極座標で表わされた重調和方程式の解に関する覚書

北見工業大学　正員　奥村　勇

1. まえがき

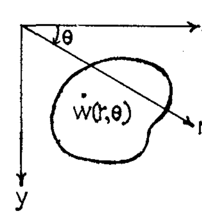
極座標で表わされた2次元の重調和方程式の解については，2次元応力問題における応力関数として，J. H. Michell[注)]が与えた一般解が良く知られている。Michell の解は適合条件を満足する応力関数としては，十分な解と思われるが，平面極座標における重調和方程式の一般解としては，不十分なように思われる。

本論文においては，変数変換の方法により平面極座標における重調和方程式の一般解の導出過程を示し，合わせて，Michellの解がその一般解の特別解として導出されることを示す。本論文における一般解は，円形領域から同心円状に切り出した扇形円環領域に関する2次元応力問題あるいは平板の曲げの問題などに適用できるものと思われる。

2. 平面極座標における重調和方程式と変数変換

平面極座標における重調和方程式は，独立変数を r および θ，従属関数を $w(r,\theta)$ で表わすと，周知のごとく，次のように表わされる。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=0 \quad \cdots\cdots (1)$$



図−1　座標系

上式に任意定数 b^4 をかけて，$r/b=\rho$ とおいて無次元化して示すと次のようである。

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=0 \quad \cdots\cdots (1')$$

重調和方程式の性質を利用して

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial w}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}=W(\rho,\theta) \quad \cdots\cdots (2)$$

と置くと，式 (1') は

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial W}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}=0 \quad \cdots\cdots (3)$$

と表わされる。したがって，$W(\rho,\theta)$ は2次元的調和関数となる。いま，式 (3) に

$$\rho=\frac{r}{b}=e^{v},\quad v=\log\rho=\log\frac{r}{b} \quad \cdots\cdots (4)$$

と置いて変数変換を施すと

$$\frac{\partial W}{\partial\rho}=\frac{\partial W}{\partial v}\cdot e^{-v},\quad \frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2}=\left(\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}-\frac{\partial W}{\partial v}\right)e^{-2v}$$

となるので，上式を式 (3) に代入すると式 (3) は次のように表わされる。

$$\frac{\partial^2 W}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial\theta^2}=0 \quad \cdots\cdots (5)$$

3. 調和関数 $W(v,\theta)$ の導出

式 (3) および式 (5) は Laplace の微分方程式であるが，式 (3) が変数係数であるのに対し，式 (5) は定数係数となっているので，式 (3) を直接解くことはもちろん可能であるが，式 (5) の形の方が取り扱い易い。$W(v,\theta)=V(v)\Theta(\theta)$ と変数分離して，式 (5) に代入し，$V(v)\Theta(\theta)$ で割ると

$$\frac{V''}{V}=-\frac{\Theta''}{\Theta} \quad \cdots\cdots (6)$$

が得られる。上式の左辺はvのみに関する関数であり，右辺はθのみに関する関数であるので，この両者が等しくなるためには，両辺はある定数でなければならない。いま，その定数をμとすると，式(6)は

$$\frac{V''}{V}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\mu \quad \cdots\cdots (6')$$

となる。上式の任意定数μは，正，負および0の3通りの値を取ることができるので，その各々の場合における解を導出することにする。

(I) $\mu>0$，$\mu=\beta_n^2$ ($\beta_n\neq1$) の場合

この場合には，式(6′)は

$$V''-\beta_n^2V=0, \quad \Theta''+\beta_n^2\Theta=0$$

となるので，上の二つの式を解いて

$$V=I\cosh\beta_n v+J\sinh\beta_n v, \quad \Theta=I'\cos\beta_n\theta+J'\sin\beta_n\theta$$

が得られる。上式において，I，J，I'およびJ'はそれぞれ任意定数である。したがって次式が得られる。

$$W_1(v,\theta)=V(v)\Theta(\theta)=(I\cosh\beta_n v+J\sinh\beta_n v)(I'\cos\beta_n\theta+J'\sin\beta_n\theta) \quad \cdots\cdots (7)$$

(II) $\mu<0$，$\mu=-\gamma_s^2$ の場合

この場合には，式(6′)は

$$V''+\gamma_s^2V=0, \quad \Theta''-\gamma_s^2\Theta=0$$

となるので，上の二つの式を解いて

$$V=M\cos\gamma_s v+N\sin\gamma_s v, \quad \Theta=M'\cosh\gamma_s\theta+N'\sinh\gamma_s\theta$$

が得られる。上式において，M，N，M'およびN'はそれぞれ任意定数である。したがって次式が得られる。

$$W_2(v,\theta)=V(v)\Theta(\theta)=(M'\cosh\gamma_s\theta+N'\sinh\gamma_s\theta)(M\cos\gamma_s v+N\sin\gamma_s v) \quad \cdots\cdots (8)$$

(III) $\mu=0$ の場合

この場合には，式(6′)は

$$V''=0, \quad \Theta''=0$$

となるので，上の二つの式をそれぞれ2回積分して

$$V=O+Pv, \quad \Theta=O'+P'\theta$$

が得られる。上式において，O，P，O'およびP'はそれぞれ任意定数である。したがって次式が得られる。

$$W_3(v,\theta)=V(v)\Theta(\theta)=(O+Pv)(O'+P'\theta) \quad \cdots\cdots (9)$$

(IV) $\mu=1$ ($\beta_n=1$) の場合

この場合には，式(6′)は

$$V''-V=0, \quad \Theta''+\Theta=0$$

となるので，上の二つの式より

$$V=Ke^{v}+Le^{-v}, \quad \Theta=K'\cos\theta+L'\sin\theta$$

が得られる。上式において，K，L，K'およびL'はそれぞれ任意定数である。したがって次式が得られる。

$$W_4(v,\theta)=V(v)\Theta(\theta)=(Ke^{v}+Le^{-v})(K'\cos\theta+L'\sin\theta) \quad \cdots\cdots (10)$$

したがって，調和関数$W(v,\theta)$は式(7)から式(10)までの四つの調和関数の和として求められ，次のように表わされる。

$$\begin{aligned}W(v,\theta)&=W_1(v,\theta)+W_2(v,\theta)+W_3(v,\theta)+W_4(v,\theta)\\&=\sum_n(I\cosh\beta_n v+J\sinh\beta_n v)(I'\cos\beta_n\theta+J'\sin\beta_n\theta)+\sum_s(M'\cosh\gamma_s\theta+N'\sinh\gamma_s\theta)\cdot\\&\quad\cdot(M\cos\gamma_s v+N\sin\gamma_s v)+(O+Pv)(O'+P'\theta)+(Ke^{v}+Le^{-v})(K'\cos\theta+L'\sin\theta)\cdots\\&\quad\cdots\cdots (11)\end{aligned}$$

4. 重調和関数 $w(v,\theta)$ の導出

式(2)に再び式(4)のような変数変換を施すと

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}=e^{2v}W \quad \cdots\cdots (12)$$

が得られる。上式の右辺に式(11)を代入すると

$$\frac{\partial^2 w}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}=e^{2v}\Big\{(I\cosh\beta_n v+J\sinh\beta_n v)(I'\cos\beta_n\theta+J'\sin\beta_n\theta)+(M'\cosh\gamma_s\theta+N'\sinh\gamma_s\theta)$$
$$\cdot(M\cos\gamma_s v+N\sin\gamma_s v)+(O+Pv)(O'+P'\theta)+(Ke^{v}+Le^{-v})$$
$$\cdot(K'\cos\theta+L'\sin\theta)\Big\} \quad \cdots\cdots (13)$$

となる。但し，上式の右辺においては，Σ記号を省略してある。上式は $w(v,\theta)$ に関する非同次微分方程式であり，その解は余関数と特殊積分の和として表わされる。余関数 $w_c(v,\theta)$ は右辺を0と置いた同次方程式

$$\frac{\partial^2 w_c}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w_c}{\partial \theta^2}=0 \quad \cdots\cdots (14)$$

より求められる。上式は式(5)と全く同じであり，したがって，その解は式(11)において，単に任意定数を変更したものであるので次のように表わされる。

$$w_c(v,\theta)=\sum_n(A\cosh\beta_n v+B\sinh\beta_n v)(A'\cos\beta_n\theta+B'\sin\beta_n\theta)+\sum_s(C\cosh\gamma_s\theta+D\sinh\gamma_s\theta)$$
$$\cdot(C'\cos\gamma_s v+D'\sin\gamma_s v)+(E+Fv)(E'+F'\theta)+(Ge^{v}+Le^{-v})(G'\cos\theta+L'\sin\theta) \quad \cdots\cdots (15)$$

上式において，$A,\cdots,L'$ はそれぞれ任意定数である。特殊積分 $w_p(v,\theta)$ は，右辺の関数形にしたがって $w_{p1}(v,\theta)$，$w_{p2}(v,\theta)$，$w_{p3}(v,\theta)$，$w_{p4}(v,\theta)$ および $w_{p5}(v,\theta)$ と各々分離して求め，

$$w_p(v,\theta)=w_{p1}(v,\theta)+w_{p2}(v,\theta)+w_{p3}(v,\theta)+w_{p4}(v,\theta)+w_{p5}(v,\theta) \quad \cdots\cdots (16)$$

のように，それらの和として表わす。$w_{p1}(v,\theta)$ は

$$\frac{\partial^2 w_{p1}}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w_{p1}}{\partial \theta^2}=e^{2v}(I\cosh\beta_n v+J\sinh\beta_n v)(I'\cos\beta_n\theta+J'\sin\beta_n\theta) \quad \cdots\cdots (17)$$

の特殊積分として求められる。

$$w_{p1}=f_{1p}(v)(I'\cos\beta_n\theta+J'\sin\beta_n\theta) \quad \cdots\cdots (18)$$

と置いて，式(17)の左辺に代入すると

$$f_{1p}''-\beta_n^2 f_{1p}=Ie^{2v}\cosh\beta_n v+Je^{2v}\sinh\beta_n v \quad \cdots\cdots (19)$$

が得られる。上式の特殊積分 $f_{1p}(v)$ を

$$f_{1p}=Qe^{2v}\cosh\beta_n v+Re^{2v}\sinh\beta_n v\ ,\quad (Q,\ R：未定係数) \quad \cdots\cdots (20)$$

と置いて，式(19)に代入すると次式が得られる。

$$(4Q+4\beta_n R)e^{2v}\cosh\beta_n v+(4\beta_n Q+4R)e^{2v}\sinh\beta_n v=Ie^{2v}\cosh\beta_n v+Je^{2v}\sinh\beta_n v$$

未定係数法により，同じ関数にかかる係数をそれぞれ等置して，Q および R について解くと

$$Q=\frac{I-\beta_n J}{4(1-\beta_n^2)}\ ,\quad R=\frac{J-\beta_n I}{4(1-\beta_n^2)} \quad (\beta_n\neq 1) \quad \cdots\cdots (21)$$

が得られる。$\beta_n=1$ の場合には，$w_{p4}(v,\theta)$ および $w_{p5}(v,\theta)$ として求められる特殊積分であり，それについては後述する。式(21)を式(20)の右辺に代入すると，$f_{1p}(v)$ は次のように求められる。

$$f_{1p}=\frac{I-\beta_n J}{4(1-\beta_n^2)}e^{2v}\cosh\beta_n v+\frac{J-\beta_n I}{4(1-\beta_n^2)}e^{2v}\sinh\beta_n v$$

したがって，$w_{p1}(v,\theta)$ は上式と式(18)より，次のように求められる。

$$w_{p1}=\left\{\frac{I-\beta_n J}{4(1-\beta_n^2)}e^{2v}\cosh\beta_n v+\frac{J-\beta_n I}{4(1-\beta_n^2)}e^{2v}\sinh\beta_n v\right\}(I'\cos\beta_n\theta+J'\sin\beta_n\theta),\ (\beta_n\neq 1)\cdots(22)$$

次に，$w_{p2}(v,\theta)$は

$$\frac{\partial^2 w_{p2}}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w_{p2}}{\partial\theta^2}=(M'\cosh\gamma_s\theta+N'\sinh\gamma_s\theta)\cdot e^{2v}(M\cos\gamma_s v+N\sin\gamma_s v)\cdots(23)$$

より求められる特殊積分である。$w_{p2}(v,\theta)$を

$$w_{p2}=f_{2p}(v)(M'\cosh\gamma_s\theta+N'\sinh\gamma_s\theta)\cdots(24)$$

と置いて，式（23）の左辺に代入すると

$$f_{2p}''+\gamma_s^2 f_{2p}=Me^{2v}\cos\gamma_s v+Ne^{2v}\sin\gamma_s v\cdots(25)$$

が得られる。上式の$f_{2p}(v)$を

$$f_{2p}=Q'e^{2v}\cos\gamma_s v+R'e^{2v}\sin\gamma_s v,\quad(Q',R'\text{：未定係数})\cdots(26)$$

と置いて式（25）の左辺に代入すると，

$$(4Q'+4\gamma_s R')e^{2v}\cos\gamma_s v+(-4\gamma_s Q'+4R')e^{2v}\sin\gamma_s v=Me^{2v}\cos\gamma_s v+Ne^{2v}\sin\gamma_s v$$

が得られる。未定係数法により，Q'およびR'を求めると次式が得られる。

$$Q'=\frac{M-\gamma_s N}{4(1+\gamma_s^2)},\quad R'=\frac{N+\gamma_s M}{4(1+\gamma_s^2)}$$

上式を式（26）の右辺に代入すると，$f_{2p}(v)$は

$$f_{2p}=\frac{M-\gamma_s N}{4(1+\gamma_s^2)}e^{2v}\cos\gamma_s v+\frac{N+\gamma_s M}{4(1+\gamma_s^2)}e^{2v}\sin\gamma_s v$$

となる。したがって，$w_{p2}(v,\theta)$は上式と式（24）から次式のように求められる。

$$w_{p2}=\left\{\frac{M-\gamma_s N}{4(1+\gamma_s^2)}e^{2v}\cos\gamma_s v+\frac{N+\gamma_s M}{4(1+\gamma_s^2)}e^{2v}\sin\gamma_s v\right\}(M'\cosh\gamma_s\theta+N'\sinh\gamma_s\theta)\cdots(27)$$

次に，$w_{p3}(v,\theta)$は

$$\frac{\partial^2 w_{p3}}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w_{p3}}{\partial\theta^2}=(O'+P'\theta)(Oe^{2v}+Pve^{2v})\cdots(28)$$

より求められる特殊積分であり，

$$w_{p3}=f_{3p}(v)(O'+P'\theta)\cdots(29)$$

と置いて，式（28）の左辺に代入すると

$$f_{3p}''=(Oe^{2v}+Pve^{2v})$$

を得る。上式を2回積分することにより

$$f_{3p}=\frac{1}{4}(O-P)e^{2v}+\frac{P}{4}ve^{2v}$$

が得られる。したがって，上式と式（29）より$w_{p3}(v,\theta)$は次のように求められる。

$$w_{p3}=\left\{\frac{1}{4}(O-P)e^{2v}+\frac{P}{4}ve^{2v}\right\}(O'+P'\theta)\cdots(30)$$

次に，式（22）において$\beta_n=1$の場合に関する特殊積分$w_{p4}(v,\theta)$は

$$\frac{\partial^2 w_{p4}}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 w_{p4}}{\partial\theta^2}=Ke^{3v}(K'\cos\theta+L'\sin\theta)\cdots(31)$$

より求められる。$w_{p4}(v,\theta)$を

$$w_{p4}=f_{4p}(v)(K'\cos\theta+L'\sin\theta)\cdots(32)$$

と置いて，式 (31) の左辺に代入すると

$$f_{4p}'' - f_{4p} = K e^{3v}$$

が得られる。この式を解いて $f_{4p}(v)$ は次のように求められる。

$$f_{4p} = \frac{K}{8} e^{3v}$$

したがって，上式を式 (32) の右辺に代入すると，$w_{p4}(v, \theta)$ は次式のように求められる。

$$w_{p4} = \frac{K}{8} e^{3v} (K' \cos\theta + L' \sin\theta) \cdots\cdots (33)$$

最後に，やはり，$\beta_n = 1$ の場合における特殊積分として $w_{p5}(v, \theta)$ は

$$\frac{\partial^2 w_{p5}}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 w_{p5}}{\partial \theta^2} = L e^{v} (K' \cos\theta + L' \sin\theta) \cdots\cdots (34)$$

より求められる特殊積分である。上式の右辺の非同次項は式 (15) に示した余関数と重複しているので，重複を避けるために v あるいは θ の最低のべきをかける必要がある。v をかけた場合には，

$$w_{p5}^{(1)} = U v e^{v} (K' \cos\theta + L' \sin\theta), \quad (U：未定係数) \cdots\cdots (35)$$

と置いて式 (34) の左辺に代入して U を求めると，$U = L/2$ となり，これを式 (35) の右辺に代入すると

$$w_{p5}^{(1)} = \frac{L}{2} v e^{v} (K' \cos\theta + L' \sin\theta) \cdots\cdots (36)$$

と求められる。θ をかけた場合には次式となる。

$$w_{p5}^{(2)} = e^{v} (X \theta \cos\theta + Y \theta \sin\theta), \quad (X, Y：未定係数) \cdots\cdots (37)$$

上式を式 (34) に代入して，未定係数法により X および Y を求めると

$$X = -\frac{LL'}{2}, \quad Y = \frac{LK'}{2}$$

となる。上式の X および Y を式 (37) の右辺に代入すると $w_{p5}^{(2)}(v, \theta)$ は

$$w_{p5}^{(2)} = \frac{L}{2} e^{v} (-L' \theta \cos\theta + K' \theta \sin\theta) \cdots\cdots (38)$$

となる。したがって，$\beta_n = 1$ の場合における特殊積分 $w_{p5}(v, \theta)$ は式 (36) と式 (38) の和で表わされることになり，次式となる。

$$w_{p5} = w_{p5}^{(1)} + w_{p5}^{(2)} = \left\{ -\frac{S}{2} e^{v} \theta \cos\theta + \frac{T}{2} e^{v} \theta \sin\theta + \frac{L}{2} v e^{v} (K' \cos\theta + L' \sin\theta) \right\} \cdots\cdots (39)$$

上式の S および T はそれぞれ LL' および LK' を新しく置き直した任意定数である。

したがって，特殊積分 $w_p(v, \theta)$ は式 (22)，(27)，(30)，(33) および式 (39) の和として表わされ，次のようである。

$$\begin{aligned}
w_p(v, \theta) &= w_{p1}(v, \theta) + w_{p2}(v, \theta) + w_{p3}(v, \theta) + w_{p4}(v, \theta) + w_{p5}(v, \theta) \\
&= \sum_n \left\{ \frac{I - \beta_n J}{4(1 - \beta_n^2)} e^{2v} \cosh\beta_n v + \frac{J - \beta_n I}{4(1 - \beta_n^2)} e^{2v} \sinh\beta_n v \right\} (I' \cos\beta_n\theta + J' \sin\beta_n\theta) + \\
&+ \sum_s \left\{ \frac{M - \gamma_s N}{4(1 + \gamma_s^2)} e^{2v} \cos\gamma_s v + \frac{N + \gamma_s M}{4(1 + \gamma_s^2)} e^{2v} \sin\gamma_s v \right\} (M' \cosh\gamma_s\theta + N' \sinh\gamma_s\theta) + \\
&+ \frac{1}{4} \{ (O - P) e^{2v} + P v e^{2v} \} (O' + P'\theta) + \frac{K}{8} e^{3v} (K' \cos\theta + L' \sin\theta) + \frac{1}{2} \{ -S e^{v} \theta \cos\theta + \\
&+ T e^{v} \theta \sin\theta + L v e^{v} (K' \cos\theta + L' \sin\theta) \} \cdots\cdots (40)
\end{aligned}$$

したがって，重調和関数 $w(v,\theta)$ は式（15）と式（40）の和として表わされる。任意定数の置き換えをし，整頓して示すと次のようである。

$$
\begin{aligned}
w(v,\theta) &= w_c(v,\theta) + w_p(v,\theta)\\
&= \sum_n \left\{A_n^{(1)}\cosh\beta_n v + A_n^{(2)}\sinh\beta_n v + A_n^{(3)}e^{2v}\cosh\beta_n v + A_n^{(4)}e^{2v}\sinh\beta_n v\right\}\cos\beta_n\theta +\\
&+ \sum_n \left\{B_n^{(1)}\cosh\beta_n v + B_n^{(2)}\sinh\beta_n v + B_n^{(3)}e^{2v}\cosh\beta_n v + B_n^{(4)}e^{2v}\sinh\beta_n v\right\}\sin\beta_n\theta +\\
&+ \sum_s \left\{C_s^{(1)}\cos\gamma_s v + C_s^{(2)}\sin\gamma_s v + C_s^{(3)}e^{2v}\cos\gamma_s v + C_s^{(4)}e^{2v}\sin\gamma_s v\right\}\cosh\gamma_s\theta +\\
&+ \sum_s \left\{D_s^{(1)}\cos\gamma_s v + D_s^{(2)}\sin\gamma_s v + D_s^{(3)}e^{2v}\cos\gamma_s v + D_s^{(4)}e^{2v}\sin\gamma_s v\right\}\sinh\gamma_s\theta +\\
&+ \left\{A_1^{(1)}e^{v} + A_1^{(2)}e^{-v} + A_1^{(3)}e^{3v} + A_1^{(4)}v e^{v}\right\}\cos\theta + \left\{B_1^{(1)}e^{v} + B_1^{(2)}e^{-v} + B_1^{(3)}e^{3v} + B_1^{(4)}v e^{v}\right\}\sin\theta -\\
&- \frac{B_1}{2}e^{v}\theta\cos\theta + \frac{A_1}{2}e^{v}\theta\sin\theta + n_0 e^{2v} + o_0 v e^{2v} + \left\{n_0' e^{2v} + o_0' v e^{2v}\right\}\theta +\\
&+ k_0 v + l_0\theta + m_0 v\theta + p_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (41)
\end{aligned}
$$

上式において，$A_n^{(1)}, \cdots, p_0$ は新しい任意定数である。

式（4）の関係を用いて，v を ρ に変換し，任意定数を改めて置き直して，式（41）を表わすと

$$
\begin{aligned}
w(\rho,\theta) &= \sum_n \left\{A_n^{(1)}\rho^{\beta_n} + A_n^{(2)}\rho^{-\beta_n} + A_n^{(3)}\rho^{(2+\beta_n)} + A_n^{(4)}\rho^{(2-\beta_n)}\right\}\cos\beta_n\theta +\\
&+ \sum_n \left\{B_n^{(1)}\rho^{\beta_n} + B_n^{(2)}\rho^{-\beta_n} + B_n^{(3)}\rho^{(2+\beta_n)} + B_n^{(4)}\rho^{(2-\beta_n)}\right\}\sin\beta_n\theta +\\
&+ \sum_s \left\{C_s^{(1)}\cos(\gamma_s\log\rho) + C_s^{(2)}\sin(\gamma_s\log\rho) + C_s^{(3)}\rho^2\cos(\gamma_s\log\rho) + C_s^{(4)}\rho^2\sin(\gamma_s\log\rho)\right\}\\
&\cdot\cosh\gamma_s\theta +\\
&+ \sum_s \left\{D_s^{(1)}\cos(\gamma_s\log\rho) + D_s^{(2)}\sin(\gamma_s\log\rho) + D_s^{(3)}\rho^2\cos(\gamma_s\log\rho) + D_s^{(4)}\rho^2\sin(\gamma_s\log\rho)\right\}\\
&\cdot\sinh\gamma_s\theta\\
&+ \left\{A_1^{(1)}\rho + \frac{A_1^{(2)}}{\rho} + A_1^{(3)}\rho^3 + A_1^{(4)}\rho\log\rho\right\}\cos\theta + \left\{B_1^{(1)}\rho + \frac{B_1^{(2)}}{\rho} + B_1^{(3)}\rho^3 + B_1^{(4)}\rho\log\rho\right\}\sin\theta -\\
&- \frac{B_1}{2}\rho\theta\cos\theta + \frac{A_1}{2}\rho\theta\sin\theta + n_0\rho^2 + o_0\rho^2\log\rho + (n_0'\rho^2 + o_0'\rho^2\log\rho)\theta +\\
&+ k_0\log\rho + l_0\theta + m_0\theta\log\rho + p_0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (42)
\end{aligned}
$$

上式において，$A_n^{(1)}, \cdots, p_0$ は新しい任意定数である。

上式の一般解において，s に関する Σ 記号を付した解および $o_0'\theta\rho^2\log\rho$，$m_0\theta\log\rho$ 以外の解は，J. H. Michell 注) によって与えられた解に一致する。

5. あとがき

このように，平面極座標における重調和方程式の一般解としては，座標の原点に孤立特異点を持ったMichellの解とは異なった別の解が生ずる。重調和方程式を変数分離の方法で解く際に，Michell の解は，まさしく，任意定数が正および0の場合に対応した解であり，負の場合に対応した解が本論文で新しく導出した解である。

本論文で導出した解は，座標の原点を含まないような扇形円環領域に関する2次元応力問題あるいは平板の曲げの問題などに適用できるものと思われる。

注）Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, p. 133, 3rd ed., McGraw-Hill Kogakusha, 1970