

アフィン荷重の構造力学への応用に関する研究 (その4)
(多径間連続桁の振動解析)

北海道大学工学部 ○ 学生員 小 坂 幹 男
北海道大学工学部 正 員 渡 辺 昇
北海道大学工学部 正 員 金 子 孝 吉

1. はじめに

本報告は多径間連続桁の自由振動解析に対し、剛性マトリクスを利用することによって、等断面で種々の境界をさつものに対する固有値、並びにモードを求め、さらに初期条件として荷重 $Q(x)$ が与えられた時、その荷重をアフィン荷重展開をほどこすことによって、自由振動変位を求めようとするものである。

2. 桁の曲げ振動の微分方程式とその解

桁の曲げ振動の微分方程式は、*d'Alembert* の原理を用いると次式となる。

$$\text{一般式} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} (EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}) = -\mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1)$$

但し EI … 曲げ剛性 μ …… 単位長さ当りの質量

桁の長さに沿って曲げ剛性 EI が変わらないとすれば、式(1)は次式となる。

$$EI \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = -\mu \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1')$$

ここで式(1')の解を変数分離されるとして、次式のようにおく、 $W(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ (2)

$$\left. \begin{aligned} T(t) &= \sin(\nu t + E) \\ X(x) &= A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

但し ν …… 円振動数 E …… 位相角

$A \sim D$ …… 積分定数 $\beta = \sqrt{\frac{\mu \nu^2}{EI}}$

従って、式(1')の解は

$$W(x,t) = (A \cos \beta x + B \sin \beta x + C \cosh \beta x + D \sinh \beta x) \cdot \sin(\nu t + E) \quad (4)$$

3. 桁の曲げ振動の剛性マトリクスの誘導

桁の断面における曲げモーメント $M(x)$ とせん断力 $Q(x)$ 、並びにタワミ角 $\theta(x)$ は次のようになる。

$$M(x) = -EI \frac{d^2 X}{dx^2}, \quad Q(x) = -EI \frac{d^3 X}{dx^3}, \quad \theta(x) = \frac{dX}{dx} \quad (5)$$

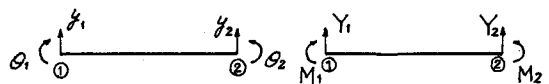
式(5)において $x=0$, $x=l$ を入れマトリクス表示し、さらに積分定数を消去し、符号に注意して剛性マトリクスを作成すると、

$$\begin{bmatrix} Q(0) \\ M(0) \\ Q(l) \\ M(l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ & \text{Sym.} & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X(0) \\ \theta(0) \\ X(l) \\ \theta(l) \end{bmatrix} \quad (6)$$

いま、(Fig.1)において、桁の左端 $x=0$ を①、

桁の右端 $x=l$ を②と番号をつけ、各々の鉛直変位、

タワミ角、鉛直外力、モーメントを δ , θ , Y , M とすると、



(Fig.1)

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ \text{Sym.} & & K_{33} & K_{34} \\ & & & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (7) \quad \begin{pmatrix} K_{23} = -K_{14} & K_{33} = K_{11} \\ K_{34} = -K_{12} & K_{44} = K_{22} \end{pmatrix}$$

剛性マトリクスの各要素は次のとおりである。

$$\begin{bmatrix} K_{11} = D(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda) & K_{12} = -D \sin \lambda \sinh \lambda / \beta \\ K_{13} = -D(\sin \lambda + \sinh \lambda) & K_{14} = D(\cos \lambda - \cosh \lambda) / \beta \\ K_{22} = D(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda) / \beta^2 & K_{24} = -D(\sin \lambda - \sinh \lambda) / \beta^2 \end{bmatrix}$$

但し $D = EI\beta^3 / (1 - \cos \lambda \cdot \cosh \lambda)$, $\lambda = \beta l$

4. 桁の曲げ振動の積分定数マトリクスの誘導

式(3)から 次のようにマトリクス表示できる。

$$\begin{bmatrix} (X)_{x=0} \\ (\frac{dX}{dx})_{x=0} \\ (X)_{x=l} \\ (\frac{dX}{dx})_{x=l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & \beta \\ \cosh \lambda & \sinh \lambda & \cosh \lambda & \sinh \lambda \\ -\beta \sinh \lambda & \beta \cosh \lambda & \beta \sinh \lambda & \beta \cosh \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \quad (8)$$

式(8)を符号に注意して、次式のような形に整理する。

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \theta_1 \\ y_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

右辺の正方マトリクスを“桁の曲げ振動の積分定数マトリクス”とする。

この積分定数マトリクスの各要素は次のとおりである。

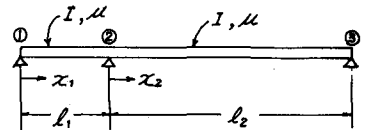
$$\begin{bmatrix} R_{11} = -G(1 + \sin \lambda \sinh \lambda - \cos \lambda \cosh \lambda) & R_{12} = G(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda) / \beta \\ R_{13} = -G(\cos \lambda - \cosh \lambda) & R_{14} = -G(\sin \lambda - \sinh \lambda) / \beta \\ R_{21} = G(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda) & R_{22} = G(1 - \sin \lambda \sinh \lambda - \cos \lambda \cosh \lambda) / \beta \\ R_{23} = -G(\sin \lambda + \sinh \lambda) & R_{24} = G(\cos \lambda - \cosh \lambda) / \beta \\ R_{31} = -G(1 - \sin \lambda \sinh \lambda - \cos \lambda \cosh \lambda) & R_{32} = -G(\sin \lambda \cosh \lambda - \cos \lambda \sinh \lambda) / \beta \\ R_{33} = G(\cos \lambda - \cosh \lambda) & R_{34} = G(\sin \lambda - \sinh \lambda) / \beta \\ R_{41} = -G(\sin \lambda \cosh \lambda + \cos \lambda \sinh \lambda) & R_{42} = G(1 + \sin \lambda \sinh \lambda + \cos \lambda \cosh \lambda) / \beta \\ R_{43} = G(\sin \lambda + \sinh \lambda) & R_{44} = -G(\cos \lambda - \cosh \lambda) / \beta \end{bmatrix}$$

5. 固有振動方程式

いま、ここからたんなる計算例として (Fig.2) のような 2 径間連続桁を採用してみる。

$$\left. \begin{aligned} \beta_1^4 &= \frac{EI}{EI} & \lambda_1 &= \beta_1 l_1 \\ \beta_2^4 &= \frac{EI}{EI} & \lambda_2 &= \beta_2 l_2 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

境界条件として $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $M_1 = M_2 = M_3 = 0$ であるので



(Fig.2)

式(7)より次式をうる。

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ 0 \\ Y_2 \\ 0 \\ Y_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & K_{13}^1 & K_{14}^1 & 0 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 & K_{23}^1 & K_{24}^1 & 0 & 0 \\ K_{31}^1 & K_{32}^1 & K_{33}^1 + K_{11}^2 & K_{34}^1 + K_{12}^2 & K_{13}^2 & K_{14}^2 \\ K_{41}^1 & K_{42}^1 & K_{43}^1 + K_{21}^2 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{23}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & 0 & K_{31}^2 & K_{32}^2 & K_{33}^2 & K_{34}^2 \\ 0 & 0 & K_{41}^2 & K_{42}^2 & K_{43}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \theta_1 \\ 0 \\ \theta_2 \\ 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (11)$$

これを0要素を集め、整理して分割マトリクス化することから、次式がえられる。

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{22}^1 & K_{24}^1 & 0 \\ K_{42}^1 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & K_{42}^2 & K_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

この式が成り立つには、右辺の3行3列の正方マトリクスの行列式の値が0となることである。

$$\begin{vmatrix} K_{22}^1 & K_{24}^1 & 0 \\ K_{42}^1 & K_{44}^1 + K_{22}^2 & K_{24}^2 \\ 0 & K_{42}^2 & K_{44}^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

この式が“固有振動数方程式”である。

6. 固有振動モード関数

式(12)において、 $\theta_1 = C_0$ において C_0 をあたかも既知の定数と考えると、 θ_2, θ_3 が求められる。

また、 σ_1 径間の積分定数を $A_1 \sim D_1$ とし、 σ_2 径間の積分定数を $A_2 \sim D_2$ とすると、“積分定数マトリクス”を用いて、

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}^1 & R_{12}^1 & R_{13}^1 & R_{14}^1 \\ R_{21}^1 & R_{22}^1 & R_{23}^1 & R_{24}^1 \\ R_{31}^1 & R_{32}^1 & R_{33}^1 & R_{34}^1 \\ R_{41}^1 & R_{42}^1 & R_{43}^1 & R_{44}^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 = 0 \\ \theta_1 = C_0 \\ \xi_2 = 0 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} A_2 \\ B_2 \\ C_2 \\ D_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}^2 & R_{12}^2 & R_{13}^2 & R_{14}^2 \\ R_{21}^2 & R_{22}^2 & R_{23}^2 & R_{24}^2 \\ R_{31}^2 & R_{32}^2 & R_{33}^2 & R_{34}^2 \\ R_{41}^2 & R_{42}^2 & R_{43}^2 & R_{44}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_2 = 0 \\ \theta_2 \\ \xi_3 = 0 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (15)$$

よって、すべての積分定数が C_0 を含む形で求まり、式(3)より各径間の固有振動モード関数は次式となる。

$$\left. \begin{aligned} -X_1(x_1) &= A_1 \cosh \beta_1 x_1 + B_1 \sinh \beta_1 x_1 + C_1 \cosh \beta_1 x_1 + D_1 \sinh \beta_1 x_1 \\ -X_2(x_2) &= A_2 \cosh \beta_2 x_2 + B_2 \sinh \beta_2 x_2 + C_2 \cosh \beta_2 x_2 + D_2 \sinh \beta_2 x_2 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

7. 自由振動変位の決定

最も一般的な自由振動の表現は、各モードの振動を適当な振幅と位相をもって重ね合せた次式となる。

$$W(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_n(x) \sin(\nu_n t + \epsilon_n) \quad (17)$$

但し ν_n …… n 次モードの固有円振動数 ϵ_n …… n 次モードの位相角
 $X_n(x)$ …… n 次の固有振動モード関数

σ_1 径間については、次のように表わされる。

$$W_r(x_r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n X_{rn}(x_r) \sin(\nu_n t + \epsilon_n) \quad (17')$$

なお、式(13)の固有振動数方程式から求められる、固有値 λ_m に対応する固有円振動数 ν_n は、

$$\nu_n = \frac{\lambda_n^2}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} \quad (18)$$

また σ_1 径間の固有振動周期 T_n は

$$T_n = 2\pi / \nu_n = \frac{2\pi L^2}{\lambda_n^2} \sqrt{\frac{\mu}{EI}} \quad (19)$$

初期条件 $t=0$ にて荷重 $p(x)$ が作用し、初速度 $(\frac{\partial W}{\partial t})_{t=0}=0$ で振動させる場合の自由振動変位を求める。
 ここで、荷重 $p(x)$ を境界条件を満足する桁のタワミ曲線に相似な分布荷重に展開しようとするアフィン荷重展開を
 ほどく。

(7-1) アフィン荷重展開

桁の曲げタワミに関する微分方程式は $EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x)$ であり、 $p(x) = k^4 w(x)$ と考えると、次式のような解がえられる。

$$w(x) = A \cos mx + B \sin mx + C \cosh mx + D \sinh mx \quad (20)$$

但し、 $m^4 = k^4/EI$ 、係数 $A \sim D$ は境界条件によって固有値がえられ、各々に対し、直交関係を満たしている
 ので、荷重 $p(x)$ が与えられると、決定できる。

オメガ径間においては

$$\text{タワミ } w_r(x_r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}_n(x_r) \quad (21) \quad \text{荷重 } p_r(x_r) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \bar{x}_n(x_r) \quad (22)$$

故に、微分方程式に上式を代入することによって、次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} a_n &= g_n / EI_r m_n^4 \\ \text{また、} \quad g_n &= \int_0^L p(x) \bar{x}_n(x) dx / \int_0^L \{ \bar{x}_n(x) \}^2 dx \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

(7-2) 初期条件 $(W)_{t=0} = f(x)$, $(\frac{\partial W}{\partial t})_{t=0} = 0$ の時の自由振動変位

上述したように、荷重 $p(x)$ が作用した時のタワミ $f(x)$ とすると $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \bar{x}_n(x)$ とおくことができる。

ここに、式(17)より、この場合は $x_n(x) = \bar{x}_n(x)$ であるので

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin E_n x_n(x) &= f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(x) \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos E_n x_n(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

従って $a_n = a_n$, $E_n = \frac{\pi}{2}$ として一般性を失わない。

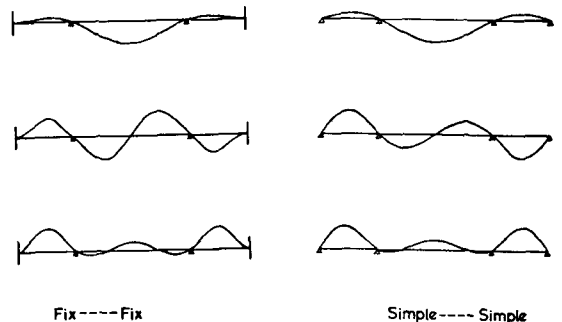
故に、オメガ径間においては、式(17')より

$$W_r(x_r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n(x_r) \sin(V_n t + \frac{\pi}{2}) \quad (25)$$

8. 数値計算例

(Fig. 3, 4) は、3径間連続桁の固有振動モードを示している。

なお、種々の境界条件をまつ多径間連続桁の自由振動については、当日発表予定である。



(Fig. 3)

(Fig. 4)

9. あとがき

以上の様に、初期条件として荷重が与えられるだけで、種々の境界条件をまつ多径間連続桁の固有値、固有振動モード並びに自由振動変位が、単にマトリクス演算を行なうことで、順次容易に求めることができる。