

刃層地盤の振動の剛性マトリックスによる解法

— 大阪南港大橋架橋地奥の刃層地盤の振動解析 —

北海道大学工学部 正員 渡辺 昇

北海道大学工学部 正員 金子 孝吉

北海道大学工学部 学生員 ○馬場 敦美

1. まえがき

地盤の振動を解析する方法としては地盤を等価なバネ系モデルに置換する方法、あるいは波動理論による方法有限要素法を適用する方法などがこれまで考えられてきているが、本解析は地盤を柱状のせん断連続体の片持梁に置換して考え、さらにせん断連続体の振動の剛性マトリックスなるものを誘導して、これを刃層地盤の振動の解析に応用するものである。地盤を連続体として解析する場合、固有振動数方程式は刃層になればなるほど複雑な超越方程式となるが、本手法を用いると何層になっても単に剛性マトリックスの重ねあわせで固有振動数を求めることができ、電子計算機プログラム作成の上でも非常に有効である。減衰については相対速度に比例する減衰係数を使用したものと、さらに粘弾性 (Voigt Model) を考慮したものについて考えた。そして実際に観測された地中地震動記録と比較検討を行なった。

2. 連続体のせん断振動の微分方程式とその解

(i) 相対速度に比例する粘性減衰係数を持つ場合

連続体のせん断振動 (自由振動) の微分方程式は (1) 式で表わされる。(Fig1, Fig 2)

$$\rho \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} + c \frac{\partial u(z,t)}{\partial t} - G \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

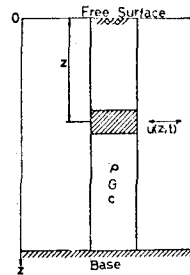


Fig-1

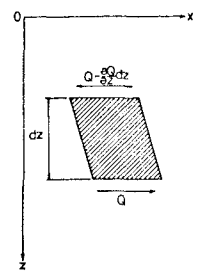


Fig-2

ただし ρ ; 単位重量密度 ($\text{kg} \cdot \text{sec}^2/\text{cm}^4$), c ; 粘性減衰係数 ($\text{kg} \cdot \text{sec}/\text{cm}^4$), G ; せん断弾性係数 (kg/cm^2), $u(z,t)$; 深度 z における時刻 t での水平 x 方向の相対変位 (cm) である。式 (1) の解として次のようなものとする。

$$u(z,t) = Z(z) \cdot T(t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式を適当に微分して (1) 式に代入し $\rho Z(z) \cdot T(t)$ で割って次式のように $-p^2$ とおく。

$$\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} + 2hp \frac{\dot{T}(t)}{T(t)} = \alpha^2 \frac{Z''(z)}{Z(z)} = -p^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで $\alpha^2 = \rho/G$, $2hp = c/\rho$, $h = c/2\rho p$ でありドットは t についての微分, ダッシュは z についての微分を表す。すると次の 2 つの式に分離できる。

$$Z''(z) + \alpha^2 p^2 Z(z) = 0 \quad \dots\dots\dots (4) \quad \ddot{T}(t) + 2hp \dot{T}(t) + p^2 T(t) = 0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

(ii) 粘弾性体 (Voigt Model) とした場合

連続体のせん断振動 (自由振動) の微分方程式は (6) 式で表わされる。

$$\rho \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial t^2} - c \frac{\partial^3 u(z,t)}{\partial t \partial z^2} - G \frac{\partial^2 u(z,t)}{\partial z^2} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

(i) と同様に式 (6) の解として (2) 式のようなものとする。さらに (7) 式のようになる。

$$\frac{G}{\rho} \frac{Z''}{Z} - \frac{\dot{T}/T}{(c/G)\dot{T}/T + 1} = -p^2 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで $\alpha^2 = \rho/G$, $2h\rho = \rho^2 c/G$, $h = c\rho/2G$ とおくと(1)の場合と同じ形の式(4), (5)に分離できる。

3. 連続体のせん断振動の剛性マトリックスと積分定数マトリックス

(4)式の一般解は次のようになる。

$$Z(x) = A \cos \alpha x + B \sin \alpha x \quad \dots\dots\dots(8)$$

ここで A, B は定数である。任意の深さ x におけるせん断応力 Q は次のようになる。

$$Q(x) = G Z'(x) = G(-A \alpha \sin \alpha x + B \alpha \cos \alpha x) \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで Z, Q の符号は Fig-3 に示すものを正とする。(8)式, (9)式において $x=0, x=l$ とし, それぞれマトリックス表示すると(10)式, (11)式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} Z(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$\begin{bmatrix} Z(l) \\ Q(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha l & \sin \alpha l \\ -G\alpha \sin \alpha l & G\alpha \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(11)$$

(10)式, (11)式を变形して次のように表わしたものはそれぞれ等しいから(14)式のように表わされる。

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/G\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha l & -\sin \alpha l / G\alpha \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l / G\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(l) \\ Q(l) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/G\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(0) \\ Q(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha l & -\sin \alpha l / G\alpha \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l / G\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(l) \\ Q(l) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(14)$$

(14)式を書き直すと(15)式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} 1 & -\cos \alpha l \\ 0 & -\sin \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\sin \alpha l / G\alpha \\ -1/G\alpha & \cos \alpha l / G\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(l) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(15)$$

さらに(15)式を变形すると(16)式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ Q(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -G\alpha \cos \alpha l / \sin \alpha l & G\alpha / \sin \alpha l \\ -G\alpha / \sin \alpha l & G\alpha \cos \alpha l / \sin \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(l) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(16)$$

Fig-4において上端 $x=0$ ①, 下端 $x=l$ ②のように番号をつけ Z, Q の符号は Fig-4 のようなものを正とする。すると(16)式において対応する要素の符号が変わり(17)式のようにになる。

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G\alpha / \tan \alpha l & -G\alpha / \sin \alpha l \\ -G\alpha / \sin \alpha l & G\alpha / \tan \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(17)$$

(17)式の右辺の係数マトリックスを“連続体のせん断振動の剛性マトリックス”と呼ぶことにする。また(10)式, (11)式から $Z(0), Z(l)$ をマトリックス表示すると次のようになる

$$\begin{bmatrix} Z(0) \\ Z(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos \alpha l & \sin \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(18)$$

さらに(18)式を变形して $Z(0)=Z_1, Z(l)=Z_2$ と書き直すと

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/\tan \alpha l & 1/\sin \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots(19)$$

となる。(19)式の右辺の係数マトリックスを“連続体のせん断振動の積分定数マトリックス”と呼ぶことにする。以上の結果をまとめて記号で表わすと右上のようにになる。

剛性マトリックス	積分定数マトリックス
$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$
$K_{11} = G\alpha / \tan \alpha l$ $K_{12} = -G\alpha / \sin \alpha l$ $K_{22} = K_{11}, K_{21} = K_{12}$	$R_{11} = 1, R_{12} = 0$ $R_{21} = -1/\tan \alpha l$ $R_{22} = 1/\sin \alpha l$

次に(5)式において基盤からの強制外力を考えると, 右辺は $\ddot{g}(t)$ となる。ここで端 n 次について考えると(20)式のようにになる。

$$\ddot{T}_n(t) + 2h_n \rho_n \cdot \dot{T}_n(t) + \rho_n^2 \cdot T_n(t) = -R_{mn} \ddot{g}(t) \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここで R_{mn} は固有モード型によって1を級数展開した時の係数である。(20)式はラプラス変換などを使って解くことができる。

4. 多層地盤の地震応答解析例

ここで比較の対象とした地中地震動の記録は建設省が大阪市南港埋立地 (Fig-5) において観測したものである。Fig-6 はその地盤の土質状況である。地盤を Fig-7 のように3層に分け、図中のごとく各地盤層の諸定数を決定して、地中 80m 以下を基礎とみなした。

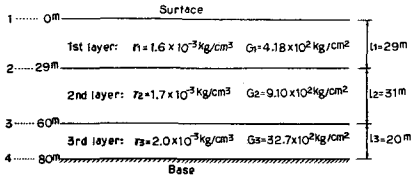
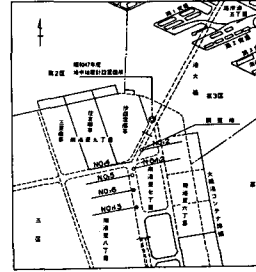
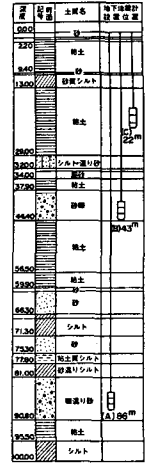


Fig-7



大阪市南港埋立地

Fig-5



土質状況

Fig-6

Table-1 は 1 次から 14 次までの各固有振動数及び固有周期を示している。Fig-8 は地表面の変位を 1 としたときの 1 次から 6 次までの各固有振動モード型である。また、Fig-9, Fig-10 はそれぞれ 2 で述べた (i) の Type, (ii) の Type の応答波を示している。上から相対変位, 相対速度, 絶対加速度応答でそれぞれ 20m おきに示してある。

n	1	2	3	4	5	6	7
f_n	5.20820	13.11709	22.96983	23.67891	35.28334	45.70742	55.74713
T_n (sec)	1.20940	0.47900	0.27917	0.21111	0.15410	0.13747	0.12271
n	8	9	10	11	12	13	14
f_n	63.75132	74.14094	81.81539	90.99982	97.63160	106.56976	114.58230
T_n (sec)	0.08954	0.09475	0.07683	0.06905	0.06430	0.05938	0.05489

Table-1

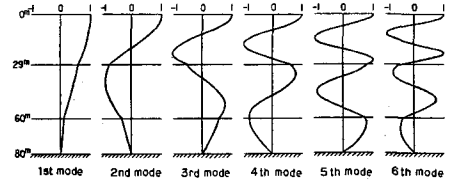


Fig-8

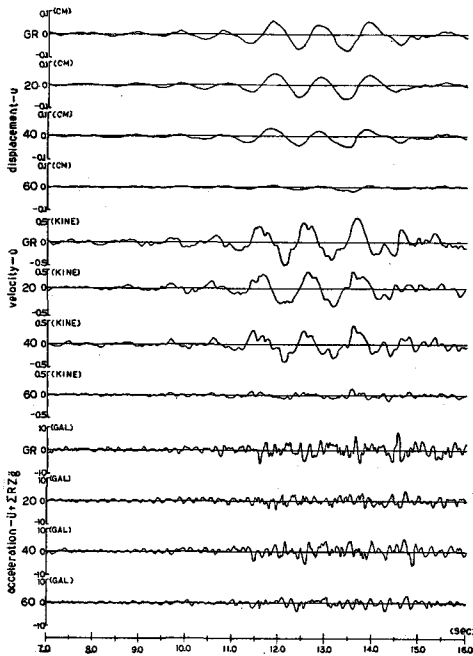


Fig-9

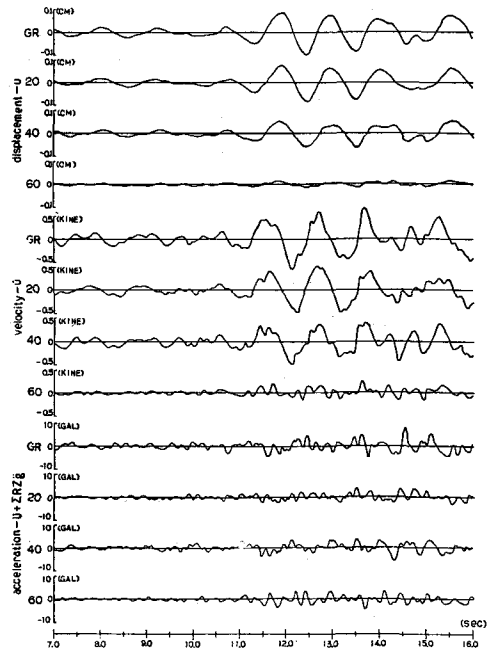


Fig-10

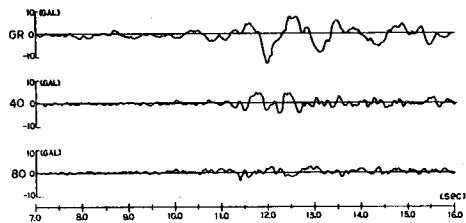


Fig-11

Fig-11は地表面、地下40m、80mでそれぞれ実際に観測された加速度である。本解析例では80mの地奥の加速度を基盤入力波とした。

次にFig-9, Fig-10 のような数値計算によって出した応答波とFig-11に示した実際の観測波との比較を行った。ここでは周期に注目して検討してみた。Fig-12aはFig-11の地表面の観測波の自己相関関数とそれをフーリエ変換したパワースペクトル密度を示している。bはFig-11の40mのものである。同様にFig-13はFig-9の地表面と40mの地奥の応答加速度のa.c.fとp.s.dであり、Fig-14はFig-10の地表面と40mの地奥の加速度のa.c.fとp.s.dである。Fig-12aをみると地表面での観測波の卓越している周期は1秒前後である。Fig-13, Fig-14をみると計算した応答波では短い周期のものもあらわれているが1秒前後の周期がよく選択されているのがわかる。

5. あとがき

本解析法は複雑な多層地盤の地震応答解析を簡便に行なうことが可能で地震工学的には十分実用性を有するものと思われる。

[参考文献]

- 1) 金子孝吉; 土木学会論文報告集 No.207, 1972-11, P13
- 2) 土木研究所振動研究室; 土木研究所資料 No.1103, 1976-3

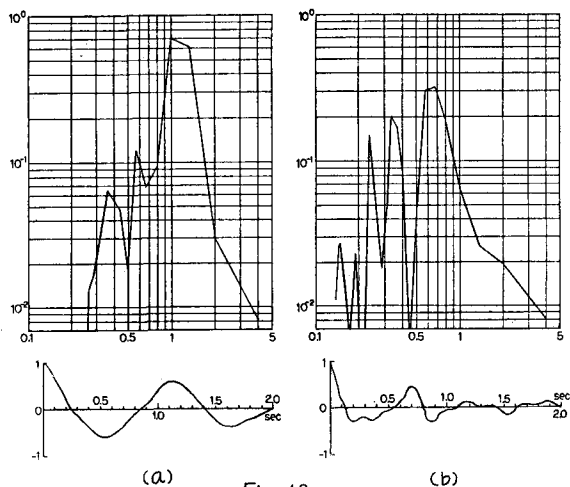


Fig-12

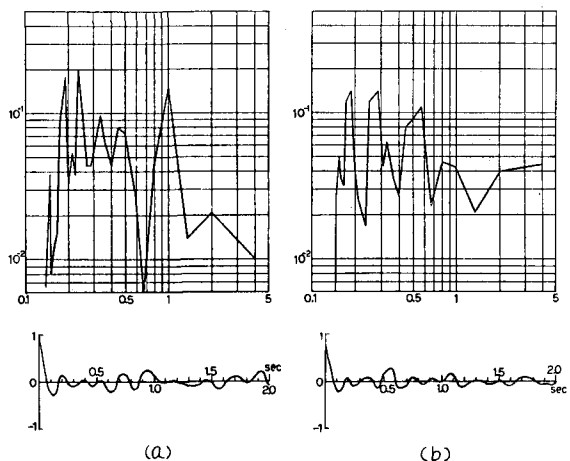


Fig-13

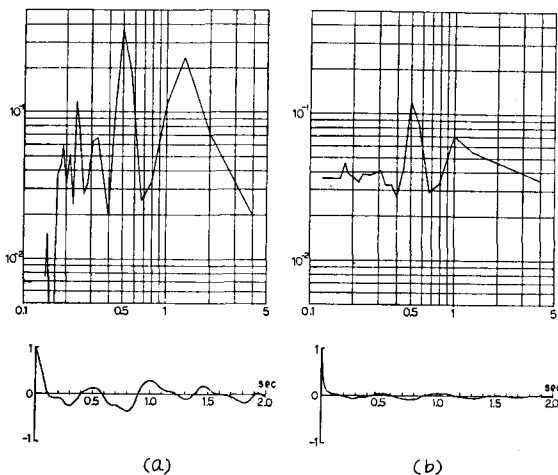


Fig-14