

桁の横倒れ座屈の剛性マトリックスによる解法

(夕徑間連続桁の横倒れ座屈解析)

北海道大学 正 夏 渡辺 昇

北海道大学 正 夏 林川 俊郎

北海道大学 ○学生員 佐藤 光一

1. まえがき

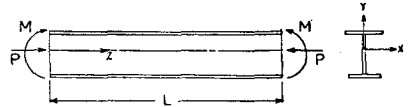
桁の横倒れ座屈に関する剛性マトリックスを誘導し、この剛性マトリックスを用いて、桁の横倒れ座屈荷重を求めようとするものである。

2. 桁の横倒れ座屈の剛性マトリックスの誘導

図-1 の様は一軸対称の一様断面の桁が、端モーメント $M_x(0)=M_x(l)=M$ (一定) とび、軸圧縮力 P を受けて横倒れ変形の座屈を起こす場合の基本微分方程式は、

$$EI_y U_s^{IV} + P U_s'' - (M - P y_0) \varphi'' = 0 \quad \text{---- (1)}$$

$$EC_w \varphi^{IV} - (GJ_0 - \beta_1 M - P I_0/A) \varphi'' - (M - P y_0) U_s' = 0 \quad \text{---- (2)}$$



ここに

座標の原点は図心である。

y_0 は剪断中心の y 座標である。

変位 U_s 、回転角 φ は、剪断中心のものである。

$$\beta_1 = \frac{1}{I_x} \left(\int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right) - 2 y_0$$

$I_0 = I_x + I_y + A y_0^2$ (剪断中心の回りの極慣性モーメント)

I_x, I_y は、図心を通る主軸に関する主慣性モーメント

(1)(2) の連立微分方程式の一般解は、

$$U_s(z) = A_1 \cos mz + A_2 \sin mz + A_3 \cosh nz + A_4 \sinh nz + A_5 z + A_6 \quad \text{---- (3)}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = & A_1 a_1 \cos mz + A_2 a_1 \sin mz + A_3 a_2 \cosh nz + A_4 a_2 \sinh nz + A_5 \frac{C_1}{C_2} z + A_6 \frac{C_1}{C_2} \\ & + A_7 z + A_8 \quad \text{---- (4)} \end{aligned}$$

ここで

$$\left[\begin{aligned} C_1 &= \frac{P}{EI_y}, \quad C_2 = \frac{M - P y_0}{EI_y}, \quad D_1 = \frac{GJ_0 - \beta_1 M - P I_0/A}{EC_w}, \quad D_2 = \frac{M - P y_0}{EC_w} \\ \alpha &= \frac{D_1 - C_1}{2}, \quad \beta = C_1 D_1 + C_2 D_2 \\ n &= \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}, \quad m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}, \quad a_1 = \frac{C_1 - m^2}{C_2}, \quad a_2 = \frac{C_1 + m^2}{C_2} \end{aligned} \right]$$

断面力の式に上述の(3)(4)を用い代入すると、

$$Q_x(z) = -EI_y U_s''' - P U_s' - (M - P y_0) \varphi' = EI_y C_2 A_7 \quad \text{---- (5)}$$

$$M_y(z) = -EI_y U_s'' = EI_y (m^2 A_1 \cos mz + m^2 A_2 \sin mz + n^2 A_3 \cosh nz + n^2 A_4 \sinh nz) \quad \text{---- (6)}$$

$$M_0(z) = -EC_w \varphi'' + (GJ_0 - \beta_1 M - P I_0/A) \varphi' + (M - P y_0) U_s' = EC_w \left(\frac{\beta}{C_2} A_5 + D_1 A_7 \right) \quad \text{---- (7)}$$

$$M_w(z) = -EC_w \varphi' = EC_w (m^2 A_1 a_1 \cos mz + m^2 A_2 a_1 \sin mz - n^2 A_3 a_2 \cosh nz - n^2 A_4 a_2 \sinh nz) \quad \text{---- (8)}$$

次に、面端 $Z=0, Z=l$ で断面力を積分定数 $A_1 \sim A_8$ を用いてマトリックス表示すると、 $\{F\} = [G]\{A\}$

又、積分定数を面端 $Z=0, Z=l$ で変形量でマトリックス表示すると、 $\{A\} = [H]\{u\}$

従、マ $\{F\} = [G]\{A\} = [G][H]\{u\} = [K]\{u\}$

$[G] \cdot [H] = [K]$ が剛性マトリックスである。

断面力の符号の変更注意到、剛性マトリックスを表わすと次の様になる。

$$\begin{Bmatrix} Q_x(0) \\ M_y(0) \\ M_D(0) \\ M_w(0) \\ Q_x(l) \\ M_y(l) \\ M_D(l) \\ M_w(l) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} \\ & & & & & & & K_{88} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s(0) \\ U'_s(0) \\ \varphi(0) \\ \varphi'(0) \\ U_s(l) \\ U'_s(l) \\ \varphi(l) \\ \varphi'(l) \end{Bmatrix}$$

----- (9)

$$\begin{aligned} K_{15} &= -K_{11}, K_{16} = K_{12}, K_{17} = -K_{13}, K_{18} = K_{14}, \\ K_{25} &= -K_{12}, K_{27} = -K_{23}, K_{35} = -K_{13}, K_{36} = K_{23}, \\ K_{37} &= -K_{33}, K_{38} = K_{34}, K_{45} = -K_{14}, K_{46} = K_{28}, \\ K_{47} &= -K_{34}, K_{55} = K_{11}, K_{56} = -K_{12}, K_{57} = K_{13}, \\ K_{58} &= -K_{14}, K_{66} = K_{22}, K_{67} = -K_{23}, K_{68} = K_{24}, \\ K_{77} &= K_{33}, K_{78} = -K_{34}, K_{88} = K_{44} \end{aligned}$$

剛性マトリックスの各要素は以下の様である。

$$\begin{aligned} K_{11} &= EI_y \left\{ \pi^3 \nu_2 a_1 \Delta_1 - \pi^3 \lambda_2 a_2 \Delta_2 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{12} &= EI_y \left\{ \pi^2 (\nu_1 - 1) a_1 \Delta_1 + \pi^2 (\lambda_1 - 1) a_2 \Delta_2 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{13} &= EI_y \left\{ \pi^3 \lambda_2 \Delta_2 - \pi^3 \nu_2 \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{14} &= EI_y \left\{ \pi^2 (1 - \nu_1) \Delta_1 + \pi^2 (1 - \lambda_1) \Delta_2 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{22} &= EI_y \left\{ m(m\lambda_1 - \lambda_2) a_2 \Delta_2 + n(n\lambda_1 - \nu_2) a_1 \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{23} &= EI_y \left\{ \pi^2 (1 - \lambda_1) \Delta_2 + \pi^2 (1 - \nu_1) \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{24} &= EI_y \left\{ m(\lambda_2 - m\lambda_1) \Delta_2 + n(\nu_2 - n\lambda_1) \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{26} &= EI_y \left\{ n(\nu_2 - n\lambda_1) a_1 \Delta_1 + m(\lambda_2 - m\lambda_1) a_2 \Delta_2 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{28} &= EI_y \left\{ m(m\lambda_1 - \lambda_2) \Delta_2 + n(n\lambda_1 - \nu_2) \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{33} &= EC_w \left\{ \pi^3 \lambda_2 a_1 \Delta_2 - \pi^3 \nu_2 a_2 \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{34} &= EC_w \left\{ \pi^2 (1 - \nu_1) a_2 \Delta_1 + \pi^2 (1 - \lambda_1) a_1 \Delta_2 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{44} &= EC_w \left\{ m(\lambda_2 - m\lambda_1) a_1 \Delta_2 + n(\nu_2 - n\lambda_1) a_2 \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \\ K_{48} &= EC_w \left\{ m(m\lambda_1 - \lambda_2) a_1 \Delta_2 + n(n\lambda_1 - \nu_2) a_2 \Delta_1 \right\} / \{a_1 - a_2\} \Delta_1 \cdot \Delta_2 \end{aligned}$$

ここで

$$\lambda_1 = \cos ml, \quad \lambda_2 = \sin ml, \quad \nu_1 = \cosh nl, \quad \nu_2 = \sinh nl$$

$$\Delta_1 = 2(1 - \lambda_1) - ml\lambda_2, \quad \Delta_2 = 2(1 - \nu_1) + nl\nu_2$$

3. 計算例

2軸対称断面で軸圧縮力 P を受ける面端単純支持の桁について。

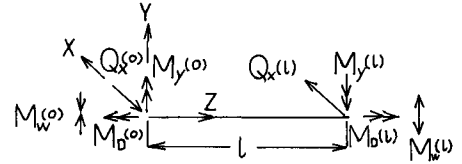
固有座屈方程式は、剛性関係式において境界条件、 $M_y(0) = M_w(0) = M_y(l) = M_w(l) = 0, U_s(0) = \varphi(0) = U_s(l) = \varphi(l) = 0$

を代入し、分割マトリックス変換を行ひ整理すると、この場合は、

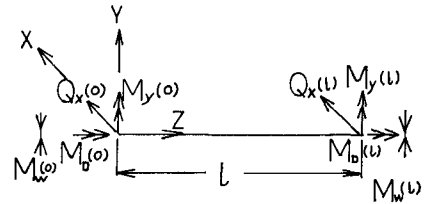
$$\begin{vmatrix} K_{22} & K_{26} \\ K_{26} & K_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} K_{44} & K_{48} \\ K_{48} & K_{44} \end{vmatrix} = 0$$

経路座屈に対する最小座屈荷重は、 $P_{cr} = (GJ_0 + \pi^2 EC_w / l^2) / (I_0 / A)$

曲げ座屈に対する最小座屈荷重は、 $P_{cr} = EI_y \pi^2 / l^2$



微分方程式における断面力の正方向



剛性マトリックスにおける断面力の正方向

$$Q_x(0) \rightarrow -Q_x(0)$$

$$M_y(l) \rightarrow -M_y(l)$$

$$M_D(0) \rightarrow -M_D(0)$$

$$M_w(l) \rightarrow -M_w(l)$$

以下の計算例では、断面は2軸対称I形断面、曲げモーメント $M_k(z)=M$ 一定として計算を行った。

両端単純支持

$$\begin{Bmatrix} Q_x^0 \\ M_y^0=0 \\ M_z^0 \\ M_w^0=0 \\ Q_x^0 \\ M_y^0=0 \\ M_z^0 \\ M_w^0=0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ & & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ & & & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ & & & & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ & & & & & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ & & & & & & K_{77} & K_{78} \\ & & & & & & & K_{88} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s^0 \\ \varphi^0 \\ \varphi^0 \\ U_s^0 \\ \varphi^0 \\ U_s^0 \\ \varphi^0 \\ \varphi^0 \end{Bmatrix} \quad \text{SYM.} \quad (10)$$

分割マトリックス演算を行い整理すると、

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_{22} & K_{24} & K_{26} & K_{28} \\ K_{24} & K_{44} & K_{28} & K_{48} \\ K_{26} & K_{28} & K_{22} & K_{24} \\ K_{28} & K_{48} & K_{24} & K_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s^0 \\ \varphi^0 \\ U_s^0 \\ \varphi^0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

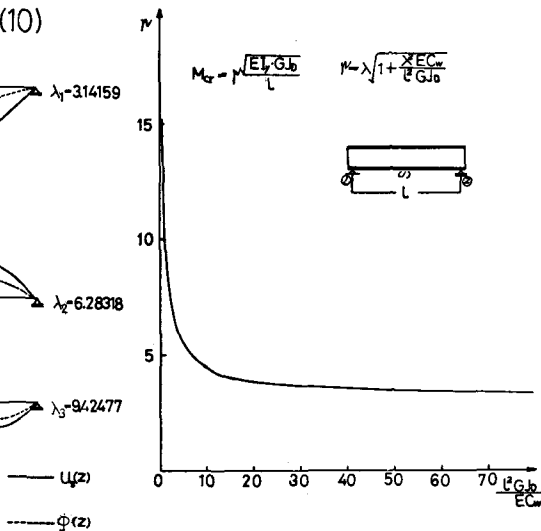
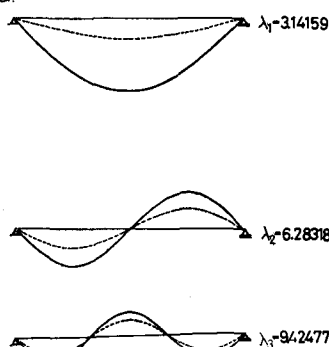
(11)の関係式を満たすためには、

$$\begin{vmatrix} K_{22} & K_{24} & K_{26} & K_{28} \\ K_{24} & K_{44} & K_{28} & K_{48} \\ K_{26} & K_{28} & K_{22} & K_{24} \\ K_{28} & K_{48} & K_{24} & K_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (12)$$

この関係が成立せねばならぬ。

上の固有座屈方程式を解きモードを描くと右図のようになる。

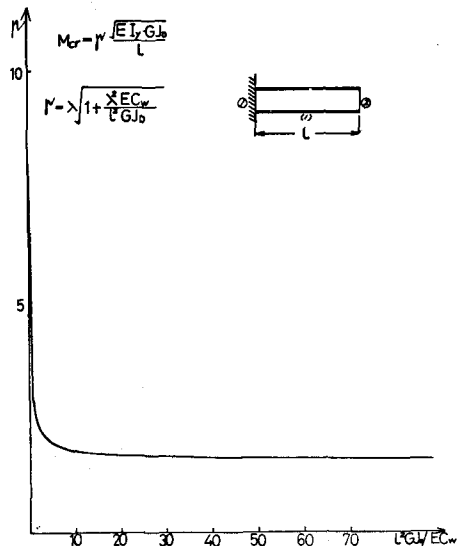
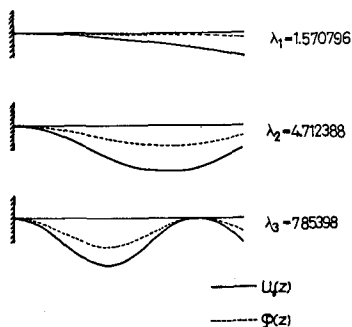
座屈の場合は最小固有値が問題となる。



一端固定他端自由

境界条件 $Q_x^0=M_y^0=M_z^0=M_w^0=0, U_s^0=U_s^0=\varphi^0=\varphi^0=0$ を代入し、前述と同様の操作を行う。

$$\begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{12} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{13} & K_{23} & K_{33} & K_{34} \\ K_{14} & K_{24} & K_{34} & K_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$



2 径間連続桁

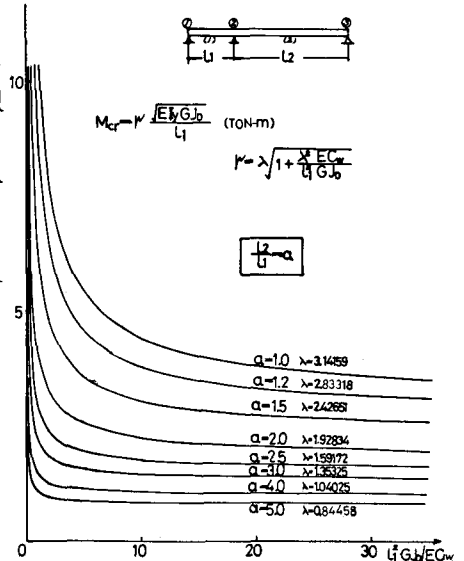
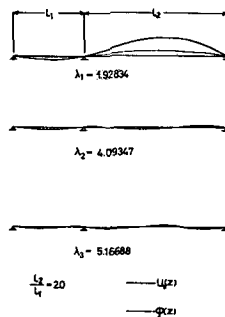
面端単純支持で桁の中間で水平方向に連続支持。断面定数は面径間等しいとして計算を行う。

(1) 部材と(2) 部材の剛性マトリックスを重ね合わせる。

$$\begin{Bmatrix} Q_x^{\textcircled{1}} \\ M_y^{\textcircled{1}}=0 \\ M_D^{\textcircled{1}} \\ M_W^{\textcircled{1}}=0 \\ Q_x^{\textcircled{2}} \\ M_y^{\textcircled{2}}=0 \\ M_D^{\textcircled{2}} \\ M_W^{\textcircled{2}}=0 \\ Q_x^{\textcircled{3}} \\ M_y^{\textcircled{3}}=0 \\ M_D^{\textcircled{3}} \\ M_W^{\textcircled{3}}=0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & -K_{11}^{(1)} & -K_{12}^{(1)} & -K_{13}^{(1)} & -K_{14}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & -K_{12}^{(1)} & -K_{22}^{(1)} & -K_{23}^{(1)} & -K_{24}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{13}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & -K_{13}^{(1)} & -K_{23}^{(1)} & -K_{33}^{(1)} & -K_{34}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{14}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & -K_{14}^{(1)} & -K_{24}^{(1)} & -K_{34}^{(1)} & -K_{44}^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -K_{11}^{(1)} & -K_{12}^{(1)} & -K_{13}^{(1)} & -K_{14}^{(1)} & K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{14}^{(1)} & -K_{11}^{(2)} & -K_{12}^{(2)} & -K_{13}^{(2)} & -K_{14}^{(2)} \\ K_{12}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & -K_{12}^{(1)} & -K_{22}^{(1)} & -K_{23}^{(1)} & -K_{24}^{(1)} & -K_{11}^{(2)} & -K_{12}^{(2)} & -K_{13}^{(2)} & -K_{14}^{(2)} \\ -K_{13}^{(1)} & -K_{23}^{(1)} & -K_{33}^{(1)} & -K_{34}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & -K_{11}^{(2)} & -K_{12}^{(2)} & -K_{13}^{(2)} & -K_{14}^{(2)} \\ K_{14}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & -K_{14}^{(1)} & -K_{24}^{(1)} & -K_{34}^{(1)} & -K_{44}^{(1)} & -K_{11}^{(2)} & -K_{12}^{(2)} & -K_{13}^{(2)} & -K_{14}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{11}^{(2)} & -K_{12}^{(2)} & -K_{13}^{(2)} & -K_{14}^{(2)} & K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{12}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & -K_{12}^{(2)} & -K_{22}^{(2)} & -K_{23}^{(2)} & -K_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_{13}^{(2)} & -K_{23}^{(2)} & -K_{33}^{(2)} & -K_{34}^{(2)} & K_{13}^{(2)} & K_{23}^{(2)} & K_{33}^{(2)} & K_{34}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{14}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{44}^{(2)} & -K_{14}^{(2)} & -K_{24}^{(2)} & -K_{34}^{(2)} & -K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_s^{\textcircled{1}}=0 \\ U_s^{\textcircled{1}} \\ \varphi^{\textcircled{1}}=0 \\ \varphi^{\textcircled{1}} \\ U_s^{\textcircled{2}}=0 \\ U_s^{\textcircled{2}} \\ \varphi^{\textcircled{2}}=0 \\ \varphi^{\textcircled{2}} \\ U_s^{\textcircled{3}}=0 \\ U_s^{\textcircled{3}} \\ \varphi^{\textcircled{3}}=0 \\ \varphi^{\textcircled{3}} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

上式に分割マトリックス演算を行い整理すると、次の固有方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & K_{26}^{(1)} & K_{28}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{24}^{(1)} & K_{44}^{(1)} & K_{28}^{(1)} & K_{48}^{(1)} & 0 & 0 \\ K_{26}^{(1)} & K_{28}^{(1)} & K_{22}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{26}^{(2)} & K_{28}^{(2)} \\ K_{28}^{(1)} & K_{48}^{(1)} & K_{24}^{(2)} & K_{44}^{(2)} & K_{28}^{(2)} & K_{48}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{26}^{(2)} & K_{28}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{24}^{(2)} \\ 0 & 0 & K_{28}^{(2)} & K_{48}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} = 0 \quad (15)$$



4. あとがき

以上の様に本剛性マトリックスを用いると、

水平方向に支持された連続桁に対する模範例座屈荷重を単に部材毎の剛性マトリックスを重ね合わせ、境界条件を代入し分割マトリックス演算を行い固有座屈方程式を解くことに

より容易に求める事ができる。又、変断面の桁に対しても同様に求める事ができる。

但し、本剛性マトリックスを誘導するために、 $M_x(z)=M=一定$ としたのでその様なモーメント状態に対して厳密な解が得られるが、モーメント $M_x(z)$ が変化する様な場合には、モーメント図を分割し、部材毎に重ね合せ、前述の操作を行うことにより近似解を求める事ができる。