

半無限体中に埋め込まれた半無限円柱の軸対称問題について

北見工業大学 正員 奥村 勇  
同 同 〇三宅 和子  
北海道大学 学生員 林 浩二

1. まえがき

半無限弾性体および多層弾性体あるいは厚板の軸対称変形および非軸対称変形に関する研究は、古くから多くの研究者により行われている。それらの中で半無限弾性体に関しては、表面に分布圧力が作用する場合についての対数ポテンシャルの理論による Boussinesq の形式的解法に始まり、その解法を発展させた Love あるいは別の解法による Lamb, 寺沢の研究と続いている。Sneddon<sup>1)</sup> は Michell の応力関数に基づき、Hankel 変換を巧みに使用して寺沢の問題および表面に集中力が作用する場合あるいは圧入問題について論じている。また、牟岐<sup>2)</sup> は Sneddon の方法を非軸対称変形の場合に拡張し、Michell の応力関数と Boussinesq の第2基本解とを加えて、半無限弾性体の表面にせん断荷重が作用する問題およびゆすかに傾いた平底円柱の圧入問題を解いている。

本研究は、半無限弾性体中に埋め込まれた半無限円柱がその端面に円柱の中心に対して軸対称に分布した部分的圧縮荷重を受ける場合の軸対称問題を H. Neuber の解に基づいて解析するものである。本研究においては半無限円柱と半無限弾性体との材料定数が異なる場合を取り扱うのであるが、両者の材料定数を等しくすることにより、半無限弾性体の表面に円形に分布したような圧力を受ける半無限弾性体そのものの軸対称問題に帰着されるという興味ある性質を有している。この種の研究では、有限円柱を有限円筒で取り囲んだ場合についての能町・松岡<sup>3)</sup> らの研究、半無限円筒が半無限弾性体で取り囲まれた部分を有限的に取り扱った鈴木<sup>4)</sup> の研究、また、有限円柱が無限厚板で取り囲まれた場合についての著者らの一人<sup>5)</sup> による研究などがあるが、本研究で取り扱う問題についての研究はあまり見受けられないようである。

2. 基本解と応力関数

軸対称変形であることを考慮して、変位で表わされたつり合い方程式の基本解に H. Neuber の解<sup>6)</sup> を用いると次のようになる。

$$2G\mathbf{U} = -\text{grad } F + 4(1-\nu)\bar{\mathbf{e}} \quad (1)$$

$$F = R\bar{\mathbf{e}} + \Phi_0, \quad \bar{\mathbf{e}} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3), \quad R = (r, 0, z) \quad (2)$$

ここで、 $\mathbf{U}$  は変位ベクトル ( $U_r, 0, U_z$ )、 $G$  および  $\nu$  はそれぞれせん断弾性係数およびポアソン比を表わすものとする。また、式(1)および式(2)の応力関数  $\Phi_0$ ,  $\bar{e}_i$  などは次式を満足するものである。

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0 \quad (3), \quad \nabla^2 \bar{e}_3 = 0 \quad (4), \quad \nabla^2 \bar{e}_1 - \bar{e}_1/r^2 = 0 \quad (5)$$

$$\text{ここで、} \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

図-1 に示したような半無限円柱の応力関数は  $z \rightarrow +\infty$  で変位および応力が消失しなければならぬことを考慮して、式(3), (4) および式(5) より次式のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_0 &= -\sum_{s=1}^{\infty} A_s^{(1)} J_0(s r) e^{-s z} \\ \Phi_3 &= -\sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} J_0(s r) e^{-s z} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{01} &= -\int_0^{\infty} E_0^{(1)} I_0(\beta r) \cos \beta z d\beta \\ \Phi_{01} &= -\int_0^{\infty} F_0^{(1)} I_1(\beta r) \cos \beta z d\beta \\ \Phi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

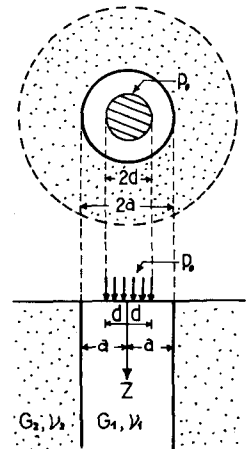


図-1 半無限弾性体中に埋め込まれた半無限円柱

式(6)および式(7)における $r$ の区間は $0 \leq r \leq a$ であり、助変数 $ds$ は $ds = \lambda s/a$ で $\lambda s$ は $J_0(\lambda s) = 0$ の第 $s$ 番目の正根である。また、 $A_s^{(0)}, G_s^{(0)}, E_s^{(0)}$ および $F_s^{(0)}$ はそれぞれ境界条件および半無限円柱と半無限弾性体との接触面における連続条件によって求められるべき未知定数および未知関数である。式(6)および式(7)に示されているように半無限円柱に関する応力関数には、未知定数および未知関数を合わせて4個の未知量が含まれている。

半無限円柱が埋め込まれた半無限弾性体に関する応力関数は $z \rightarrow +\infty$ および $r \rightarrow +\infty$ で変位および応力が消失しなければならないことを考慮して、式(3), (4)および式(5)より次のように求められる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{03} &= - \sum_{s=1}^{\infty} \{ A_s^{(0)} J_0(\lambda_s r) + B_s^{(0)} Y_0(\lambda_s r) \} e^{-\lambda_s z} \\ \Phi_3 &= - \sum_{s=1}^{\infty} \{ G_s^{(0)} J_0(\lambda_s r) + D_s^{(0)} Y_0(\lambda_s r) \} e^{-\lambda_s z} \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{01} &= - \int_0^{\infty} E_0^{(0)} K_0(\beta r) \cos \beta z d\beta \\ \Phi_1 &= - \int_0^{\infty} F_0^{(0)} K_1(\beta r) \cos \beta z d\beta \\ \Phi_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots \dots \dots (9)$$

式(8)および式(9)における $r$ の区間は $a \leq r < +\infty$ であり、助変数 $\lambda s$ は $\lambda s = ds/a$ で $ds$ は $a$ より十分大きな $b$ に対して次式を満足する第 $s$ 番目の正根である。

$$Y_0(ds) J_0(ds b/a) - J_0(ds) Y_0(ds b/a) = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

また、 $A_s^{(0)}, G_s^{(0)}, B_s^{(0)}, D_s^{(0)}, E_s^{(0)}$ および $F_s^{(0)}$ はそれぞれ境界条件および連続条件によって求められるべき未知定数および未知関数である。半無限弾性体に関する応力関数には6個の未知量が含まれており、半無限円柱に関する未知量と合わせると合計10個の未知量と2つの助変数が生じる。

### 3. 変位および応力成分

半無限円柱および半無限弾性体の変位と応力成分にそれぞれ添字1および添字2を付して表わし、さらに式(6)および式(8)から得られる変位と応力成分に肩添字(1)を、式(7)および式(9)から得られる変位と応力成分に肩添字(2)を付して表わす。変位成分は式(1)より、また応力成分はHookeの法則より次のように求められる。

$$2G_1 u_{r1}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-ds) (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) J_1(ds r) e^{-ds z} \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$2G_1 u_{z1}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} \{ (-ds) (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) - (3-4\nu_1) G_s^{(0)} \} J_0(ds r) e^{-ds z} \quad \dots \dots \dots (12)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-ds) \{ \{ ds (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) - 2\nu_1 G_s^{(0)} \} J_0(ds r) - \frac{1}{r} (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) J_1(ds r) \} e^{-ds z} \quad \dots \dots \dots (13)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} ds \{ ds (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) + 2(1-\nu_1) G_s^{(0)} \} J_0(ds r) e^{-ds z} \quad \dots \dots \dots (14)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = \sum_{s=1}^{\infty} ds \{ ds (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) + (1-2\nu_1) G_s^{(0)} \} J_1(ds r) e^{-ds z} \quad \dots \dots \dots (15)$$

$$2G_1 u_{r2}^{(1)} = \int_0^{\infty} \{ \{ \beta E_0^{(0)} - 4(1-\nu_1) F_0^{(0)} \} I_1(\beta r) + \beta r F_0^{(0)} I_0(\beta r) \} \cos \beta z d\beta \quad \dots \dots \dots (16)$$

$$2G_1 u_{z2}^{(1)} = \int_0^{\infty} (-\beta) \{ E_0^{(0)} I_0(\beta r) + r F_0^{(0)} I_1(\beta r) \} \sin \beta z d\beta \quad \dots \dots \dots (17)$$

$$\sigma_{rr}^{(1)} = \int_0^{\infty} \beta \{ \{ \beta E_0^{(0)} - (3-2\nu_1) F_0^{(0)} \} I_1(\beta r) + \{ \beta r F_0^{(0)} + \frac{4(1-\nu_1)}{\beta r} F_0^{(0)} - \frac{1}{r} E_0^{(0)} \} I_0(\beta r) \} \cos \beta z d\beta \quad \dots \dots \dots (18)$$

$$\sigma_{zz}^{(1)} = \int_0^{\infty} (-\beta) \{ \{ \beta E_0^{(0)} + 2\nu_1 F_0^{(0)} \} I_0(\beta r) + \beta r F_0^{(0)} I_1(\beta r) \} \cos \beta z d\beta \quad \dots \dots \dots (19)$$

$$\tau_{rz}^{(1)} = \int_0^{\infty} (-\beta) \{ \{ \beta E_0^{(0)} - 2(1-\nu_1) F_0^{(0)} \} I_1(\beta r) + \beta r F_0^{(0)} I_0(\beta r) \} \sin \beta z d\beta \quad \dots \dots \dots (20)$$

$$2G_2 u_{r2}^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-\lambda_s) \{ (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) J_1(\lambda_s r) + (B_s^{(0)} + z D_s^{(0)}) Y_1(\lambda_s r) \} e^{-\lambda_s z} \quad \dots \dots \dots (21)$$

$$2G_2 u_{z2}^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} \{ \{ -\lambda_s (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) - (3-4\nu_2) G_s^{(0)} \} J_0(\lambda_s r) - \{ \lambda_s (B_s^{(0)} + z D_s^{(0)}) + (3-4\nu_2) D_s^{(0)} \} Y_0(\lambda_s r) \} \times e^{-\lambda_s z} \quad \dots \dots \dots (22)$$

$$\sigma_{rr}^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} (-\lambda_s) \{ \{ \lambda_s (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) - 2\nu_2 G_s^{(0)} \} J_0(\lambda_s r) - \frac{1}{r} (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) J_1(\lambda_s r) + \{ \lambda_s (B_s^{(0)} + z D_s^{(0)}) - 2\nu_2 D_s^{(0)} \} Y_0(\lambda_s r) - \frac{1}{r} (B_s^{(0)} + z D_s^{(0)}) Y_1(\lambda_s r) \} e^{-\lambda_s z} \quad \dots \dots \dots (23)$$

$$\sigma_{zz}^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \{ \{ \lambda_s (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) + 2(1-\nu_2) G_s^{(0)} \} J_0(\lambda_s r) + \{ \lambda_s (B_s^{(0)} + z D_s^{(0)}) + 2(1-\nu_2) D_s^{(0)} \} Y_0(\lambda_s r) \} \times e^{-\lambda_s z} \quad \dots \dots \dots (24)$$

$$\tau_{rz}^{(2)} = \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_s \{ \{ \lambda_s (A_s^{(0)} + z G_s^{(0)}) + (1-2\nu_2) G_s^{(0)} \} J_1(\lambda_s r) + \{ \lambda_s (B_s^{(0)} + z D_s^{(0)}) + (1-2\nu_2) D_s^{(0)} \} Y_1(\lambda_s r) \} \times e^{-\lambda_s z} \quad \dots \dots \dots (25)$$

$$2G_2 u_{r2}^{(2)} = \int_0^\infty (-1) \{ \beta E(\beta^2) + 4(1-\nu_2) F(\beta^2) \} K_1(\beta r) + \beta r F(\beta^2) K_0(\beta r) \cos \beta z d\beta \quad (26)$$

$$2G_2 u_{z2}^{(2)} = \int_0^\infty (-\beta) \{ E(\beta^2) K_0(\beta r) + r F(\beta^2) K_1(\beta r) \} \sin \beta z d\beta \quad (27)$$

$$\sigma_{r2}^{(2)} = \int_0^\infty \beta \{ \beta E(\beta^2) + (3-2\nu_2) F(\beta^2) \} K_0(\beta r) + \{ \beta r F(\beta^2) + \frac{4(1-\nu_2)}{\beta r} F(\beta^2) + \frac{1}{r} E(\beta^2) \} K_1(\beta r) \times \cos \beta z d\beta \quad (28)$$

$$\sigma_{z2}^{(2)} = \int_0^\infty (-\beta) \{ \beta E(\beta^2) - 2\nu_2 F(\beta^2) \} K_0(\beta r) + \beta r F(\beta^2) K_1(\beta r) \cos \beta z d\beta \quad (29)$$

$$\tau_{rz2}^{(2)} = \int_0^\infty \beta \{ \beta E(\beta^2) + 2(1-\nu_2) F(\beta^2) \} K_1(\beta r) + \beta r F(\beta^2) K_0(\beta r) \sin \beta z d\beta \quad (30)$$

ここで、 $G_1$  および  $G_2$ 、 $\nu_1$  および  $\nu_2$  はそれぞれ半無限円柱および半無限弾性体のせん断弾性係数およびポアソン比を表すものとする。また、求める変位成分および応力成分は、肩添字(1)と肩添字(2)を付したそれらを各々相加したものである。

#### 4. 境界条件および連続条件

半無限円柱および半無限弾性体の表面における境界条件は次のようである。

$$(\sigma_{z1}^{(1)} + \sigma_{z1}^{(2)})_{z=0} = 0 \quad (a-1), \quad (\sigma_{z1}^{(1)} + \sigma_{z1}^{(2)})_{z=0} = -p(r) \quad (a-2)$$

$$(\sigma_{rz1}^{(1)} + \sigma_{rz1}^{(2)})_{z=0} = 0 \quad (a-3), \quad (\sigma_{z2}^{(2)} + \sigma_{z2}^{(2)})_{z=0} = 0 \quad (a-4)$$

条件(a-2)における $p(r)$ は、半無限円柱の端面に作用する部分的圧縮荷重をBessel級数に展開したもので次のようである。

$$p(r) = 2p_0 (d/a) \sum_{n=1}^{\infty} \{ J_1(\lambda_n d/a) / \lambda_n J_1^2(\lambda_n) \} J_0(\lambda_n r) \quad (a-2')$$

また、半無限円柱と半無限弾性体との接触面において変位と応力が連続すると仮定すると、半無限円柱と半無限弾性体との接触面における連続条件は次のようである。

$$(\sigma_{r1}^{(1)} + \sigma_{r1}^{(2)})_{r=a} = (\sigma_{r2}^{(1)} + \sigma_{r2}^{(2)})_{r=a} \quad (b-1), \quad (\tau_{rz1}^{(1)} + \tau_{rz1}^{(2)})_{r=a} = (\tau_{rz2}^{(1)} + \tau_{rz2}^{(2)})_{r=a} \quad (b-2)$$

$$(u_{r1}^{(1)} + u_{r1}^{(2)})_{r=a} = (u_{r2}^{(1)} + u_{r2}^{(2)})_{r=a} \quad (b-3), \quad (u_{z1}^{(1)} + u_{z1}^{(2)})_{r=a} = (u_{z2}^{(1)} + u_{z2}^{(2)})_{r=a} \quad (b-4)$$

境界条件(a-1)および(a-3)より次の関係が得られる。

$$A_5^{(1)} = -\frac{1-2\nu_1}{\alpha_5} G_5^{(1)} \quad (31), \quad A_5^{(2)} = -\frac{1-2\nu_2}{\beta_5} G_5^{(2)} \quad (32), \quad B_5^{(2)} = -\frac{1-2\nu_2}{\beta_5} D_5^{(2)} \quad (33)$$

したがって、二つの境界条件より3個の未知量が消去されたことになり残りの未知量は計7個であるが、残りの境界条件および連続条件を合わせて6個であるので条件が一つ不足する。そこで、 $D_5^{(2)}$ と $G_5^{(2)}$ の間に次のような関係をもうける。

$$D_5^{(2)} = -\frac{J_0(\beta_5 a)}{Y_0(\beta_5 a)} G_5^{(2)} \quad (34)$$

式(34)を用いて式(33)を書きなおすと次のようになる。

$$B_5^{(2)} = \frac{1-2\nu_2}{\beta_5} \frac{J_0(\beta_5 a)}{Y_0(\beta_5 a)} G_5^{(2)} \quad (33')$$

式(31)、(32)、(33)および式(34)の関係を肩添字(1)を付した変位および応力成分に代入すると $A_5^{(1)}$ 、 $A_5^{(2)}$ 、 $B_5^{(2)}$ および $D_5^{(2)}$ を消去することができる。その結果は次のようである。

$$2G_1 u_{r1}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(1)} (1-2\nu_1 - \alpha_5 z) J_1(\alpha_n r) e^{-\alpha_5 z} \quad (11')$$

$$2G_1 u_{z1}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(1)} (2\nu_1 - 2 - \alpha_5 z) J_0(\alpha_n r) e^{-\alpha_5 z} \quad (12)$$

$$\sigma_{r1}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(1)} \{ \alpha_5 (1 - \alpha_5 z) J_0(\alpha_n r) + \frac{1}{r} (\alpha_5 z - 1 + 2\nu_1) J_1(\alpha_n r) \} e^{-\alpha_5 z} \quad (13)$$

$$\sigma_{z1}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(1)} \alpha_5 (\alpha_5 z + 1) J_0(\alpha_n r) e^{-\alpha_5 z} \quad (14)$$

$$\tau_{rz1}^{(1)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(1)} \alpha_n^2 z J_1(\alpha_n r) e^{-\alpha_n z} \quad (15)$$

$$2G_2 u_{r2}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(2)} (1-2\nu_2 - \beta_5 z) C_1(\beta_n r) e^{-\beta_5 z} \quad (21')$$

$$2G_2 u_{z2}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(2)} (2\nu_2 - 2 - \beta_5 z) C_0(\beta_n r) e^{-\beta_5 z} \quad (22)$$

$$\sigma_{r2}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(2)} \{ \beta_5 (1 - \beta_5 z) C_0(\beta_n r) + \frac{1}{r} (\beta_5 z - 1 + 2\nu_2) C_1(\beta_n r) \} e^{-\beta_5 z} \quad (23)$$

$$\sigma_{z2}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(2)} \beta_5 (\beta_5 z + 1) C_0(\beta_n r) e^{-\beta_5 z} \quad (24)$$

$$\tau_{rz2}^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} G_5^{(2)} \beta_n^2 z C_1(\beta_n r) e^{-\beta_n z} \quad (25)$$

式(21), ..., 式(25)における $C_0(kr)$  および  $C_1(kr)$  は、次のように定義された円柱関数である。

$$C_0(kr) = J_0(kr) - \frac{J_0(k_2 a)}{Y_0(k_2 a)} Y_0(kr), \quad C_1(kr) = J_1(kr) - \frac{J_1(k_2 a)}{Y_1(k_2 a)} Y_1(kr)$$

## 5. 6群の連立一次方程式

半無限円柱および半無限弾性体の表面における境界条件(a-2)を満たすためには、肩添字(2)を付した応力 $(\sigma_{z1}^{(2)})_{z=0}$ をBessel級数に展開することが必要となる。 $z=0$ における $\sigma_{z1}$ は式(14)および式(19)より、

$$(\sigma_{z1}^{(2)})_{z=0} = \sum_{s=1}^{\infty} G_s^0 \alpha_s J_0(\alpha_s r) \dots (35), \quad (\sigma_{z1}^{(2)})_{z=0} = \int_0^{\infty} (-\beta) \{ \{ \beta E^{(2)} + 2\nu F^{(2)} \} I_0(\beta r) + \beta r F^{(2)} I_1(\beta r) \} d\beta \dots (36)$$

が得られる。ここで、式(36)の $r$ を含む項をBessel級数展開すると、

$$\{ \beta E^{(2)} + 2\nu F^{(2)} \} I_0(\beta r) + \beta r F^{(2)} I_1(\beta r) = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2\alpha_s}{\alpha(\beta^2 + \alpha_s^2) J_1(\alpha_s a)} \{ \{ \beta E^{(2)} + 2(\nu - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha_s^2}) F^{(2)} \} I_0(\beta a) + \beta a I_1(\beta a) F^{(2)} \} J_0(\alpha_s r)$$

となるので、式(36)は次のように書きなおされる。

$$(\sigma_{z1}^{(2)})_{z=0} = \int_0^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{-2\alpha_s \beta}{\alpha(\beta^2 + \alpha_s^2) J_1(\alpha_s a)} \{ \{ \beta E^{(2)} + 2(\nu - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha_s^2}) F^{(2)} \} I_0(\beta a) + \beta a I_1(\beta a) F^{(2)} \} J_0(\alpha_s r) d\beta \dots (36)$$

したがって、式(35)および式(36)より境界条件(a-2)を満たすために次の関係が得られる。

$$\alpha_s G_s^0 - \frac{2}{\alpha J_1(\alpha_s a)} \int_0^{\infty} \frac{\alpha_s \beta}{\beta^2 + \alpha_s^2} \{ \{ \beta E^{(2)} + 2(\nu - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \alpha_s^2}) F^{(2)} \} I_0(\beta a) + \beta a I_1(\beta a) F^{(2)} \} d\beta = - \frac{2\beta a J_1(\alpha_s a)}{\alpha \alpha_s^2 J^2(\alpha_s a)} \dots (37)$$

境界条件(a-4)と式(24)および式(29)からは、次の関係が得られる。

$$\beta_s G_s^0 - \frac{2}{\{ \beta_s^2 C_1^2(\beta_s b) - \alpha^2 C_1^2(\beta_s a) \}} \int_0^{\infty} \frac{\beta_s \beta}{(\beta^2 + \beta_s^2)} \{ \{ \beta E^{(2)} - 2(\nu_2 - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \beta_s^2}) F^{(2)} \} \{ \beta K_0(\beta b) C_1(\beta_s b) - \alpha K_0(\beta a) C_1(\beta_s a) \} + \beta F^{(2)} \{ \beta^2 K_1(\beta b) C_1(\beta_s b) - \alpha^2 K_1(\beta a) C_1(\beta_s a) \} \} d\beta = 0 \dots (38)$$

半無限円柱と半無限弾性体の接触面における連続条件(b-1), (b-2), (b-3) および(b-4)を満たすためには、肩添字(1)を付した変位および応力をそれぞれFourier積分に展開する必要がある。連続条件(b-2)について示すと、 $r=a$ において $u_{z1}$ および $u_{z2}$ は式(15), (20), (25) および式(31)より、

$$(u_{z1}^{(1)})_{r=a} = \sum_{s=1}^{\infty} G_s^0 \alpha_s^2 Z J_1(\alpha_s a) e^{-\alpha_s z} \dots (39)$$

$$(u_{z1}^{(2)})_{r=a} = \int_0^{\infty} (-\beta) \{ \{ \beta E^{(2)} - 2(1-\nu_1) F^{(2)} \} I_1(\beta a) + \beta a I_0(\beta a) F^{(2)} \} \sin \beta z d\beta \dots (40)$$

$$(u_{z2}^{(2)})_{r=a} = \sum_{s=1}^{\infty} G_s^0 \beta_s^2 Z C_1(\beta_s a) e^{-\beta_s z} \dots (41)$$

$$(u_{z2}^{(2)})_{r=a} = \int_0^{\infty} \beta \{ \{ \beta E^{(2)} + 2(1-\nu_2) F^{(2)} \} K_1(\beta a) + \beta a K_0(\beta a) F^{(2)} \} \sin \beta z d\beta \dots (42)$$

が得られる。式(39)および式(41)において $z$ を含む項をFourier-sine積分に展開すると、

$$G_s^0 \alpha_s^2 Z e^{-\alpha_s z} J_1(\alpha_s a) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_s^0 \alpha_s^3 \beta}{(\beta^2 + \alpha_s^2)^2} J_1(\alpha_s a) \sin \beta z d\beta, \quad G_s^0 \beta_s^2 Z e^{-\beta_s z} C_1(\beta_s a) = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{G_s^0 \beta_s^3 \beta}{(\beta^2 + \beta_s^2)^2} C_1(\beta_s a) \sin \beta z d\beta$$

となるので、式(39)および式(41)は次のように書きなおされる。

$$(u_{z1}^{(1)})_{r=a} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^0 \frac{\alpha_s^3 \beta}{(\beta^2 + \alpha_s^2)^2} J_1(\alpha_s a) \sin \beta z d\beta \dots (39'), \quad (u_{z2}^{(2)})_{r=a} = \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^0 \frac{\beta_s^3 \beta}{(\beta^2 + \beta_s^2)^2} C_1(\beta_s a) \sin \beta z d\beta \dots (41')$$

式(39'), (40), (41')および式(42)より境界条件(b-2)を満たすために次の関係が得られる。

$$\beta^2 I_1(\beta a) E^{(2)} + \beta \{ \beta a I_0(\beta a) - 2(1-\nu_1) I_1(\beta a) \} F^{(2)} + \beta^2 K_1(\beta a) E^{(2)} + \beta \{ \beta a K_0(\beta a) + 2(1-\nu_2) K_1(\beta a) \} F^{(2)} - \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha_s^3 \beta}{(\beta^2 + \alpha_s^2)^2} J_1(\alpha_s a) G_s^0 + \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta_s^3 \beta}{(\beta^2 + \beta_s^2)^2} C_1(\beta_s a) G_s^0 = 0 \dots (43)$$

境界条件(b-4)と式(12), (17), (22)および式(27)より次の関係が得られる。

$$\varepsilon \beta I_0(\beta a) E^{(2)} + \varepsilon \beta a I_1(\beta a) F^{(2)} - \beta K_0(\beta a) E^{(2)} - \beta a K_1(\beta a) F^{(2)} = 0 \dots (44)$$

ここで、 $\varepsilon = G_2/G_1$

境界条件(b-1)と式(13), (18), (23)および式(28)より次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \beta \{ \beta I_0(\beta a) - \frac{1}{\alpha} I_1(\beta a) \} E^{(0)} + \beta \{ \beta a I_1(\beta a) + \frac{4(1-\nu)}{\beta a} I_1(\beta a) - (3-2\nu) I_0(\beta a) \} F^{(0)} - \beta \{ \beta K_0(\beta a) + \frac{1}{\alpha} K_1(\beta a) \} \\ & \times E^{(0)} - \beta \{ \beta a K_1(\beta a) + \frac{4(1-\nu)}{\beta a} K_1(\beta a) + (3-2\nu) K_0(\beta a) \} F^{(0)} + \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\alpha s}{\alpha(\beta^2 + \alpha s^2)} \{ \nu \alpha s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} J_1(\alpha s a) \\ & \times G_s^{(0)} - \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta s}{\alpha(\beta^2 + \beta s^2)} \{ \nu \beta s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} C_1(\beta s a) G_s^{(0)} = 0 \quad (45) \end{aligned}$$

境界条件(b-3)と式(11'), (16), (21')および式(26)から12次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} & \varepsilon \beta I_1(\beta a) E^{(0)} + \varepsilon \{ \beta a I_0(\beta a) - 4(1-\nu) I_1(\beta a) \} F^{(0)} + \beta K_1(\beta a) E^{(0)} + \{ \beta a K_0(\beta a) + 4(1-\nu) K_1(\beta a) \} F^{(0)} \\ & - \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\varepsilon \alpha s}{(\beta^2 + \alpha s^2)^2} \{ \nu \alpha s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} J_1(\alpha s a) G_s^{(0)} + \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\beta s}{(\beta^2 + \beta s^2)^2} \{ \nu \beta s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} C_1(\beta s a) G_s^{(0)} = 0 \quad (46) \end{aligned}$$

したがって、式(37), (38), (43), (44), (45) および式(46)の6群の無限連立一次方程式を解き、未知定数  $G_s^{(0)}$ ,  $G_s^{(1)}$  および未知関数  $E^{(0)}$ ,  $F^{(0)}$ ,  $E^{(1)}$  および  $F^{(1)}$  を数値的に求めることになる。

## 6. 数値計算を行うための式の整理

数値計算を行うために半無限円柱  $a$  をもとにして、 $\frac{b}{a} = e$ ,  $\frac{d}{a} = f$ ,  $\beta = \frac{\bar{\beta}}{a}$  と置き、また未知定数および未知関数を  $\frac{G_s^{(0)}}{a^2} = \bar{G}_s^{(0)}$ ,  $\frac{G_s^{(1)}}{a^2} = \bar{G}_s^{(1)}$ ,  $\frac{F^{(0)}}{a^2 p_0} = \bar{F}^{(0)}$ ,  $\frac{F^{(1)}}{a^2 p_0} = \bar{F}^{(1)}$ ,  $\frac{E^{(0)}}{a^2 p_0} = \bar{E}^{(0)}$ ,  $\frac{E^{(1)}}{a^2 p_0} = \bar{E}^{(1)}$  と置く。さらに改めて、 $\bar{\beta} \rightarrow \beta$ ,  $\bar{G}_s^{(0)} \rightarrow G_s^{(0)}$ ,  $\bar{G}_s^{(1)} \rightarrow G_s^{(1)}$ ,  $\bar{F}^{(0)} \rightarrow F^{(0)}$ ,  $\bar{F}^{(1)} \rightarrow F^{(1)}$ ,  $\bar{E}^{(0)} \rightarrow E^{(0)}$ ,  $\bar{E}^{(1)} \rightarrow E^{(1)}$  と置き直して式(37), (38), (43), (44), (45) および式(46)を無次元化して表わす。

式(43), (44), (45) および式(46)を反復法で解くので、それに適した形にする。まず、式(44)から  $E^{(0)}$  についての関係を得る。

$$E^{(0)} = \frac{1}{K_0(\beta)} \{ \varepsilon I_0(\beta) E^{(0)} + \varepsilon I_1(\beta) F^{(0)} - K_1(\beta) F^{(0)} \} \quad (44')$$

次に式(44')を式(43), (45) および式(46)に代入して  $E^{(0)}$  を消去すると、未知関数  $E^{(0)}$ ,  $F^{(0)}$  および  $F^{(1)}$  に関する次のような式が得られる。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_0(\beta) F^{(0)} \\ I_0(\beta) E^{(0)} \\ K_1(\beta) F^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \{ (1-\varepsilon) \beta I_0(\beta) / I_0(\beta) - 4(1-\nu) I_1(\beta) / I_0(\beta) - \beta (3-2\nu) \} K_0(\beta) / K_1(\beta) - \varepsilon \beta I_1(\beta) / I_0(\beta) \\ a_{12} &= \{ \beta^2 (1-\varepsilon) - \beta I_1(\beta) / I_0(\beta) \} K_0(\beta) / K_1(\beta) - \varepsilon \beta \\ a_{13} &= \beta - \beta (3-2\nu) \{ K_0(\beta) / K_1(\beta) \}^2 - 4(1-\nu) K_0(\beta) / K_1(\beta) \end{aligned} \right\} \dots (48)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{21} &= \{ \beta - 2(1-\nu) I_1(\beta) / I_0(\beta) \} K_0(\beta) / K_1(\beta) + \varepsilon \beta I_1(\beta) / I_0(\beta) \\ a_{22} &= \beta \{ I_1(\beta) / I_0(\beta) \} \{ K_0(\beta) / K_1(\beta) \} + \varepsilon \beta \\ a_{23} &= \beta \{ K_0(\beta) / K_1(\beta) \}^2 + 2(1-\nu) K_0(\beta) / K_1(\beta) - \beta \end{aligned} \right\} \dots (49)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{31} &= \varepsilon \{ \beta - 4(1-\nu) I_1(\beta) / I_0(\beta) \} K_0(\beta) / K_1(\beta) + \varepsilon \beta I_1(\beta) / I_0(\beta) \\ a_{32} &= \varepsilon \beta \{ I_1(\beta) / I_0(\beta) \} \{ K_0(\beta) / K_1(\beta) \} + \varepsilon \beta \\ a_{33} &= \beta \{ K_0(\beta) / K_1(\beta) \}^2 + 4(1-\nu) K_0(\beta) / K_1(\beta) - \beta \end{aligned} \right\} \dots (50)$$

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{K_0(\beta)}{K_1(\beta)} \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(0)} J_1(\lambda s) \frac{\lambda s}{(\beta^2 + \lambda s^2)^2} \{ \nu \lambda s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} + \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} C_1(\beta s) \frac{\beta s}{(\beta^2 + \beta s^2)^2} \{ \nu \beta s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} \right\} \\ b_2 &= \frac{K_0(\beta)}{K_1(\beta)} \left\{ \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(0)} J_1(\lambda s) \frac{\lambda s}{(\beta^2 + \lambda s^2)^2} - \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} C_1(\beta s) \frac{\beta s}{(\beta^2 + \beta s^2)^2} \right\} \\ b_3 &= \frac{K_0(\beta)}{K_1(\beta)} \left\{ \varepsilon \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(0)} J_1(\lambda s) \frac{\lambda s}{(\beta^2 + \lambda s^2)^2} \{ \nu \lambda s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} - \frac{4}{\pi} \sum_{s=1}^{\infty} G_s^{(1)} C_1(\beta s) \frac{\beta s}{(\beta^2 + \beta s^2)^2} \{ \nu \beta s^2 - (1-\nu) \beta^2 \} \right\} \end{aligned} \right\} (51)$$

式(47)において未知関数に変形Bessel関数を掛けた理由は、未知関数に掛かる係数に含まれる変形Bessel関数がそれぞれの比の形で表わされるようにし、それによって、桁落ちの影響を緩和して反復法における解の収束を助けるためである。さらに

$$A1 = a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}, \quad B1 = a_{13} a_{32} - a_{12} a_{33}, \quad C1 = a_{12} a_{23} - a_{13} a_{22}$$

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= a_{23} a_{31} - a_{21} a_{33} \quad , \quad B_2 = a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31} \quad , \quad C_2 = a_{13} a_{21} - a_{11} a_{23} \\ A_3 &= a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31} \quad , \quad B_3 = a_{12} a_{31} - a_{11} a_{32} \quad , \quad C_3 = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

と置くと、未知関数  $F(\beta)$ ,  $E(\beta)$  および  $F(\beta)$  は次式で求められる。

$$I_0(\beta) \cdot F(\beta) = (b_1 \cdot A_1 + b_2 \cdot B_1 + b_3 \cdot C_1) / \Delta \quad - - - - - (53)$$

$$I_0(\beta) \cdot E(\beta) = (b_1 \cdot A_2 + b_2 \cdot B_2 + b_3 \cdot C_2) / \Delta \quad - - - - - (54)$$

$$K_1(\beta) \cdot F(\beta) = (b_1 \cdot A_3 + b_2 \cdot B_3 + b_3 \cdot C_3) / \Delta \quad - - - - - (55)$$

ここで、 $\Delta = a_{11} \cdot A_1 + a_{12} \cdot A_2 + a_{13} \cdot A_3$

式(37)および式(38)を無次元化したものを示すと次のようである。

$$G_5^{(0)} = \frac{2}{\pi(\lambda_5)} \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2 + \lambda_5^2} \left[ \beta I_0(\beta) E(\beta) + \left\{ \beta \frac{I_0(\beta)}{I_0(\beta)} + 2 \left( \nu_1 - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \lambda_5^2} \right) \right\} I_0(\beta) F(\beta) \right] d\beta - \frac{2\beta J_1(\beta \lambda_5)}{\lambda_5^2 \pi(\lambda_5)} \quad \dots (56)$$

$$\begin{aligned} G_5^{(0)} &= \frac{2}{e^2 \zeta^2(e\beta_5) - \zeta^2(\beta_5)} \int_0^\infty \frac{\beta}{\beta^2 + \beta_5^2} \left[ \beta \{ e \zeta(e\beta_5) \frac{K_0(\beta)}{K_1(\beta)} - \zeta(\beta_5) \frac{K_0(\beta)}{K_1(\beta)} \} K_1(\beta) E(\beta) + \beta (e^2 \zeta(e\beta_5) \right. \\ &\quad \times \left. \frac{K_1(\beta)}{K_1(\beta)} - \zeta(\beta_5) \} - 2 \left( \nu_2 - \frac{\beta^2}{\beta^2 + \beta_5^2} \right) (e \zeta(e\beta_5) \frac{K_0(\beta)}{K_1(\beta)} - \zeta(\beta_5) \frac{K_0(\beta)}{K_1(\beta)}) \} K_1(\beta) F(\beta) \right] d\beta \quad \dots (57) \end{aligned}$$

## 7. 数値計算例

半無限円柱と半無限弾性体との材料定数を等しく置くことにより表面に円形に分布した一様圧力を受ける半無限弾性体そのものの応力問題に帰着されるという性質があるので、まず、数値結果の精度および収束の良否を検討するために  $\nu_1 = \nu_2 = 0.25$ ,  $G_1 = G_2$  した場合について計算を行った。その計算においては、荷重分布半径  $d$  と円柱の半径  $a$  との比  $d/a$  を 0.4 とし、級数の項数を 40 項取り、 $0 \sim \infty$  の積分は  $10^{-4} \sim 160a$  の区間とし、それを 1500 等分割して Simpson の 1/3 則を用いて数値計算を行った。この場合に未知定数および未知関数を求めるために約 6,000 元連立一次方程式を解くことが必要となり、それには反復法を用いた。得られた変位および応力に関する数値結果と Ahlwin and Ulevy (1962) の数値結果と比較するとあまり一致しておらず、本研究で得られた数値結果は、まだ十分に収束していないように思われる。特に半無限円柱の端面および半無限弾性体の表面付近における収束は非常に遅いようである。図-2 には十分に収束した結果ではないがせん断応力  $\tau_{rz}$  の分布を示した。

## 8. あとがき

半無限弾性体中に埋め込まれた半無限円柱がその端面に円形に分布した一様圧縮荷重を受けた場合の軸対称 3 次元応力問題を H. Neuber の解に基づいて解析した。数値計算においては、まだ収束の良い結果が得られていないが、現在、積分区間を  $10^{-4} \sim 170a$  とし、その区間を 1600 不等分割して、0 の近傍におけるききみ幅をききめて小さく取り、漸次ききみ幅を大きくしていくという数値積分法を用いて計算を続行している。半無限円柱と半無限弾性体との材料定数が異なる場合についての計算結果は発表会当日、報告する予定である。

## 参考文献

- 1) Sneddon, I.N. : Fourier Transforms, pp.450~473, McGraw-Hill, 1951
- 2) Muki, R. : Asymmetric problems of the theory of elasticity for a Semi-infinite solid and a thick plate, Progress in solid Mechanics, pp.401-439, North-Holland, 1956
- 3) 能野純雄・松岡健一: 鉤筋付着強度試験における付着応力の分布に関する理論的研究, 土木学会第 25 回年次学術講演会, 第 V 部, pp.15-18, 昭 45-11
- 4) 金林 光: 巻立円形堅坑の応力分布, 日本鋳業會誌, 第 65 巻 733 号, pp.118-123, 昭 24-4-5
- 5) 奥村 勇: 円柱を含む無限厚板の軸対称応力解析について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第 3 号, pp.175-180, 昭 51-2
- 6) 宮本 博: 3次元弾性論, p.17, 裳華房, 昭 42

