矩形板の曲げ波動伝播について

北海道大学工学部　正員　能町 純雄
北海道大学工学部　学生員　岸 徳光
北海道大学工学部　学生員　○橋本 哲

1 まえがき

棒状体を伝播する曲げたわみ波動は古典曲げ理論に回転慣性とせん断変形を考慮するTimoshenkoばりによって平面保持を仮定しながら高周波領域まで適用範囲を拡張することができた。また弾性板の曲げ波動については、Mindlinは同様の考え方による拡張を試みている。

古典理論によれば、板幅が板厚の10倍以上の場合はいいが、板幅の狭い断面の場合はよい結果が得られていないし、波長が無限小になると分散速度が無限大になるといった不合理な面がある。本論文では、板の厚さ方向のせん断変形を考慮したMindlin Plate Theoryを用いて対辺自由無限板の対称波動、逆対称波動の固有方程式を誘導する。

2 理論解析

3次元弾性論による応力を σ_x, σ_y, σ_z, せん断力を τ_{xy}, τ_{yz}, τ_{zx} 変位を $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ とすると、つり合い式は慣性力を考慮すると

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}&=\rho\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}\\
\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z}&=\rho\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial t^2}\\
\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}&=\rho\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

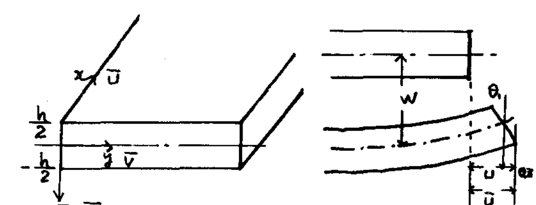

図1

ρ: 単位体積質量

ここで応力は次のように表わすことができる。

$$\sigma_x=(2G+\lambda)\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \bar{w}}{\partial z},\quad \tau_{xy}=G\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_y=(2G+\lambda)\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\lambda\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \bar{w}}{\partial z},\quad \tau_{yz}=G\left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial z}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_z=(2G+\lambda)\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}+\lambda\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\lambda\frac{\partial \bar{v}}{\partial y},\quad \tau_{zx}=G\left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}\right)$$

ここで　λ: Lámeの定数, $G=\frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

面内変位は線形変化と仮定し、次のようになる。

$\bar{u}=u+\theta_1 z$, $\bar{v}=v+\theta_2 z$, $\bar{w}=w=const.$

θ_1, θ_2 は変化率とする。（図1）

板のx, y軸のまわりの曲げモーメントを M_x, M_y, ねじりモーメント M_{yx}, せん断力を Q_x, Q_y とすると曲げ波動であるから

$$M_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_x\cdot z\,dz=(2G+\lambda)\frac{h^3}{12}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}+\lambda\frac{h^3}{12}\frac{\partial \theta_2}{\partial y}$$
$$=D\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial x}+\nu^*\frac{\partial \theta_2}{\partial y}\right)$$

$$M_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\sigma_y\cdot z\,dz=(2G+\lambda)\frac{h^3}{12}\frac{\partial \theta_2}{\partial y}+\lambda\frac{h^3}{12}\frac{\partial \theta_1}{\partial x}$$
$$=D\left(\frac{\partial \theta_2}{\partial y}+\nu^*\frac{\partial \theta_1}{\partial x}\right)$$

$$M_{yx}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xz}\cdot z\,dz=GI\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial y}+\frac{\partial \theta_2}{\partial x}\right)$$

$$Q_x=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{xz}\,dz=GI\left(\theta_1+\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}\right)$$

$$Q_y=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\tau_{yz}\,dz=GI\left(\theta_2+\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}\right)$$

$$D=\frac{h^3}{12}(2G+\lambda),\quad \nu^*=\frac{\lambda}{D}$$

一方 M_x, M_y, M_{yx}, Q_x, Q_y の曲げつり合い式は次のように

なる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial y}-Q_x &= \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\\
\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}-Q_y &= \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\\
\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y} &= \frac{\rho h^3}{12}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2}
\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

$M_x, M_y, M_{yx}, Q_x, Q_y$ を(2)代入すると

$$\frac{\mathbb{E}I}{2}\left[(1-\nu^*)\nabla^2\theta_1+(1+\nu^*)\frac{\partial}{\partial x}\Phi\right]-Gh\left(\theta_1+\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)=\rho I\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2}\quad(3)$$

$$\frac{\mathbb{E}I}{2}\left[(1-\nu^*)\nabla^2\theta_2+(1+\nu^*)\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right]-Gh\left(\theta_2+\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)=\rho I\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2}\quad(4)$$

$$G[\nabla^2\bar{w}+\Phi]=\rho\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2}\quad(5)$$

ここで $\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, $\Phi=\frac{\partial\theta_1}{\partial x}+\frac{\partial\theta_2}{\partial y}$

$\nu^*=\frac{\nu}{1-\nu}$, $\mathbb{E}=\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

(3)(4)より

$$\frac{\partial(3)}{\partial x}+\frac{\partial(4)}{\partial y}$$

$$\left(\mathbb{E}I\nabla^2-Gh-\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi=Gh\nabla^2\bar{w}\quad(6)$$

(5)より

$$\Phi=\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2\bar{w}}{\partial t^2}-\nabla^2\bar{w}\quad(7)$$

(6)(7)より

$$\left(\mathbb{E}I\nabla^2-\rho I\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2-\frac{\rho}{G}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\bar{w}+\rho h\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{w}=0\quad(8)$$

(8)において $\mathbb{E}I$ で割ると

$$\left(\nabla^2-\frac{1}{c_p^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2-\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\bar{w}+\frac{1}{r_p^2\nabla_p^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\bar{w}=0\quad(9)$$

c_p: たて波, c_s: せん断波. $\nabla_p=\frac{c_p}{c_s}$, $\nabla=\frac{c}{c_s}$

特別解を求める

$w=We^{\lambda y}\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$ とおいて(9)式を解くと

$$\left\{\lambda^2-\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2+\frac{c^2}{c_p^2}\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2\right\}\left\{\lambda^2-\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2+\frac{c^2}{c_s^2}\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2\right\}-\frac{c^2}{r_p^2c_p^2}\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2=0$$

$\alpha=\frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\ell}}$ とおくと

$$\left\{\alpha^2-1+\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}\left\{\alpha^2-1+\nabla^2\right\}-\frac{\nabla^2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}=0$$

$$\alpha_{1,2}^2=-\frac{\nabla^2}{2}\left(1+\frac{1}{\nabla_p^2}\right)+1\pm\sqrt{\frac{\nabla^4}{4}\left(1-\frac{1}{\nabla_p^2}\right)^2+\frac{\nabla^2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}}\quad(10)$$

よって

$$\bar{w}=[W_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y+W_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_1y+W_3\,\mathrm{ch}\,\lambda_2y+W_4\,\mathrm{sh}\,\lambda_2y]\times\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)\quad(11)$$

となる。

$\bar{w}=W_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$ と仮定すると $\Phi=\Phi_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y$ $\times\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$ とおけるから(7)より

$$\left\{\alpha_1^2-1-\frac{1}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}\Phi_1=\frac{1}{r_p^2\nabla_p^2}(\alpha_1^2-1)W_1$$

$\Phi=\Phi'W$ とすると。

$$\Phi_1'=\frac{\frac{1}{r_p^2\nabla_p^2}(\alpha_1^2-1)}{\left\{\alpha_1^2-1-\frac{1}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}}$$

λ_2も同様に

$$\Phi''=\frac{\frac{1}{r_p^2\nabla_p^2}(\alpha_2^2-1)}{\left\{\alpha_2^2-1-\frac{1}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}}$$

$$\Phi=[\Phi'(W_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y+W_2\,\mathrm{sh}\,\lambda_1y)+\Phi''(W_3\,\mathrm{ch}\,\lambda_2y+W_4\,\mathrm{sh}\,\lambda_2y)]\times\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)\quad(12)$$

(3)より

$\bar{w}=W_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$, $\Phi=\Phi'W_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y\cdot\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$

と仮定すれば

$\theta_1=\Theta_{11}\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y\cos\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$ とおくことができるから

$$\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2\left\{(1-\nu^*)(\alpha_1^2-1)-\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+2\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}\Theta_{11}=\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)\left\{-(1+\nu^*)\Phi'+\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2}\right\}W_1$$

$\Theta_{11}=\Theta_1'W_1$ とすると

$$\Theta_1'=\frac{-(1+\nu^*)\Phi'+\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2}}{\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)\left\{(1-\nu^*)(\alpha_1^2-1)-\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+2\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}}\quad(13)$$

同様に λ_2 についても

$$\Theta_1''=\frac{-(1+\nu^*)\Phi''+\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2}}{\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)\left\{(1-\nu^*)(\alpha_2^2-1)-\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+2\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}}\quad(14)$$

θ_2についても θ_1と同様に

$\bar{w}=W_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y\cdot\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$, $\Phi=\Phi'W_1\,\mathrm{ch}\,\lambda_1y\cdot\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$

と仮定すれば

$\theta_2=\Theta_{21}\,\mathrm{sh}\,\lambda_1y\cdot\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$ とおくことができるから

$$\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2\left\{(1-\nu^*)(\alpha_1^2-1)-\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+2\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}\Theta_{21}=\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)\alpha_1\times\left\{-(1+\nu^*)\Phi'+\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2}\right\}W_1$$

$\Theta_{21}=\Theta_2'W$ とすると

$$\Theta_2'=\frac{\alpha_1\left\{-(1+\nu^*)\Phi'+\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2}\right\}}{\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)\left\{(1-\nu^*)(\alpha_1^2-1)-\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+2\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}}\quad(15)$$

同様に λ_1 についても

$$\Theta_2''=\frac{\alpha_1\left\{-(1+\nu^*)\Phi'+\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2}\right\}}{\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)\left\{(1-\nu^*)(\alpha_1^2-1)-\frac{2}{r_p^2\nabla_p^2\left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2}+2\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right\}}\quad(16)$$

次に一般解を求める

(3)(4)を EI で割って

$$(1-\nu^*)\nabla^2\theta_1 + 2\frac{C_s^2}{C_p^2 r_p^2}\theta_1 - \frac{2}{C_p^2}\frac{\partial^2\theta_1}{\partial t^2} = 0 \qquad (17)$$

$$(1-\nu^*)\nabla\theta_2 + 2\frac{C_s^2}{C_p^2 r_p^2}\theta_2 - \frac{C}{C_p^2}\frac{\partial^2\theta_2}{\partial t^2} = 0 \qquad (18)$$

$\theta_1 = \Theta_1''' e^{\lambda_3 y}\cos\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$ として (17) に代入すれば

$$(1-\nu^*)(\alpha_3^2-1) - \frac{2}{\nabla_p^2 r_p^2 (\frac{2\pi}{\ell})^2} + 2\frac{\nabla^2}{\nabla_p^2} = 0$$

$$\alpha_3^2 = 2\left(\frac{1}{\nabla_p^2 r_p^2 (\frac{2\pi}{\ell})^2} - \frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right)\frac{1}{1-\nu^*} + 1 \qquad (19)$$

同様に $\theta_2 = \Theta_2''' e^{\lambda_3 y}\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct)$ として (18) に代入すれば

$$\alpha_3^2 = 2\left(\frac{1}{\nabla_p^2 r_p^2 (\frac{2\pi}{\ell})^2} - \frac{\nabla^2}{\nabla_p^2}\right)\frac{1}{1-\nu^*} + 1$$

となり (19) に一致する.

ここで λ_3 については θ_1, θ_2 は $\Phi = \frac{\partial\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial\theta_2}{\partial y}$ において $\Phi = 0$ を満足するから

$$\left(-\frac{2\pi}{\ell}\Theta_1''' + \lambda_3\Theta_2'''\right)e^{\lambda_3 y}\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct) = 0$$

$$\Theta_2''' = \frac{\frac{2\pi}{\ell}}{\lambda_3}\Theta_1''' = \frac{1}{\alpha_3}\Theta_1''' \qquad (20)$$

以上より w, θ_1, θ_2 は次の形で表わせる.

$$w = \{W_1 ch\lambda_1 y + W_2 sh\lambda_1 y + W_3 ch\lambda_2 y + W_4 sh\lambda_2 y\} \times \sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct) \qquad (21)$$

$$\theta_1 = \{\Theta_1'(W_1 ch\lambda_1 y + W_2 sh\lambda_1 y) + \Theta_1''(W_3 ch\lambda_2 y + W_4 sh\lambda_2 y) + \Theta_1'''(ch\lambda_3 y + sh\lambda_3 y)\}\cos\frac{2\pi}{\ell}(x-ct) \qquad (22)$$

$$\theta_2 = \{\Theta_2'(W_1 sh\lambda_1 y + W_2 ch\lambda_1 y) + \Theta_2''(W_3 sh\lambda_2 y + W_4 ch\lambda_2 y) + \Theta_2'''(\Theta_{15}''' sh\lambda_3 y + \Theta_{16}''' ch\lambda_3 y)\}\sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct) \qquad (23)$$

これで各変位成分が求まった。これらを断面力の式に代入して境界における変位断面力の関係式を求める.

なお Mindlin Plate は古典理論と異なり3つの境界断面力が求まることができる.

せん断力について

$Q_y = Gh\left(\theta_2 + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$ に代入して

$$Q_y = \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)Gh\left[Q_y'(W_1 sh\lambda_1 y + W_2 ch\lambda_1 y) + Q_y''(W_3 sh\lambda_2 y + W_4 ch\lambda_2 y) + Q_y'''(\Theta_{15}''' sh\lambda_3 y + \Theta_{16}''' ch\lambda_3 y)\right] \times \sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct) \qquad (24)$$

曲げモーメントについて

$M_y = EI\left(\frac{\partial\theta_2}{\partial y} + \nu^*\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\right)$ に代入して

$$M_y = \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 EI\left[M_y'(W_1 ch\lambda_1 y + W_2 sh\lambda_1 y) + M_y''(W_3 ch\lambda_2 y + W_4 sh\lambda_2 y) + M_y'''(\Theta_{15}''' ch\lambda_3 y + \Theta_{16}''' sh\lambda_3 y)\right] \times \sin\frac{2\pi}{\ell}(x-ct) \qquad (25)$$

曲げねじりモーメントについて

$M_{yx} = GI\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial y} + \frac{\partial\theta_2}{\partial x}\right)$ に代入して

$$M_{yx} = \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2 GI\left[M_{yx}'(W_1 sh\lambda_1 y + W_2 ch\lambda_1 y) + M_{yx}''(W_3 sh\lambda_2 y + W_4 ch\lambda_2 y) + M_{yx}'''(\Theta_{15}''' sh\lambda_3 y + \Theta_{16}''' ch\lambda_3 y)\right] \times \cos\frac{2\pi}{\ell}(x-ct) \qquad (26)$$

マトリックス形式に整理すると $|K|[\delta] = \{F\}$ 対辺自由であるから $[\delta] \neq 0$, $\{F\} = 0$ よって $|K| = 0$ より固有方程式を求めることができる.

対称形

$$\det\begin{vmatrix} Q_y' sh\lambda_1 y & Q_y'' sh\lambda_2 y & Q_y''' sh\lambda_3 y \\ M_y' ch\lambda_1 y & M_y'' ch\lambda_2 y & M_y''' ch\lambda_3 y \\ M_{yx}' sh\lambda_1 y & M_{yx}'' sh\lambda_2 y & M_{yx}''' sh\lambda_3 y \end{vmatrix} = 0$$

逆対称

$$\det\begin{vmatrix} Q_y' ch\lambda_1 y & Q_y'' ch\lambda_2 y & Q_y''' ch\lambda_3 y \\ M_y' sh\lambda_1 y & M_y'' sh\lambda_2 y & M_y''' sh\lambda_3 y \\ M_{yx}' ch\lambda_1 y & M_{yx}'' ch\lambda_2 y & M_{yx}''' ch\lambda_3 y \end{vmatrix} = 0$$

以上で固有方程式を誘導することができた. なお. 数値計算例は当日発表の予定である.

参考文献 Mindlin.R.D. Influence of Rotatory Inertia and shear on flexural Motions of Isotropic Elastic Plates : JAM March 1951