

せん断変形を考慮した平板の初期衝撃応答について

北大 工学部 正員 能町 純雄
北大 工学部 学生員 岸 徳光
北大 工学部 学生員 〇川上 博史

1. まえがき

矩形はりに関する衝撃応答問題は Timoshenko ばり理論を用いることによって充分解析可能なものとなつた。はり要素と板要素との結合された構造物が多くなっている今日はりと同様に板要素についても衝撃の問題を考えることは意味のある事と考える。本論文では、一対辺単純支持他端無限なる矩形板を考え、この矩形板の幅方向に sinusoidal、軸方向に gauss 分布の局部的初期力積荷重が作用した場合について Lagrange の曲げ理論にせん断変形と回転慣性を考慮する Mindlin Plate theory を用いて解析し、その挙動について把握するものである。

2. 解析理論

図-1 のような一対辺単純支持された矩形板をとりだし、幅 B 、板厚 h 、そして板のたわみを w とする。Mindlin Plate theory による基礎微分方程式は、次の様になる。

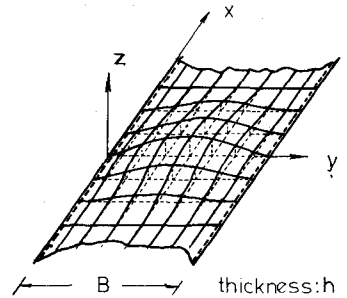


図-1

$$\left. \begin{aligned} G^* h (\Phi + \nabla^2 w) &= \rho h \frac{\partial w}{\partial t} \\ \frac{D}{2} [(1-\mu) \nabla^2 \theta_1 + (1+\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial x}] - G^* h (\theta_1 + \frac{\partial w}{\partial x}) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} \\ \frac{D}{2} [(1-\mu) \nabla^2 \theta_2 + (1+\mu) \frac{\partial \Phi}{\partial y}] - G^* h (\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y}) &= \frac{\rho h^3}{12} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \end{aligned} \right\} \text{---(1)}$$

ただし θ_1, θ_2 は それぞれ x, y 方向の回転角を与える関数。

$$D = \frac{G^* h^3}{6(1-\mu)}, \quad \Phi = \frac{\partial \theta_1}{\partial x} + \frac{\partial \theta_2}{\partial y}, \quad \nabla^2: \text{Laplace's operator}, \quad G^* = K G, \quad \mu = \frac{\nu}{1-\nu}$$

G^* : ねじり剛性, ν : ポアソソ比, K : ポアソソ比を含むところの定数。

(1) 式を展開し、 $e^{-\alpha x}$ を乗じ $0 \sim \infty$ の区間でラプラス変換を施す。境界条件として $w = \dot{w} \sin \frac{\pi}{B} y \cdot e^{-\alpha x}$ [x 方向に gauss 分布, y 方向に sinusoidal 分布] のみが存在すると仮定する。また 初期条件として、 $w_{t=0} = 0, \theta_{1,t=0} = 0, \theta_{2,t=0} = 0$ とする。

$$G^* h \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{L}[w] + G^* h \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{L}[\theta_1] + G^* h \frac{\partial}{\partial y} \mathcal{L}[\theta_2] = \rho h \mathcal{L}[w] - \dot{w} \sin \frac{\pi}{B} y \cdot e^{-\alpha x} \quad \text{---(2)}$$

$$\begin{aligned} \{ -G^* h \frac{\partial}{\partial x} \} \mathcal{L}[w] + \{ D \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G^* h \} \mathcal{L}[\theta_1] + \{ \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \} \mathcal{L}[\theta_2] \\ = \frac{\rho h^3}{12} \mathcal{L}[\dot{\theta}_1] - \dot{\theta}_1 \sin \frac{\pi}{B} y \cdot e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad \text{---(3)}$$

$$\begin{aligned} \{ -G^* h \frac{\partial}{\partial y} \} \mathcal{L}[w] + \{ \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \} \mathcal{L}[\theta_1] + \{ \frac{D(1-\mu)}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D \frac{\partial^2}{\partial y^2} - G^* h \} \mathcal{L}[\theta_2] \\ = \frac{\rho h^3}{12} \mathcal{L}[\dot{\theta}_2] - \dot{\theta}_2 \sin \frac{\pi}{B} y \cdot e^{-\alpha x} \end{aligned} \quad \text{---(4)}$$

$\theta = 0$ とし、 x 方向に Fourier 変換を施す。ただし、(2) 式、(4) 式に cosine 変換、(3) 式に sine 変換を行う。

$$\begin{pmatrix}
(G'h m^2 + G'h \frac{\pi^2}{B^2} + p'h \Delta^2) & -G'h m & G'h \frac{\pi}{B} \\
G'h m & -\left\{ Dm^2 + \frac{D(1-\mu)}{2} \frac{\pi^2}{B^2} + G'h + \frac{p'h^3}{12} \Delta^2 \right\} & \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\pi}{B} \\
-G'h \frac{\pi}{B} & \frac{D(1+\mu)}{2} \frac{\pi}{B} & -\left\{ \frac{D(1-\mu)}{2} m^2 + D \frac{\pi^2}{B^2} + G'h + \frac{p'h^3}{12} \Delta^2 \right\}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathcal{L}C_m[W] \\
\mathcal{L}S_m[\theta_1] \\
\mathcal{L}C_m[\theta_2]
\end{pmatrix}
= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-m^2/4a}
\begin{pmatrix}
F_x \\
0 \\
0
\end{pmatrix}
\quad \text{-----}(5)$$

ただし, $p'h \cdot W = F_x, \int_0^\infty e^{-ax^2} \cos mx \cdot x \cdot dx = C_m [e^{-ax^2}] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-m^2/4a}$

(5)式において, 質量マトリックスを分離して固有方程式を導く,

$$G'h \begin{pmatrix}
\kappa^2 m^2 + \kappa^2 \frac{\pi^2}{B^2} & -\kappa^2 & \kappa^2 \frac{\pi}{B} \\
-\frac{\kappa^2}{f^2} m & \frac{\kappa^2}{f^2} + \frac{G_s^2}{C_s^2} m^2 + \frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1-\mu}{2} \frac{\pi^2}{B^2} & -\frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m \\
\frac{\kappa^2 \pi}{f^2 B} & -\frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m & \frac{\kappa^2}{f^2} + \frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1-\mu}{2} m^2 + \frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{\pi^2}{B^2}
\end{pmatrix}
+ \frac{\Delta^2}{C_s^2} \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathcal{L}C_m[W] \\
\mathcal{L}S_m[\theta_1] \\
\mathcal{L}C_m[\theta_2]
\end{pmatrix}
= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-m^2/4a}
\begin{pmatrix}
F_x \\
0 \\
0
\end{pmatrix}
\quad \text{-----}(6)$$

ただし, $C_p^2 = \frac{2(1-\nu)G}{(1-2\nu)p}, C_s^2 = \frac{G}{p}, f^2 = \frac{R^2}{12}$

(6)式において右辺を零とおくことより, 左辺のマトリックス *determinant* 零として 固有値を求めることができる。

(6)式のマトリックスを一つに整理して,

$$G'h \begin{pmatrix}
\kappa^2 m^2 + \kappa^2 \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{\Delta^2}{C_s^2} & -\kappa^2 & \kappa^2 \frac{\pi}{B} \\
-\frac{\kappa^2}{f^2} m & \frac{\kappa^2}{f^2} + \frac{G_s^2}{C_s^2} m^2 + \frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1-\mu}{2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{\Delta^2}{C_s^2} & -\frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m \\
\frac{\kappa^2 \pi}{f^2 B} & -\frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m & \frac{\kappa^2}{f^2} + \frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{1-\mu}{2} m^2 + \frac{G_s^2}{C_s^2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{\Delta^2}{C_s^2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathcal{L}C_m[W] \\
\mathcal{L}S_m[\theta_1] \\
\mathcal{L}C_m[\theta_2]
\end{pmatrix}
= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-m^2/4a}
\begin{pmatrix}
F_x \\
0 \\
0
\end{pmatrix}
\quad \text{-----}(7)$$

$L[C_m[W]]$ についてだけ求めることにする

$$L[C_m[W]] = \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{-m^2/4a} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F_k A_1}{A} \right] \right\} \quad \text{----- (8)}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{-m^2/4a} \left\{ \begin{array}{ccc} k^2 + \frac{C_p^2}{f^2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} & - \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m & \\ - \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m & \frac{k^2}{f^2} + \frac{C_p^2}{f^2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} & - \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m \\ \frac{k^2 \pi}{f B} & - \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m & \frac{k^2}{f} + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} \end{array} \right\}$$

(8)式の F_k について右方向にラプラスの逆変換を行う。(6)式より得らるる $\Delta = \pm \Delta_1, \pm \Delta_2, \pm \Delta_3$ なる6つの単極が存在している故に留数計算により解を得ることかできることより求める。

$$C_m[W] = \frac{1}{2\sqrt{a}} e^{-m^2/4a} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F_k A_1}{A} \right] \right\} \quad \text{----- (9)}$$

ただし, A, A_1 はそれぞれ下に示す determinant とする

$$A = \begin{vmatrix} k^2 m^2 + k^2 \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} & -k^2 & k^2 \frac{\pi}{B} \\ -\frac{k^2}{f^2} m & \frac{k^2}{f^2} + \frac{C_p^2}{f^2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} & -\frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m \\ \frac{k^2 \pi}{f B} & -\frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m & \frac{k^2}{f} + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} \end{vmatrix}$$

$$A_1 = \begin{vmatrix} \frac{k^2}{f^2} + \frac{C_p^2}{f^2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} & -\frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m \\ -\frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} \frac{\pi}{B} m & \frac{k^2}{f} + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} \end{vmatrix}$$

さらに A_2, A_3 の determinant を次のようにすると

$$A_2 = \begin{vmatrix} k^2 m^2 + k^2 \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} & k^2 \frac{\pi}{B} \\ \frac{k^2 \pi}{f B} & \frac{k^2}{f} + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} \end{vmatrix}, \quad A_3 = \begin{vmatrix} k^2 m^2 + k^2 \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} & -k^2 \\ -\frac{k^2}{f^2} m & \frac{k^2}{f} + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{1+\mu}{2} m^2 + \frac{C_p^2}{C_s^2} \frac{\pi^2}{B^2} + \frac{A_1^2}{C_s^2} \end{vmatrix}$$

(9)式は

Leaviside の展開定理より

$$C_m[W] = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \frac{e^{-m^2/4a}}{G \cdot h} \sum_{i=1}^3 \frac{A_i}{\frac{A_i}{C_s^2} \{A_1 + A_2 + A_3\}} F_k \cdot \sin st \quad \text{----- (10)}$$

(10)式を x 方向に逆変換すると ためみ W は

$$W = \sin \frac{\pi y}{B} \cdot \frac{C_s}{\sqrt{a} G h} \int_0^{\infty} \sum_{\Delta = \pm \Delta_1, \pm \Delta_2, \pm \Delta_3} \frac{A_i}{\frac{A_i}{C_s^2} \{A_1 + A_2 + A_3\}} \{F_k \cdot \sin st\} \cdot e^{-m^2} \cdot \cos m x \, dm \quad \text{----- (11)}$$

3. 数値計算例

板厚 $h=1\text{ cm}$ ，板幅 $B=50H$ の鋼矩形板(SM41)を用いる。

① (6)式より得られた固有値より位相速度 C を求め、古典理論より得られるものと比較した位相速度分散曲線を図-2に示す。

② 板の許容曲げモーメントより得られた初期粒子速度($V_0=4.211\text{ m/sec}$)を用い、(11)式を m で数値積分して求められた板($y=B/2$)の分散状態を図-3に示す。

4. まとめ

以上より、mindlin Plate theory より得られる位相速度と、古典理論によるものとの違いを図化することにより、明確にできた。また、対辺単純支持他端無限板に初期力積荷重のある場合の時間的な分散性状を図化することができた。

参考文献

R.D.MINDLIN: Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates

H.Reissmann : Moving Load on an Elastic Plate Strip

F.C.Moon : One-Dimensional Transient Waves in Anisotropic Plates

Morse : Vibration and Sound

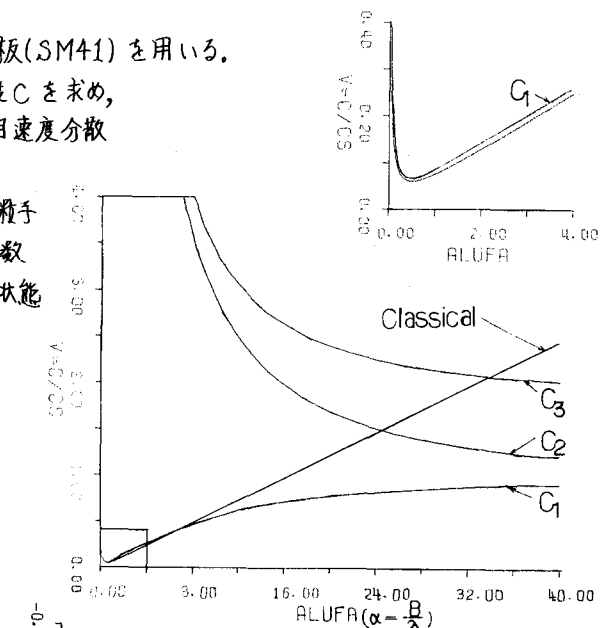


図-2 位相速度分散曲線

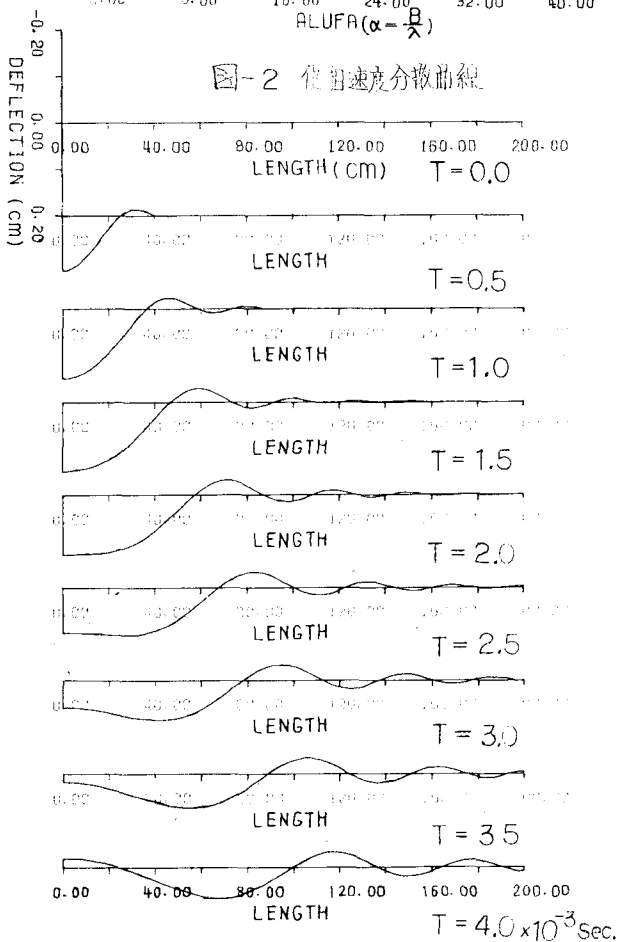


図-3 板の分散挙動