

表面に部分荷重を受ける円孔を有する半無限体の応力解析について

室蘭工業大学 正員 ○松岡 健一

北海道大学 正員 能町 純雄

土質工学研究所 正員 杉田 修一

1. まえがき

円孔を有する半無限体が円孔付近に部分荷重を受けるときの応力分布は、円孔の近くで特徴がある。円孔を有する半無限体の問題は Blenkarn¹⁾ によって取扱われているが、Blenkarn はこのほかで軸対称円孔が部分的に円孔面上端に作用する場合の解析を行ない、これと同種の二次元問題として Hetényi²⁾ が行なった Quarter-Plane の解析結果との比較を行なっている。しかし Blenkarn は非軸対称問題の解析は行なっていないし、軸対称問題でも解析例は僅かである。著者らはこれを非軸対称問題にまで拡張し、軸対称問題に対しても種々の大きさ、位置に円孔を受ける場合の解析を行ない、無限体中の円孔に円孔が作用する場合や Hetényi の結果との比較を行ない発表した³⁾。本論ではこの解を用い、半無限体表面の円孔付近に部分荷重を作用させた場合の解析を行ない、先に解析した円孔面に円孔が作用する場合や Hetényi の結果との比較を行なった。

2. 円孔を有する半無限体の Fourier-Hankel 変換による解

図-1 に示すように、 r, θ, z 座標を半径、円周、円孔軸方向にとり、それぞれ方向の変位を u, v, w とする。このとき円孔を有する半無限体の非軸対称問題にまで拡張しに解は、Fourier-Hankel 変換を用いると、次のようにえられる。

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_m C_m (A_{mrz} + B_{mrz}) \cos m\theta, \quad (1)$$

$$v = \frac{1}{\pi} \sum_m (A_{mrz} - B_{mrz}) \sin m\theta, \quad (2)$$

$$w = \frac{1}{\pi} \sum_m C_m W_{mrz} \cos m\theta, \quad (3)$$

ただし、上式中 $A_{mrz}, B_{mrz}, W_{mrz}$ は次のようになる。

$$A_{mrz} = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha z \left[\frac{1}{2\mu\alpha} \chi_{mp}(\alpha r) \left\{ d_{mn} + \beta_{mn} + 4\mu \frac{m+1}{\alpha} A_{mn} - \mu \alpha D_{mn} \right\} - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)\alpha} \omega_{mp}(\alpha r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + \frac{m+1}{\alpha} A_{mn} - \frac{m-1}{\alpha} B_{mn} - \alpha D_{mn} \right\} \right] d\alpha \\ + \int_0^\infty \frac{\mathcal{H}_{m-1}(\mathcal{F}r)}{B_m(\mathcal{F}r)} \left[Q(\mathcal{F}z) E_{m\mathcal{F}}^a - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} P(\mathcal{F}z) \left\{ \frac{1}{2\mu\mathcal{F}} \gamma_{m\mathcal{F}} + E_{m\mathcal{F}}^a - E_{m\mathcal{F}}^b \right\} \right] d\mathcal{F} + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{a}{r} \right)^m \frac{a}{E_{m0}} \quad (4)$$

$$B_{mrz} = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \sin \alpha z \left[\frac{1}{2\mu\alpha} \chi_{ms}(\alpha r) \left\{ -d_{mn} + \beta_{mn} - 4\mu \frac{m-1}{\alpha} B_{mn} - \mu \alpha D_{mn} \right\} - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)\alpha} \omega_{ms}(\alpha r) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} + \frac{m+1}{\alpha} A_{mn} - \frac{m-1}{\alpha} B_{mn} - \alpha D_{mn} \right\} \right] d\alpha + \int_0^\infty \frac{\mathcal{H}_{m-1}(\mathcal{F}r)}{B_m(\mathcal{F}r)} \left[Q(\mathcal{F}z) E_{m\mathcal{F}}^b + \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)} P(\mathcal{F}z) \left\{ \frac{1}{2\mu\mathcal{F}} \gamma_{m\mathcal{F}} + E_{m\mathcal{F}}^a - E_{m\mathcal{F}}^b \right\} \right] d\mathcal{F}, \quad (5)$$

$$W_{mrz} = \frac{z}{\pi} \int_0^\infty \cos \alpha z \left[G_m(\alpha r) D_{mn} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)\alpha} F_m(\alpha r) \left\{ \beta_{mn} + 4\mu \frac{m+1}{\alpha} A_{mn} - \frac{m-1}{\alpha} B_{mn} - \alpha D_{mn} \right\} \right] d\alpha \\ - \int_0^\infty \frac{\mathcal{H}_m(\mathcal{F}r)}{B_m(\mathcal{F}r)} \left[\phi(\mathcal{F}z) \left\{ \frac{1}{\mu\mathcal{F}} \gamma_{m\mathcal{F}} + E_{m\mathcal{F}}^a - E_{m\mathcal{F}}^b \right\} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} \left\{ \phi(\mathcal{F}z) - \psi(\mathcal{F}z) \right\} \left\{ \frac{1}{2\mu\mathcal{F}} \gamma_{m\mathcal{F}} + E_{m\mathcal{F}}^a - E_{m\mathcal{F}}^b \right\} \right] d\mathcal{F}, \quad (6)$$

ここで、 $C_m = 1, m = 1, 2, \dots, C_0 = 1/2, a$ は円孔の半径であり、 μ, λ は Lamé の弾性定数である。また式中の $d_{mn}, \beta_{mn}, \dots$ は円孔面および表面の変位や応力の Fourier 変換または Hankel 変換でえられる積分定数で、次のようにおいている

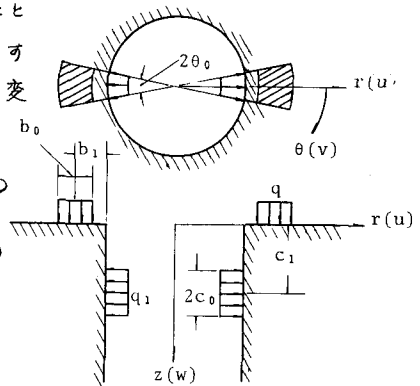


図-1 円孔を有する半無限体

$$\alpha_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \tau_{r\theta} r = a \sin m\theta \sin n z \, d\theta \, dz \quad (7), \quad \beta_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_r r = a \cos m\theta \sin n z \, d\theta \, dz \quad (8).$$

$$A_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^a A_{mr} r = a \sin m\theta \, dz \quad (9), \quad B_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^a B_{mr} r = a \sin m\theta \, dz \quad (10)$$

$$D_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^a w r = a \cos m\theta \cos n z \, d\theta \, dz \quad (11), \quad \gamma_{m\bar{z}} = \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_z r = a r H_m(\bar{z}r) \cos m\theta \, dr \, d\theta \quad (12)$$

$$E_{m\bar{z}}^a = \int_0^a A_{mr} r = a r H_{m+1}(\bar{z}r) \, dr \quad (13), \quad E_{m\bar{z}}^b = \int_0^a B_{mr} r = a r H_{m-1}(\bar{z}r) \, dr \quad (14)$$

$$A_{mr} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{u \cos m\theta + v \sin m\theta\} \, d\theta \quad (15), \quad B_{mr} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \{u \cos m\theta - v \sin m\theta\} \, d\theta \quad (16)$$

さらに式中の関数は、

$$J_f(\bar{z}r) = J_f(\bar{z}r) Y_m(\bar{z}a) - J_m(\bar{z}a) Y_f(\bar{z}r), \quad f = m+1, m, m-1, \quad B_m(\bar{z}a) = \{J_m(\bar{z}a)\}^2 + \{Y_m(\bar{z}a)\}^2,$$

$$G_m(nr) = K_m(nr)/K_m(na), \quad X_{mp}(nr) = -K_{m+1}(nr)/K_m(na), \quad X_{ms}(nr) = -K_{m-1}(nr)/K_m(na)$$

$$F_m(nr) = nr X_{mp}(nr) - na G_m(nr) X_{mp}(na), \quad W_{mp}(nr) = nr G_m(nr) - na X_{mp}(nr) X_{ms}(na),$$

$$W_{ms}(nr) = nr G_m(nr) - na X_{ms}(nr) X_{mp}(na), \quad Q(\bar{z}\bar{z}) = \phi(\bar{z}\bar{z}) = e^{-\bar{z}\bar{z}}, \quad P(\bar{z}\bar{z}) = \psi(\bar{z}\bar{z}) = \bar{z}\bar{z} e^{-\bar{z}\bar{z}},$$

$$J_f(\bar{z}r), Y_f(\bar{z}r) \text{ は } f \text{ 種および } f+2 \text{ 種の Bessel 関数, } K_f(nr) \text{ は } f \text{ 種の変形 Bessel 関数である。}$$

各応力成分は、式(1)~(6)から Hooke の法則を用いて求められる。

3. 境界条件式

式(7)~(14)で与えられる係数は、各境界の境界条件を満足させるように定めなければならないが、まず式(9), (10)に示すように、この式は、式(4), (5)を満足させなければならない。

また各境界では、せん断応力は作用せず、圧応力のみが作用するものと可及は、このときの境界条件は、

$$i) \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{for } r = a \quad \therefore \alpha_{mn} = 0 \quad (17), \quad ii) \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{for } r = a \quad (18)$$

$$iii) \quad \sigma_r = p_1(\theta, z) \quad \text{for } r = a \quad \therefore \beta_{mn} = \int_0^{2\pi} \int_0^a p_1(\theta, z) \cos m\theta \sin n z \, d\theta \, dz \quad (19)$$

$$iv) \quad \sigma_z = p_2(r, \theta) \quad \text{for } z = 0 \quad \therefore \gamma_{m\bar{z}} = \int_0^{2\pi} \int_0^a p_2(r, \theta) r H_m(\bar{z}r) \cos m\theta \, dr \, d\theta \quad (20)$$

$$v) \quad \tau_{rz} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (21), \quad vi) \quad \tau_{\theta z} = 0 \quad \text{for } z = 0 \quad (22)$$

ただし $p_1(\theta, z)$, $p_2(r, \theta)$ は $r = a$ および $z = 0$ に作用する外力である。以上の条件より、未知数は A_{mn} , B_{mn} , D_{mn} , $E_{m\bar{z}}^a$, $E_{m\bar{z}}^b$ とはり、これらは式(9), (10), (18), (21), (22)から求めることと等しいが、これらの式は

$$A_{mn} = \frac{1}{2\mu\alpha} X_{mp}(na) \left\{ \beta_{mn} + 4\mu \frac{m+1}{a} A_{mn} - \mu n D_{mn} \right\} - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)\alpha} W_{mp}(na) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} \right. \\ \left. + \frac{m+1}{a} A_{mn} - \frac{m-1}{a} B_{mn} - n D_{mn} \right\} + \int_0^a \frac{\bar{z} H_{m+1}(\bar{z}a)}{B_m(\bar{z}a)} \left[\frac{n}{n^2+\bar{z}^2} E_{m\bar{z}}^a - \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \frac{n\bar{z}}{(n^2+\bar{z}^2)^2} \{ \gamma_{m\bar{z}} \right. \\ \left. + 2\mu \bar{z} (E_{m\bar{z}}^a - E_{m\bar{z}}^b) \} \right] d\bar{z} + \frac{2\mu}{na} E_{m\bar{z}}^a \quad (23)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{2\mu\alpha} X_{ms}(na) \left\{ \beta_{mn} - 4\mu \frac{m-1}{a} B_{mn} - \mu n D_{mn} \right\} - \frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)\alpha} W_{ms}(na) \left\{ \frac{1}{2\mu} \beta_{mn} \right. \\ \left. + \frac{m+1}{a} A_{mn} - \frac{m-1}{a} B_{mn} - n D_{mn} \right\} + \int_0^a \frac{\bar{z} H_{m-1}(\bar{z}a)}{B_m(\bar{z}a)} \left[\frac{n}{n^2+\bar{z}^2} E_{m\bar{z}}^b + \frac{\mu+\lambda}{2\mu(2\mu+\lambda)} \frac{n\bar{z}}{(n^2+\bar{z}^2)^2} \{ \gamma_{m\bar{z}} \right. \\ \left. + 2\mu \bar{z} (E_{m\bar{z}}^a - E_{m\bar{z}}^b) \} \right] d\bar{z} \quad (24)$$

$$\left\{ X_{mp}(na) + \frac{\mu}{na} \beta_{mn} + 2\mu \left\{ X_{mp}(na) \frac{m+1}{a} A_{mn} - X_{ms}(na) \frac{m-1}{a} B_{mn} \right\} - \frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda} W_{mp}(na) \left\{ \beta_{mn} \right. \right. \\ \left. \left. + 2\mu \left\{ \frac{m+1}{a} A_{mn} - \frac{m-1}{a} B_{mn} - n D_{mn} \right\} \right\} + \int_0^a \frac{\bar{z} H_{m+1}(\bar{z}a)}{B_m(\bar{z}a)} \left[\frac{\bar{z}}{n^2+\bar{z}^2} \gamma_{m\bar{z}} - \frac{2(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \frac{n^2\bar{z}}{(n^2+\bar{z}^2)^2} \{ \gamma_{m\bar{z}} \right. \right.$$

$$+2\mu\zeta(E_{m\zeta}^a - E_{m\zeta}^b)\}]\,d\zeta \quad (25)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H_{m+1}(\xi a) \left[-\frac{\mu}{\mu^2 + \xi^2} \left\{ \beta_{mn} + 2\mu \frac{m+1}{a} A_{mn} \right\} + \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{(\mu^2 + \xi^2)^2} \left\{ \beta_{mn} + 2\mu \left(\frac{m+1}{a} A_{mn} - \frac{m-1}{a} B_{mn} \right) - n D_{mn} \right\} \right] d\mu + \frac{\mu}{2\mu+\lambda} \gamma_{m\zeta} - \mu\zeta(E_{m\zeta}^a + E_{m\zeta}^b) - \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \zeta(E_{m\zeta}^a - E_{m\zeta}^b) = 0 \quad (26)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} H_{m-1}(\xi a) \left[-\frac{\mu}{\mu^2 + \xi^2} \left\{ \beta_{mn} - 2\mu \frac{m-1}{a} B_{mn} \right\} - \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{(\mu^2 + \xi^2)^2} \left\{ \beta_{mn} + 2\mu \left(\frac{m+1}{a} A_{mn} - \frac{m-1}{a} B_{mn} \right) - n D_{mn} \right\} \right] d\mu - \frac{\mu}{2\mu+\lambda} \gamma_{m\zeta} - \mu\zeta(E_{m\zeta}^a + E_{m\zeta}^b) + \frac{2\mu(\mu+\lambda)}{2\mu+\lambda} \zeta(E_{m\zeta}^a - E_{m\zeta}^b) = 0 \quad (27)$$

とす。

4. 数値解析例

数値計算は、 $\mu = \lambda = 0.4E$ (E : 弾性係数, ポアソン比 0.25) で、半無限体表面に部分荷重を作用させる場合、すなわち $p_i(a, z) = 0$ としたものである。計算結果の一部を図に示すが、いずれも軸対称の場合で荷重巾 $b_0/a = 0.2, 0.4$ で荷重位置 $b_0/a = b_0/2a$ のものである。また各式中の積分は数値積分を行ない、 $\pi/2$ と $10\pi/6$ の間で 92 点とり Gauss の積分法により積分した。

図-2 は、荷重分布巾 $b_0/a = 0.2, 0.4$ のものに対して、半無限体表面 $z=0$ における σ_{rr} の r 方向の分布を示したものである。図中の一実線は *Quarter-Plane* としての *Hetényi* の結果を示したものである。横軸は荷重分布巾を基準として示しているが、 $(r-a)/b_0 = 1.0$ で不連続になり $(r-a) < b_0$ では $b_0/a = 0.4$ のものが大きく $(r-a) > b_0$ では、 $b_0/a = 0.2$ のものが大きくなる値を示している。応力の変化はどきどき割合ゆるやかである。この場合 2 次元解析結果と比較すると $b_0/a = 0.4, 0.2$ と r の全域にわたりがはり差がある。しかし $b_0/a = 0.2$ のものが *Hetényi* の値に近くなることからも明らかのように、 b_0 を小さくすれば 2 次元解析に近くなる。

図-3 は円孔面上端部に軸対称内圧を作用させたときの結果で、すでに発表したものであるが、このときの円孔面の σ_z の r 方向の分布を示したものである。本論の場合の図-2 に相当する状態と考えられるので、参考のためにここに示した。やはり荷重分布巾を変化させたものであるが、このときは $b_0 < 2C_0$ では荷重分布巾の変化に対して σ_z の値はそれほど大きく変化せず、ほぼ一定な *Hetényi* の値とも近い値をとっている。また $b_0 > 2C_0$ では荷重分布巾に対してかはり相違が示すか、荷重分布巾の大きさはもうほど σ_z の増大に対して大きく減小している。従ってこの場合も $b_0 > 2C_0$ の範囲に対しては C_0 の大きさなどは *Hetényi* の値とは異なっている。図-2 と図-3 とを比較すると、それぞれ応力分布の形状は似ているが、数値的にはかなり異なっている。これは図-2 の場合荷重の全量としては図-3 のものに比べて大きいためとも考えられる。半無限体表面に載荷する場合の方がはたして影響が大きいことを示している。

図-4 には σ_z の各断面の σ_z の r 方向の変化を $b_0/a = 0.4$ のものについて示したものである。 $z=0$ では荷重強度に一致することは当然であり、 z の増加とともに減小するが $z/b_0 = 0.5$ では円孔面 $r=a$ で $\sigma_z > 0$ となっている。従って円孔面での σ_z の減小はゆるやかで $z/b_0 = 4.0$ でも $\sigma_z \approx 0.38$ となっている。

図-5 は同様に $\sigma_{\theta\theta}$ の σ_z の各断面の r 方向の変化を $b_0/a = 0.4$ のものについて示したものであるが、変化の

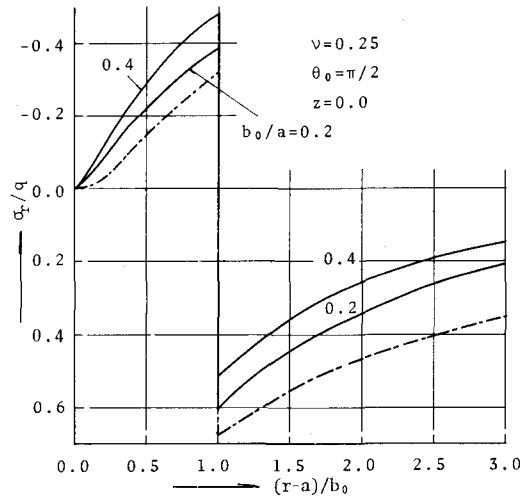


図-2 分布巾を変化させたときの半無限体表面 ($z=0$) の σ_{rr} の r 方向の分布

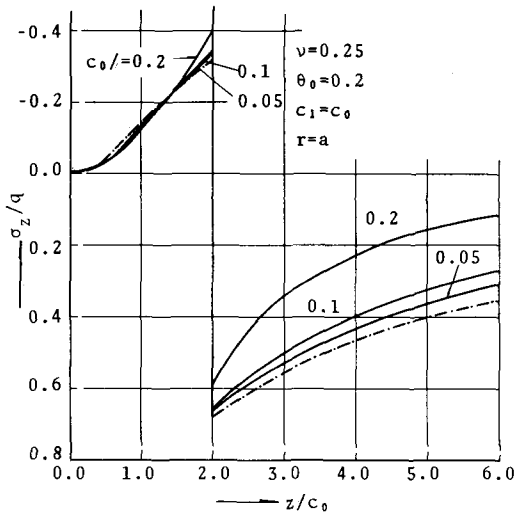


図-3 円孔面上端部に軸対称内圧が作用するときの円孔面の σ_z の分布

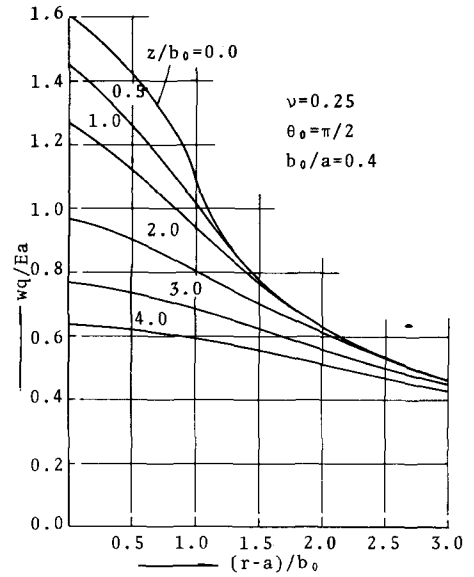


図-5 各断面の \$w\$ の \$r\$ 方向の変化

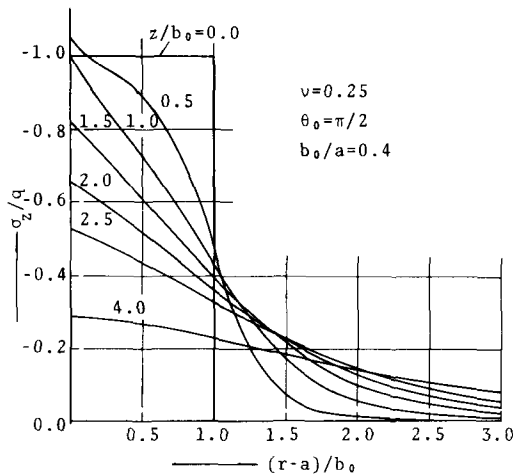


図-4 各断面の σ_z の \$r\$ 方向の分布

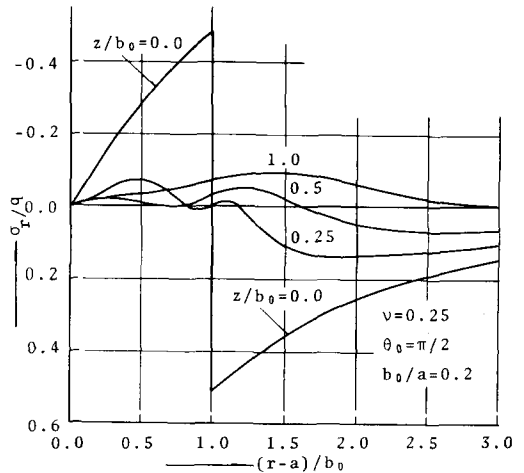


図-6 各断面の σ_r の \$r\$ 方向の分布

傾向は表面付近を除けば σ_z の分布にかはりよく一致して

いる。図-6 には σ_r の分布を示したが、 σ_r は $z=0$ 以外ではかなり小さく z が大きくなるに従って急激に減少

している。 $r=a$ では $\sigma_r=0$ であるから $r=a$ の近くで減少の程度は大きく、 r の大きくなるにつれてやや大きな応力を示しているが $z=0.25b_0$ で $\sigma_{rmax} \approx 0.15q$ 位である。

以上、円孔を有する半無限体の表面に部分荷重が作用する場合の解析を行ない、2次元問題としての結果および円孔面に部分荷重をかける場合の結果と若干比較し、それぞれ特徴のあることを示した。

なお以上の計算は主として北海道大学大型計算機センターの FACOM-230-75 によって行われた。

※ 参考文献

- 1) Blenkarn, K. A. and J. C. Wilkolt; J. App. Mech., Dec. 1962, pp 647-650 2) Hetényi, M.: J. App. Mech., June 1960, pp 289-296 3) 松岡・筒井町: 第26回応力学会講演論文集, 1976. 11, pp 327-328