

トラス橋の全体座屈について

北海道開発コンサルタント(株) 正員 進藤 義郎
北海道開発コンサルタント(株) 正員 ○藤田 孝志

1 まえがき

近年の橋梁技術の進歩に伴い、橋梁支間は増加の一途をたどっている。なかでもトラス橋の長大化は甚大橋($l_{max}=510.0^m$)に代表されるように著しいものがある。それに伴い必然的に様々な問題が提示され、例えば高張力鋼70kg $\sim$ 80kgの使用、横倒れ座屈、大ブロック工法による架設と種々考えられるが、今回その一つである横倒れ座屈について着目する。

現行道路橋示方書では支間長に比較して主構間隔の狭い場合には、トラスの座屈は格点間の局部座屈のみならずトラス全体としての横倒れ座屈に対する照査を行なわねばならないと規定している。従来この問題に対しては経験的に支間長と主構間隔の比が $l/b=20\sim25$ 程度なら横倒れ座屈の問題ないといわれてきたが、著者らは簡単な歩道拡幅工事で2本主桁で計算した結果によると $l/b=17\sim18$ 程度で横倒れ座屈が発生し、経験的数値が危険側である事を確認した。引き続きトラス構造についても横倒れ座屈に、理論的考察を加えて実橋の安全を確認したためここに報告する。

2 理論式の誘導

記号

- EI, EJ : Z, Y 軸に関する曲げ剛性
 GK : 捩れ剛性
 EC_m : 曲げ捩れ剛性
 M_x, M_y : x 軸, y 軸まわりの曲げモーメント
 u, v : 断面のせん断中心 S の x, y 軸方向の変位
 x_s, y_s : 断面のせん断中心 S の x, y 軸方向の変位
 φ : 断面のねじれ回転角

解析は次の仮定のもとで行っている。

- 1 曲げおよび捩れ変形に際して、はりはその断面形を変えない。
- 2 外力による応力は、座屈時において比例限界を越えない。
- 3 外力はその作用点の変位しても、その作用方向を変えない。

△ 荷重が鉛直荷重と横荷重が作用した場合の横倒れ座屈を考えてみる。座標系は図の通りとする。

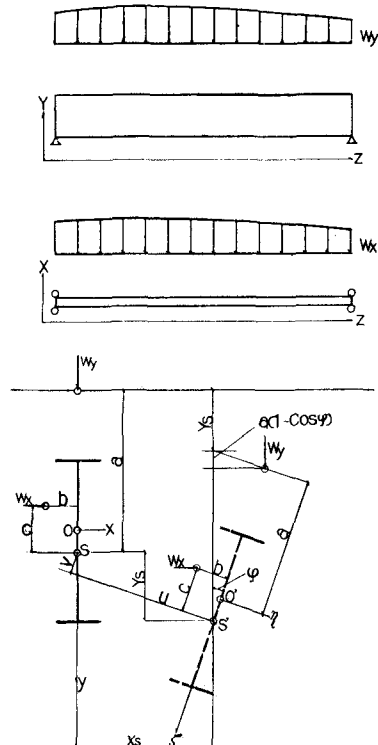


図-1

いま荷重 w_x, w_y の作用でひずみを生じたものと考え、その梁がわずかに座屈する際の変位と、荷重によるポテンシャルエネルギーを考えこめる。ポテンシャルエネルギー W は、梁の変位によるひずみエネルギーと荷重のポテンシャルエネルギーより成っている。

曲げと捩りのひずみエネルギーを計算する時、ひずみエネルギーの一般式は次のように表わされる。

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l (EI v''^2 + EJ u''^2 + KG \varphi'^2 + EC_m \varphi''^2) dz \quad (1)$$

また荷重 w_x, w_y による仕事は

$$AT = \int_0^l \left\{ -\frac{d}{dz} (M_x u) \varphi - \frac{d}{dz} (M_y v) \varphi + \frac{1}{2} a w_y \varphi^2 \right\} dz \quad (2)$$

ゆえにポテンシャルエネルギー W は次式で表わされる。

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ EI v''^2 + EJ u''^2 + KG \varphi'^2 + EC_m \varphi''^2 + 2(M_x' u + M_x u') \varphi + 2(M_y' v + M_y v') \varphi - a w_y \varphi^2 \right\} dz \quad (3)$$

上式を偏微分して部分積分を行ない、 $z=0, l$ で $u''=v''=\varphi=0$ とおくと

$$\begin{aligned} \delta W = & \int_0^l \left\{ \frac{d^2}{dz^2} (EI v'') + \frac{d}{dz} (M_y' \varphi) + \frac{d^2}{dz^2} (M_y \varphi) \right\} \delta v dz + \int_0^l \left\{ \frac{d^2}{dz^2} (EJ u'') + \frac{d}{dz} (M_x' \varphi) + \frac{d^2}{dz^2} (M_x \varphi) \right\} \delta u dz \\ & + \int_0^l \left\{ \frac{d^2}{dz^2} (EC_m \varphi'') - \frac{d}{dz} (KG \varphi') + (M_x' u' + M_x u'') + (M_y' v' + M_y v'') - a w_y \varphi \right\} \delta \varphi dz \quad (4) \end{aligned}$$

したがってオイラーの微分方程式は

$$\frac{d^2}{dz^2} (EI v'') + \frac{d}{dz} (M_y' \varphi) + \frac{d^2}{dz^2} (M_y \varphi) = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} (EJ u'') + \frac{d}{dz} (M_x' \varphi) + \frac{d^2}{dz^2} (M_x \varphi) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{d^2}{dz^2} (EC_m \varphi'') - \frac{d}{dz} (KG \varphi') + (M_x' u' + M_x u'') + (M_y' v' + M_y v'') - a w_y \varphi = 0 \quad (7)$$

ここに M_x, M_y にそれぞれ $M_x = \frac{1}{2} w_y (zl - z^2)$ $M_y = \frac{1}{2} w_x (zl - z^2)$ を用いて微分方程式 (5), (6), (7) を解く。尚、境界条件は $z=0, l$ で $v''=u''=\varphi=0$ である。

(5), (6) 式を解くと次のようになる。

$$v'' = -\frac{1}{EI} w_x (zl - z^2) \varphi \quad (8)$$

$$u'' = -\frac{1}{EI} w_x (3lz^2 - 2z^3) \varphi \quad (9)$$

$$u'' = -\frac{1}{EI} w_y (lz - z^2) \varphi \quad (10)$$

$$u' = -\frac{1}{6EJ} \omega_y (3l z^2 - 2z^3) \varphi \quad (11)$$

(8), (9), (10), (11) 式を (3) 式に代入すると

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ KG \varphi'^2 + EC_m \varphi''^2 - \left(\frac{\omega_y^2}{EJ} + \frac{\omega_z^2}{EI} \right) D_1 \varphi^2 - a \omega_y \varphi^2 \right\} dz \quad (12)$$

尚

$$D_1 = \frac{1}{6} (l - 2z) (3l z^2 - 2z^3)$$

同様にして弾性方程式 (7) は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} (EC_m \varphi'') - \frac{d}{dz} (KG \varphi') + \left\{ -\frac{1}{2} \omega_y (l - 2z) \times \frac{1}{6EJ} \omega_y (3l z^2 - 2z^3) - \frac{1}{2EJ} \omega_y^2 (l z - z^2)^2 \right\} \varphi \\ + \left\{ -\frac{1}{2} \omega_z (l - 2z) \times \frac{1}{6EI} \omega_z (3l z^2 - 2z^3) - \frac{1}{2EI} \omega_z^2 (l z - z^2)^2 \right\} \varphi - a \omega_y \varphi = 0 \quad (13) \end{aligned}$$

断面がスパン \$l\$ の全長に渡って一定ならば (13) 式は次のようになる。

$$EC_m \varphi'''' - KG \varphi'' + C \left(\frac{\omega_y^2}{EJ} + \frac{\omega_z^2}{EI} \right) \varphi - a \omega_y \varphi = 0 \quad (14)$$

尚、\$C = -\frac{1}{2} (l - 2z) \times \frac{1}{6} (3l z^2 - 2z^3) - \frac{1}{2} (l z - z^2)^2\$ である。

そこで \$W\$ の式を用いて Rayleigh-Ritz のエネルギー法によって断面一定の場合の横座屈荷重を計算する。

$$\xi = \frac{z}{l} \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{1}{l} \frac{d\varphi}{d\xi} = \frac{1}{l} \dot{\varphi} \quad \varphi'' = \frac{d^2\varphi}{dz^2} = \frac{1}{l^2} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = \frac{1}{l^2} \ddot{\varphi}$$

以上の無次元量を \$W\$ の式に導入すると

$$W = \int_0^l \left\{ \frac{1}{l^2} KG \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{l^2} EC_m \ddot{\varphi}^2 - \left(\frac{\omega_y^2}{EJ} + \frac{\omega_z^2}{EI} \right) D_2 \varphi^2 - a \omega_y \varphi^2 \right\} d\xi \quad (15)$$

$$D_2 = \frac{1}{6} (1 - 2\xi) (3\xi^2 - 2\xi^3) \times l^4$$

そこで (15) 式に次式を代入すると \$W\$ は次のようになる。

$$e = \frac{\omega_y^2}{\omega_z^2}, \quad \alpha = \frac{KG}{EIEJ}, \quad \beta = \frac{EC_m}{EIEJl^2}, \quad \bar{a} = \frac{a}{l}, \quad \bar{k} = \frac{\omega_y l^3}{EIEJ}$$

$$W = \frac{EIEJ}{l^2} \int_0^1 \left\{ \alpha \dot{\varphi}^2 + \beta \ddot{\varphi}^2 - (EI + e EJ) \bar{k}^2 D_3 \varphi^2 - \bar{a} \bar{k} \varphi^2 \right\} d\xi \quad (16)$$

$$D_3 = \frac{1}{6} (1 - 2\xi) (3\xi^2 - 2\xi^3)$$

次にねじれ角を次のように仮定し (16) 式に代入する。ただし \$n\$ は \$n\$ 次の座屈に対応する。

$$\varphi = A \sin n\pi \xi$$

$$W = \frac{EIEJ}{l^2} A^2 \int_0^1 \left\{ \alpha n^2 \pi^2 \cos^2 n\pi \xi + \beta n^4 \pi^4 \sin^2 n\pi \xi - (EI + e EJ) \bar{k}^2 D_3 \sin^2 n\pi \xi - \bar{a} \bar{k} \sin^2 n\pi \xi \right\} d\xi$$

$D_4 = \int_0^{1/2} D_3 \sin^2 n\pi \xi d\xi$ とおくとポテンシャルエネルギーの式は次の通りになる。

$$W = \frac{EI EJ A^2}{l^3} \{ \bar{\alpha} n^2 \pi^2 - \bar{\alpha} R - 4(EI + e^2 EJ) D_4 R^2 \} \quad (17)$$

尚 $\bar{\alpha} = \alpha + \beta n^2 \pi^2$ である。

座屈荷重は梁の横座屈に際して荷重のなす仕事は梁の座屈によるひずみエネルギーの増加分に等しい場合、すなわち $W = 0$ のときである。 $W = 0$ より座屈荷重係数は次のようになる。

$$4(EI + e^2 EJ) D_4 R^2 + \bar{\alpha} R - \bar{\alpha} n^2 \pi^2 = 0$$

$$R = \frac{-\bar{\alpha} + \sqrt{\bar{\alpha}^2 + 16(EI + e^2 EJ) D_4 \bar{\alpha} n^2 \pi^2}}{8(EI + e^2 EJ) D_4} \quad (18)$$

ここで

$$D_4 = \frac{1}{16} \int_0^{1/2} (1 - 2\xi)(3\xi^2 - 2\xi^3) \sin^2 n\pi \xi d\xi$$

$$= \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) - \frac{1}{12} \left\{ \frac{(-1)^n}{2n^2 \pi^2} - \frac{3(-1)^n}{n^4 \pi^4} - \frac{3(-1)^n}{2n^2 \pi^2} + \frac{3[(-1)^n - 1]}{n^4 \pi^4} + \frac{3(-1)^n}{4n^2 \pi^2} \right\}$$

最小座屈荷重に対しては $n = 1$ とおくと

$$D_4 = \frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{40} - \frac{3}{2\pi^2} - \frac{3}{4\pi^2} + \frac{3}{\pi^4} + \frac{3}{8\pi^2} \right)$$

$$= 0.004623$$

座屈荷重係数は次式のようになる。

$$R = \frac{-\bar{\alpha} + \sqrt{\bar{\alpha}^2 + 16(EI + e^2 EJ) D_4 \pi^2 \left(\frac{GK}{EIJ} + \frac{ECm I^2}{EIEJ l^2} \right)}}{8(EI + e^2 EJ) D_4}$$

また $w_{cr} = \frac{R EI EJ}{l^3}$ であるから最小座屈荷重の式は次のようになる。

$$w_{cr} = \frac{-\bar{\alpha} + \sqrt{\bar{\alpha}^2 + 16(EI + e^2 EJ) D_4 \pi^2 \left(\frac{GK}{EIEJ} + \frac{ECm \pi^2}{EIEJ l^2} \right)}}{8(EI + e^2 EJ) D_4 l^3} \times EI EJ \quad (19)$$

なお下路トラスの場合 $a < 0$ であるため $a = 0$ と仮定すると最小座屈荷重は安全側にでてくる。

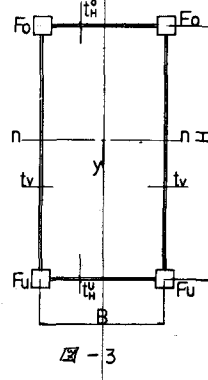
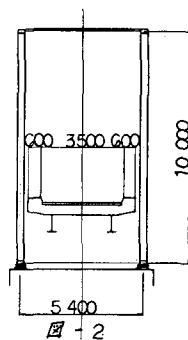
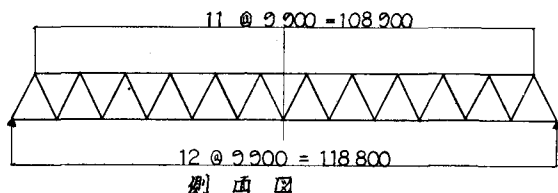
$$w_{cr} = 23.1 \times \frac{\sqrt{EJ \left(GK + \frac{\pi^2}{l^2} ECm \right)}}{l^3 \sqrt{1 + e^2 \frac{EJ}{EI}}} \quad (20)$$

また作用する荷重が鉛直荷重だけの場合の最小座屈荷重 w_{cr} の式は、 $e = 0$ とおくと

$$w_{cr} = 23.1 \times \frac{\sqrt{EJ \left(GK + \frac{\pi^2}{l^2} ECm \right)}}{l^3} \quad (21)$$

3 数値計算例

△橋の横倒れ座底について検討する。但し諸寸法は図の通りである。



3-1 設計条件

橋長 $l = 118.800^m$ 幅員 $b = 3.500^m$

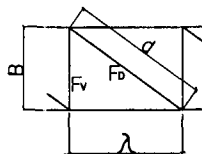
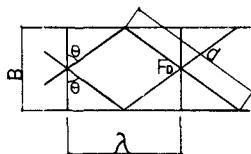
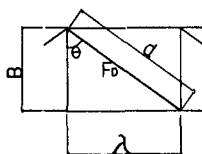
橋格: 2等橋 (TL-14) 型式: 単純ワーレントラス

3-2 トラスのボックスへの換算曲げ剛性、振り剛性、曲げ振り剛性

トラス橋全体を閉じた立体トラスと考え、静力学的に等価な梁に換算し断面定数を定める。立体トラスの梁への換算は上下左右の単一トラスの腹材をせん断変形の等しい等厚板に置換し、右図のような換算板厚と弦材断面よりなる閉断面構造とする。

i) 換算板厚 t

トラスの型式が、ワーレントラス、ラウトントラス、プラットトラスの場合について考えてみる。



(イ) ワーレントラス

(ロ) ラウトントラス

(ハ) プラットトラス

△、Bが一定の場合についてそれぞれ t の式は次のようになる。

$$(イ) t = \frac{F_0 \lambda B}{\alpha^3} \frac{E}{G} \quad (ロ) t = \frac{2F_0 \lambda B}{\alpha^3} \frac{E}{G} \quad (ハ) t = \frac{F_0 F_v \lambda B}{F_0 B^2 + F_v d^2} \frac{E}{G}$$

ii) 曲げ剛性 EI (x - z 軸), EJ (y -軸に関する)

$$EI = 2EH^2 \frac{F_0 F_v}{F_0 + F_v}, \quad EJ = \frac{1}{2} EB^2 (F_0 + F_v)$$

iii) 振り剛性 GK

$$GK = G \frac{F_0^2 H^2}{\int \frac{ds}{t}} = G \frac{F_0^2 H^2}{2 \frac{H}{\lambda} + B \left(\frac{1}{\lambda_H^2} + \frac{1}{\lambda_v^2} \right)} \quad (\text{弦材の振り剛性を合せていふのが安全側である。})$$

iv) 曲げ振り剛性 EC_m

$$EC_m = \frac{1}{8} EB^2 H^2 \frac{F_0^2 + 6F_0 F_v + F_v^2}{F_0 + F_v} \frac{(B/\lambda_H - H/\lambda_v)^2}{(B/\lambda_H + H/\lambda_v)^2} \quad (t = t_H^0 = t_H^u \text{ の場合})$$

3-3 数値計算

以上の式を用いて計算する。

$$F_0 = 438 \text{ cm}^2, \quad F_v = 320 \text{ cm}^2, \quad F_0 = 132 \text{ cm}^2, \quad F_v = 47 \text{ cm}^2, \quad t_H^0 = t_H^u = 0.919^{\text{mm}}, \quad t_v = 1.235^{\text{mm}}$$

$$EI = 3.698 \times E, \quad EJ = 1.105 \times E, \quad GK = 0.417 \times G, \quad EC_m = 1.379 \times E$$

結果は表のようになる。

単位: [t/m]

w_r : 水平荷重

w_y : 鉛直荷重

荷重状態	死荷重	雪荷重	活荷重	風荷重	地震	ΣW_y	ΣW_x	W_{cr}	安全率
Case-1	5.689	0.470	0.762	—	—	6.921	—	122.4	17.7
Case-2	5.689	3.172	—	—	—	8.861	—	122.4	13.8
Case-3	5.689	0.470	0.762	0.744	—	6.921	0.744	122.2	17.7
Case-4	5.689	0.470	—	1.188	—	6.152	1.188	121.7	19.8
Case-5	5.689	3.172	—	—	0.665	8.861	0.665	122.3	13.8

3-4 支間と主構間隔

トラス橋の横倒し座屈荷重に対応するスパン中央部の弦材応力は

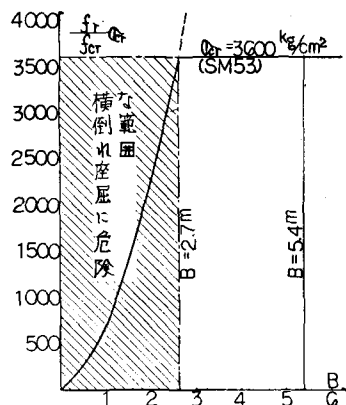
$$\sigma_{cr} = \frac{1}{16} \frac{w_{cr} B^2 l^2}{H J}$$

である。材の降伏応力を σ_y 、これに対する設計安全率を f_y 、更に横倒し座屈に対する安全率を f_{cr} とするとトラス橋の横方向の安定条件として

$$\frac{\sigma_{cr}}{f_{cr}} \geq \frac{\sigma_y}{f_y} \text{ の関係が得られる。}$$

また上式に σ_{cr} を代入すると H と B の間に次式が成り立つ。

$$\frac{H}{B} \leq \sqrt{\frac{f_r}{f_{cr}} \frac{w_{cr} l^2 H}{16 \sigma_y J}}$$



今、示方書の安全率 $f_r = 1.71$, $f_{cr} = 3.50$ と仮定すると B と σ_{cr} の関係はグラフのようになり、斜線部分から SM53 材を使用した時の横倒し座屈を起こしうる範囲である。A 橋は斜線外であるからこの事からも横倒し座屈に対し安全である事がわかる。尚、横荷重の影響はほとんどみられなかった。

4 あとがき

計算結果によると実橋のように $l/b = 22$ の小さい細い棒のような構造系であり、これも類似桁桁の働きをするトラスは非常に安全率は高く、経験的に述べられている $l/b = 20 \sim 25$ 程度の数値を守るといえば横荷重を考慮しても横倒し座屈に対する心配は全くない。

尚、今回の考察は“断面形不変の法則”即ち、曲げ及び振動に際して梁はその断面形を変えないという大前提の基に理論式を誘導したが実際のトラスは横構等が主断面に比較して剛性が低いため横断方向の変位があると考えられる。この変形を考慮した横倒し座屈については次回発表の予定である。

最後に北大 能町教授にご指導をいただき、ここに心からの謝意を表します。

参考文献

天草五橋工事報告書

長径間トラス橋の横倒し座屈について(平井敦, 深沢泰晴)