_{r,r} = D \left\{ \frac{1}{10} l_y (9 \ddot{w}_r + 26 \ddot{w}_{r+1}) + \frac{1}{420} l_y^3 (13 \ddot{\theta}_r - 22 \ddot{\theta}_{r+1}) + \frac{12}{5 l_y} (\dot{w}_r - \dot{w}_{r+1}) + \frac{1}{15} (\ddot{\theta}_r + 12 \ddot{\theta}_{r+1}) \right. \\ \left. + \frac{12}{l_y} (\dot{w}_r + \dot{w}_{r+1}) - \frac{6}{l_y} (\dot{\theta}_r + \dot{\theta}_{r+1}) \right\} + p_0 \left\{ \frac{1}{10} l_y (9 \ddot{w}_r + 26 \ddot{w}_{r+1}) + \frac{1}{420} l_y^3 (13 \ddot{\theta}_r - 22 \ddot{\theta}_{r+1}) \right. \\ \left. - 9 p_0 \left\{ \frac{1}{140} l_y (9 \ddot{w}_r + 40 \ddot{w}_{r+1}) + \frac{1}{420} l_y^3 (7 \ddot{\theta}_r - 15 \ddot{\theta}_{r+1}) \right\} \right\} \quad (6)$$

$$M_{r,r} = D \left\{ \frac{1}{420} l_y^3 (22 \ddot{w}_r + 13 \ddot{w}_{r+1}) + \frac{1}{420} l_y^5 (4 \ddot{\theta}_r - 3 \ddot{\theta}_{r+1}) + \frac{1}{5} (-12 \dot{w}_r + \dot{w}_{r+1}) + \frac{1}{15} l_y (-4 \ddot{\theta}_r + \ddot{\theta}_{r+1}) \right. \\ \left. + \frac{6}{l_y} (\dot{w}_r - \dot{w}_{r+1}) + \frac{2}{l_y} (2 \dot{\theta}_r + \dot{\theta}_{r+1}) \right\} + p_0 \left\{ \frac{1}{420} l_y^3 (22 \ddot{w}_r + 13 \ddot{w}_{r+1}) + \frac{1}{420} l_y^5 (4 \ddot{\theta}_r - 3 \ddot{\theta}_{r+1}) \right\} \\ - 9 p_0 \left\{ \frac{1}{60} l_y^3 (\dot{w}_r + \dot{w}_{r+1}) - \frac{1}{280} l_y^5 (\ddot{\theta}_r + \ddot{\theta}_{r+1}) \right\} \quad (7)$$

$$M_{r+1,r} = D \left\{ -\frac{1}{420} l_y^3 (13 \ddot{w}_r + 22 \ddot{w}_{r+1}) + \frac{1}{420} l_y^5 (-3 \ddot{\theta}_r + 4 \ddot{\theta}_{r+1}) + \frac{1}{5} (-\dot{w}_r + 12 \dot{w}_{r+1}) + \frac{1}{15} l_y (\ddot{\theta}_r - 4 \ddot{\theta}_{r+1}) \right. \\ \left. + \frac{6}{l_y} (\dot{w}_r - \dot{w}_{r+1}) + \frac{2}{l_y} (\dot{\theta}_r + 2 \dot{\theta}_{r+1}) \right\} + p_0 \left\{ -\frac{1}{420} l_y^3 (13 \ddot{w}_r + 22 \ddot{w}_{r+1}) + \frac{1}{420} l_y^5 (-3 \ddot{\theta}_r + 4 \ddot{\theta}_{r+1}) \right\} \\ - 9 p_0 \left\{ -\frac{1}{140} l_y^3 (2 \dot{w}_r + 5 \dot{w}_{r+1}) + \frac{1}{840} l_y^5 (-3 \ddot{\theta}_r + 5 \ddot{\theta}_{r+1}) \right\}, \quad p_0 = 0 \quad (8)$$

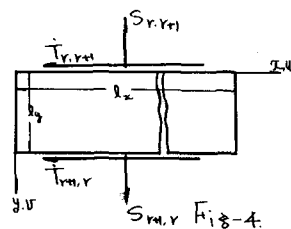
面内力に関しては、文献とFig-4より次の様になる。

$$T_{r,r+1} = \frac{1}{6} N (2 \ddot{u}_r + \ddot{u}_{r+1}) + \frac{1}{2 l_y} V N (\ddot{v}_{r+1} - \ddot{v}_r) \\ + \frac{1}{2} G t (\ddot{v}_r + \ddot{v}_{r+1}) - \frac{1}{l_y} G t (\dot{u}_r - \dot{u}_{r+1}) \quad (9)$$

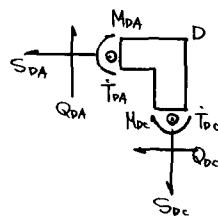
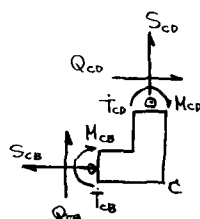
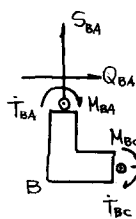
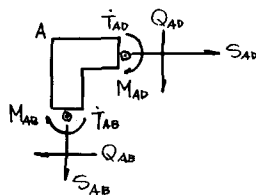
$$T_{r+1,r} = \frac{1}{6} N (\ddot{u}_r + 2 \ddot{u}_{r+1}) + \frac{1}{2 l_y} V N (\ddot{v}_{r+1} - \ddot{v}_r) \\ - \frac{1}{2} G t (\ddot{v}_r + \ddot{v}_{r+1}) - \frac{1}{l_y} G t (\dot{u}_{r+1} - \dot{u}_r) \quad (10)$$

$$S_{r,r+1} = \frac{1}{l_y} N (V_{r+1} - V_r) + \frac{1}{2 l_y} V N (\dot{u}_r + \dot{u}_{r+1}) + \frac{1}{2} G t (\dot{u}_{r+1} - \dot{u}_r) + \frac{1}{6} G t l_y (2 \ddot{v}_r + \ddot{v}_{r+1}) \quad (11)$$

$$S_{r+1,r} = \frac{1}{l_y} N (V_{r+1} - V_r) + \frac{1}{2 l_y} V N (\dot{u}_r + \dot{u}_{r+1}) - \frac{1}{2} G t (\dot{u}_{r+1} - \dot{u}_r) - \frac{1}{6} G t l_y (2 \ddot{v}_{r+1} + \ddot{v}_r) \quad (12)$$



3. 節点における力の釣り合い。



$$\begin{array}{l} \text{節点 A のまわりについて} \\ \text{B} \\ \text{C} \\ \text{D} \end{array} \quad \begin{array}{l} T_{AD} + T_{AB} = 0 \quad M_{AD} + M_{AB} = 0 \quad S_{AD} - Q_{AB} = 0 \quad Q_{AD} + S_{AB} = 0 \\ T_{BA} + T_{BC} = 0 \quad M_{BA} + M_{BC} = 0 \quad S_{BC} + Q_{BA} = 0 \quad -S_{BA} + Q_{BC} = 0 \\ T_{CD} + T_{CB} = 0 \quad M_{CD} + M_{CB} = 0 \quad -S_{CB} + Q_{CD} = 0 \quad -S_{CD} - Q_{CB} = 0 \\ T_{DA} + T_{DC} = 0 \quad M_{DA} + M_{DC} = 0 \quad -S_{DA} - Q_{DC} = 0 \quad +S_{DC} - Q_{DA} = 0 \end{array} \quad (13)$$

(13)の釣り合い式に(5)~(12)の面外力、面内力の関係式を代入。式は、節点Aのまわりについてのみ表わす。

$$T_{AD} + T_{AB} = 0 \\ \frac{1}{6} N_1 (2 \ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{1}{2 l_y} V N (\ddot{v}_B - \ddot{v}_A) - \frac{1}{l_y} G t (\dot{u}_A - \dot{u}_B) + \frac{1}{2} G t (\ddot{v}_A + \ddot{v}_B) + \frac{1}{6} N_2 (2 \ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{1}{2 l_y} V N (\ddot{v}_B - \ddot{v}_A) \\ + \frac{1}{2} G t (\ddot{v}_A + \ddot{v}_B) - \frac{1}{l_y} G t (\dot{u}_A - \dot{u}_B) = 0 \quad (14)$$

$$M_{ab} + M_{ba} = 0$$

$$\begin{aligned} D_1 \left\{ \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{w}_A + 13 \ddot{w}_B) + \frac{1}{420} l_y^3 (4 \ddot{\theta}_A - 3 \ddot{\theta}_B) + \frac{1}{5} (-v_5 \ddot{w}_A + \ddot{w}_B) + \frac{1}{15} l_y (-4 \ddot{\theta}_A + \ddot{\theta}_B) + \frac{6}{l_y^2} (w_A - w_B) \right. \\ \left. + \frac{2}{l_y} (2 \theta_A + \theta_B) + p_0 \left\{ \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{w}_A + 13 \ddot{w}_B) + \frac{1}{420} l_y^3 (4 \ddot{\theta}_A - 3 \ddot{\theta}_B) + D_2 \left\{ \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{w}_A + 13 \ddot{w}_B) \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{420} l_y^3 (4 \ddot{\theta}_A - 3 \ddot{\theta}_B) + \frac{1}{5} (-v_5 \ddot{w}_A + \ddot{w}_B) + \frac{1}{15} l_y (-4 \ddot{\theta}_A + \ddot{\theta}_B) + \frac{6}{l_y^2} (w_A - w_B) + \frac{2}{l_y} (2 \theta_A + \theta_B) \right\} \right. \\ \left. + k_2 p_1 \left\{ \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{w}_A + 13 \ddot{w}_B) + \frac{1}{420} l_y^3 (4 \ddot{\theta}_A - 3 \ddot{\theta}_B) \right\} - k_2 p_1 \left\{ \frac{1}{60} l_y^2 (\ddot{w}_A + \ddot{w}_B) - \frac{1}{280} l_y^3 (\ddot{\theta}_A + \ddot{\theta}_B) \right\} = 0 \right. \end{aligned}$$

—(15)

$$S_{AD} - Q_{AB} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_y} N_1 (v_D - v_A) + \frac{1}{2 l_y} v_1 N_1 (\dot{u}_A + \dot{u}_B) + \frac{1}{2} G_1 t_1 (\dot{u}_B - \dot{u}_A) + \frac{1}{6} G_1 t_1 l_y (2 \ddot{v}_A + \ddot{v}_B) - D_2 \left\{ \frac{1}{70} l_y (26 \ddot{v}_A + 9 \ddot{v}_B) \right. \\ \left. + \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{\theta}_A - 13 \ddot{\theta}_B) + \frac{12}{5 l_y^2} (-\ddot{v}_A + \ddot{v}_B) - \frac{1}{5} (v_5 \ddot{\theta}_A + \ddot{\theta}_B) + \frac{12}{l_y^2} (v_A + v_B) + \frac{6}{l_y^2} (\theta_A + \theta_B) \right\} \\ - k_2 p_1 \left\{ \frac{1}{70} l_y (26 \ddot{v}_A + 9 \ddot{v}_B) + \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{\theta}_A - 13 \ddot{\theta}_B) \right\} + k_2 p_1 \left\{ \frac{1}{140} l_y (12 \ddot{v}_A + 9 \ddot{v}_B) + \frac{1}{420} l_y^2 (7 \ddot{\theta}_A - 6 \ddot{\theta}_B) \right\} = 0 \end{aligned}$$

—(16)

$$Q_{AD} + S_{AD} = 0$$

$$\begin{aligned} D_1 \left\{ \frac{1}{70} l_y (26 \ddot{w}_A + 9 \ddot{w}_B) + \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{\theta}_A - 13 \ddot{\theta}_B) + \frac{12}{5 l_y^2} (-\ddot{w}_A + \ddot{w}_B) - \frac{1}{5} (v_5 \ddot{\theta}_A + \ddot{\theta}_B) + \frac{12}{l_y^2} (w_A + w_B) \right. \\ \left. + \frac{6}{l_y^2} (\theta_A + \theta_B) \right\} + p_1 \left\{ \frac{1}{70} l_y (26 \ddot{w}_A + 9 \ddot{w}_B) + \frac{1}{420} l_y^2 (22 \ddot{\theta}_A - 13 \ddot{\theta}_B) \right\} + \frac{1}{l_y^2} N_2 (v_B - v_A) \\ + \frac{1}{2 l_y} v_2 N_2 (\dot{u}_A + \dot{u}_B) + \frac{1}{2} G_2 t_2 (\dot{u}_B - \dot{u}_A) + \frac{1}{6} G_2 t_2 l_y (2 \ddot{v}_A + \ddot{v}_B) = 0 \end{aligned}$$

—(17)

同様にして B, C, D 節点についても同様の式を得、式は合計 16 本得る。得られた 16 本の式に軸方向(α 方向)に有限フーリエ変換をし、境界は単純支持とする。面内力 F に関する 4 本の式より $\tilde{u}, \tilde{v}$ の関係は、次の様になる。 $\tilde{u}, \tilde{v}$ は、変換のかかった u, v を示す。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_A \\ \tilde{v}_B \\ \tilde{v}_D \\ \tilde{v}_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & b_{24} \\ b_{31} & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{v}_A \\ \tilde{v}_B \\ \tilde{v}_D \\ \tilde{v}_C \end{bmatrix} = 0$$

$$a_{11} = -\frac{1}{3} N_1 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_1 t_1 - \frac{1}{6} N_2 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_2 t_2$$

$$a_{12} = -\frac{1}{6} N_2 \lambda^2 + \frac{1}{l_y} G_2 t_2, \quad a_{13} = -\frac{1}{6} N_1 \lambda^2 + \frac{1}{l_y} G_1 t_1$$

$$a_{21} = -\frac{1}{6} N_2 \lambda^2 + \frac{1}{l_y} G_2 t_2, \quad a_{22} = -\frac{1}{6} N_2 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_2 t_2 - \frac{1}{6} N_3 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_3 t_3$$

$$a_{24} = -\frac{1}{6} N_3 \lambda^2 + \frac{1}{l_y} G_3 t_3, \quad a_{31} = -\frac{1}{6} N_1 \lambda^2 + \frac{1}{l_y} G_1 t_1$$

$$a_{33} = -\frac{1}{6} N_1 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_1 t_1 - \frac{1}{6} N_4 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_4 t_4, \quad a_{34} = -\frac{1}{6} N_4 \lambda^2 + \frac{1}{l_y} G_4 t_4, \quad a_{42} = -\frac{1}{6} N_4 \lambda^2 + \frac{1}{l_y} G_4 t_4$$

$$a_{44} = -\frac{1}{6} N_4 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_4 t_4 - \frac{1}{6} N_3 \lambda^2 - \frac{1}{l_y} G_3 t_3$$

$$b_{11} = \frac{1}{2 l_y} v_1 N_1 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_1 t_1 \lambda^2 + \frac{1}{2 l_y} v_2 N_2 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_2 t_2 \lambda^2, \quad b_{12} = \frac{1}{2 l_y} v_2 N_2 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_2 t_2 \lambda^2$$

$$b_{21} = -\frac{1}{3 l_y} v_1 N_1 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_1 t_1 \lambda^2, \quad b_{22} = \frac{1}{2 l_y} v_2 N_2 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_2 t_2 \lambda^2, \quad b_{23} = -\frac{1}{2 l_y} v_2 N_2 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_2 t_2 \lambda^2 + \frac{1}{2 l_y} v_3 N_3 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_3 t_3 \lambda^2$$

$$b_{24} = -\frac{1}{2 l_y} v_1 N_1 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_1 t_1 \lambda^2, \quad b_{31} = \frac{1}{2 l_y} v_1 N_1 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_1 t_1 \lambda^2, \quad b_{33} = -\frac{1}{2 l_y} v_1 N_1 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_1 t_1 \lambda^2 + \frac{1}{2 l_y} v_4 N_4 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_4 t_4 \lambda^2$$

$$b_{34} = -\frac{1}{2 l_y} v_4 N_4 \lambda^2 - \frac{1}{2} G_4 t_4 \lambda^2, \quad b_{42} = \frac{1}{2 l_y} v_3 N_3 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_3 t_3 \lambda^2, \quad b_{43} = \frac{1}{2 l_y} v_4 N_4 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_4 t_4 \lambda^2$$

$$b_{44} = -\frac{1}{2 l_y} v_4 N_4 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_4 t_4 \lambda^2 - \frac{1}{2 l_y} v_3 N_3 \lambda^2 + \frac{1}{2} G_3 t_3 \lambda^2$$

$$\tilde{u} = \int_0^{l_x} \tilde{u} \sin \frac{m\pi}{l_x} \alpha d\alpha, \quad \tilde{v} = \int_0^{l_x} \tilde{v} \sin \frac{m\pi}{l_x} \alpha d\alpha, \quad \lambda = \frac{m\pi}{l_x}, \quad N = \frac{E t l_y}{1 - \nu^2}$$

以上より、(18)の式が得られ、下記のマトリックス表示する事ができる。

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n-1,1} & A_{n-1,2} & A_{n-1,3} & \cdots & A_{n-1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_A \\ \tilde{V}_A \\ \tilde{W}_A \\ \vdots \\ \tilde{W}_c \end{bmatrix} - \rho_1 \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2n} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \cdots & B_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n-1,1} & \cdots & \cdots & \cdots & B_{n-1,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Theta}_A \\ \tilde{V}_A \\ \tilde{W}_A \\ \vdots \\ \tilde{W}_c \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

上記マトリックスは、 $(A - \rho_1 B) \{X\} = 0$ となり、座屈荷重 ρ_1 は、 $|B^{-1}A - \rho_1 E| = 0$ とおくことにより、固有値問題として求める事ができる。

4. 結 言

本文の数値計算結果は、講演会当日報告する予定である。

5. 参 考 文 献

熊野, 尾崎, 大島, 佐藤: ホーロー・スラブの応力計算について。