

弾性地盤上の円筒形タンクの温度応力について

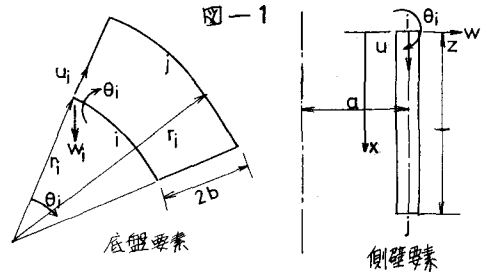
北海道大学 正員 茅 村 仁
北海道大学 正員 三 上 隆
北海道大学 学生員 〇 田 巻 雅

1. まえがき

寒冷地における円筒形タンク(消化槽など)、LNGタンクなどの設計時において、温度変動による温度応力を求めることは工学上重要な問題である。この種の問題については、一様な温度変化による温度応力に関する報告が多く、タンク内外の温度差を考慮した報告は少ないように思われる。本報告では一様な温度変化に加え、板厚及び長方向温度勾配の影響を考慮し、弾性地盤上の底盤、側壁よりなる円筒形タンクを解析する。なお解析方法は実際に予想される複雑な温度分布にも適用が容易である有限要素法を用い解析を行った。

2. 解析方法

解析モデルは図-1に示す底盤(円板要素)側壁(円筒殻要素)よりなる。弾性地盤のモデルとして本報告は弾性バネと変位量が比例する線形Winklerバネを用いる。解析にあたって変形及び温度分布は底盤中心に対し軸対称分布とし、かつ等質均質で線形を仮定する。又剛性マトリクス、温度分布に等価な熱荷重をくくではGalerkin法¹⁾により誘導する。



(図) 円筒殻要素について 図-1において、 z, x 方向のつりあいの方程式は、

$$D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{a^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{E\alpha}{1-\nu} \left(-\frac{\bar{T}}{a} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

$$\text{ここで } \bar{T} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T dz, \quad \bar{T} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} T z dz$$

$$D = Eh^3/12(1-\nu^2), \quad E = \text{弾性係数}$$

$$\nu = \text{ポアソン比}$$

$$\alpha = \text{温度膨張係数}, \quad h = \text{板厚} \quad a = \text{半径}$$

$$T = \text{温度分布}$$

断面力は次の式で表わされる

$$M_x = -D \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{E\alpha}{1-\nu} \bar{T} \quad (3.1)$$

$$M_\theta = -\nu D \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{E\alpha}{1-\nu} \bar{T} \quad (3.2)$$

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{a} w \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \bar{T} \quad (3.3)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{a} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \bar{T} \quad (3.4)$$

変位関数として

$$w = [\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} = [\phi] \{w\} \quad (4)$$

$$u = [\psi_1, \psi_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [\psi] \{u\} \quad (5)$$

$$\text{ここで, } \phi_1 = 1 - 3x^2/l^2 + 2x^3/l^3, \quad \phi_2 = x - 2x^2/l + x^3/l^2$$

$$\phi_3 = 3x^2/l^2 - 2x^3/l^3, \quad \phi_4 = -x^2/l + x^3/l^2$$

$$\psi_1 = 1 - x/l, \quad \psi_2 = x/l$$

(1)にGalerkin法を適用

$$2\pi a \int_0^l \phi_i \left[D \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{w}{a^2} + \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{E\alpha}{1-\nu} \left(-\frac{\bar{T}}{a} + \frac{\partial \bar{T}}{\partial z^2} \right) \right] dz = 0 \quad (6)$$

上式に部分積分を施すと

$$2\pi a \int_0^l \left[\frac{\partial^3 \phi_i}{\partial z^3} D \frac{\partial w}{\partial z^2} + \phi_i \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} w \right] dz + 2\pi a \int_0^l \phi_i \frac{Eh\nu}{a(1-\nu^2)} \frac{\partial u}{\partial z} dz \\ = 2\pi a \int_0^l \left[\phi_i \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{\bar{T}}{a} - \frac{\partial^3 \phi_i}{\partial z^3} \frac{E\alpha}{1-\nu} \bar{T} \right] dz \\ + 2\pi a \left[\phi_i Q_x \right]_0^l - 2\pi a \left[\frac{\partial \phi_i}{\partial z} M_x \right]_0^l \quad (7)$$

$$\text{ここで } Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial z}$$

同様に(2)にGalerkin法を適用する

$$2\pi a \int_0^l \psi_i \left[\frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{a} w \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \right] dz = 0 \quad (8)$$

部分積分をする。

$$2\pi a \int_0^R \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{Eh}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} dx + 2\pi a \int_0^R \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{Eh\nu}{a(1-\nu^2)} u dx$$

$$= 2\pi a \int_0^R \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{E\alpha}{1-\nu} T dx + [\psi_i N_x]_0^R \text{-----}(9)$$

従って、剛性マトリックス、温度分布に等価な熱荷重は次の様に得られる。

$$\begin{bmatrix} (K_{11})_{ij} & (K_{12})_{ij} \\ (K_{21})_{ij} & (K_{22})_{ij} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u\}_j \\ \{\psi\}_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{Q_{uf}\}_j \\ \{Q_{\psi f}\}_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{b_{uf}\}_j \\ \{b_{\psi f}\}_j \end{Bmatrix}$$

$$\text{-----}(10)$$

式(10)において、右辺の第1項が温度分布に等価な熱荷重、第2項は節点に作用する力を表わす。

そこで

$$(K_{11})_{ij} = 2\pi a \int_0^R \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \psi_i \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} \psi_j \right) dx$$

$$i, j = 1 \text{---} 4, \text{-----}(11)$$

$$(K_{12})_{ij} = 2\pi a \int_0^R \psi_i \frac{Eh\nu}{a(1-\nu^2)} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx \text{-----}(12)$$

$$i = 1 \text{---} 4 \quad j = 1, 2$$

$$(K_{21})_{ij} = 2\pi a \int_0^R \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{Eh\nu}{a(1-\nu^2)} \psi_j dx \text{-----}(13)$$

$$i = 1, 2, \quad j = 1 \text{---} 4$$

$$(K_{22})_{ij} = 2\pi a \int_0^R \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{Eh}{a(1-\nu^2)} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx \text{-----}(14)$$

$$i, j = 1, 2$$

$$\{Q_{uf}\}_i = 2\pi a \int_0^R \frac{E\alpha}{1-\nu} \left(\frac{T}{a} \psi_i - \frac{\nu}{T} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \right) dx \text{-----}(15)$$

$$i = 1 \text{---} 4$$

$$\{Q_{\psi f}\}_i = 2\pi a \int_0^R \frac{E\alpha}{1-\nu} T \frac{\partial \psi_i}{\partial x} dx \text{-----}(16)$$

$$i = 1, 2$$

$$\{b_{uf}\}_i = \left\{ -[Q_x]_{x=0}, [M_x]_{x=0}, [Q_x]_{x=R}, -[M_x]_{x=R} \right\}^T$$

$$\text{-----}(17)$$

$$\{b_{\psi f}\}_i = \left\{ -[N_x]_{x=0}, [N_x]_{x=R} \right\}^T \text{-----}(18)$$

温度分布は板厚及びx方向に直線変化するとして

$$T = (A_1 + A_2 z)x + (A_3 + A_4 z) \text{-----}(19)$$

そこで $A_1 \sim A_4$ は要素両端の板の上下面の温度分布より定まる定数である。

以上の剛性マトリックス、熱荷重の結果は当然のことであるが、最小ポテンシャルエネルギー原理、仮想仕事の原理より誘導した結果と一致している。

(b) 円板要素について 弾性地盤上の円板要素のつり合い式は、

ω方向について

$$\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + E_3 u$$

$$+ \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left(r \frac{dT}{dr} \right) = 0 \text{-----}(20)$$

ここで E_3 = 鉛直地盤反力係数

u方向について

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{-----}(21)$$

断面力は

$$M_r = -\rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial u}{r \partial r} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} T \text{-----}(22,1)$$

$$M_\theta = -\rho \left(\frac{\partial u}{r \partial r} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} T \text{-----}(22,2)$$

$$N_r = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} T \text{-----}(22,3)$$

$$N_\theta = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{E\alpha}{1-\nu} T \text{-----}(22,4)$$

変位関数として次式を用いる。

$$u = \left(1 - \frac{R}{r} \right) u_i + \left(\frac{R}{r} \right) u_j \text{-----}(23)$$

$$\omega = \left(1 - \frac{3R^2}{4} + \frac{R^3}{4} \right) \omega_i + b \left(R - R^2 + \frac{R^3}{4} \right) \theta_i$$

$$+ \left(\frac{3R^2}{4} - \frac{R^3}{4} \right) \omega_j + b \left(\frac{R^3}{4} - R^2 \right) \theta_j \text{-----}(24)$$

そこで

$$R = (r - r_i) / \rho, \quad b = (r_j - r_i) / 2$$

温度分布として円筒殻要素同様、板厚及びr方向に、直線変化するとして

$$T = (B_1 + B_2 z)(Rb + r_i) + (B_3 + B_4 z) \text{-----}(25)$$

ここで $B_1 \sim B_4$ は要素の両端(i, j点)での板の上下面の温度分布より定まる定数である。

剛性マトリックス、熱荷重は円筒殻要素と同様な手順により得られる。

4. 解析例

図-2に示す、弾性基礎上の円筒形タンクを解析する。要素分割は底盤部については80分割、側壁部については120分割である。

図-3は下端固定の円筒形タンクの断面力(Mx)を本解析法(FSM)と文献(2)とを比較したものである。材料定数として $E=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha=10^{-5}/^\circ\text{C}$, $\nu=1/6$, 側壁の高さ $l=1530 \text{ cm}$ 半径 $a=800 \text{ cm}$, 側壁の厚さ $H_1=25 \text{ cm}$ である。実線が本解析法、○印が厳密解であるが両者ともよく一致していることがわかる。図中の T_0, T_1 とは T_0 は一様温度変化 ($T_0=(T_{in}+T_{ex})/2$) T_1 は内外の温度差 ($T_1=T_{ex}-T_{in}$ 表わす。たとえば $T_0=15^\circ, T_1=5^\circ$ とすると $T_{in}=17.5^\circ, T_{ex}=12.5^\circ$ に相当する。底盤要素についても種々の荷重条件、境界条件で厳密解と比較し十分な精度を有することを確認している。

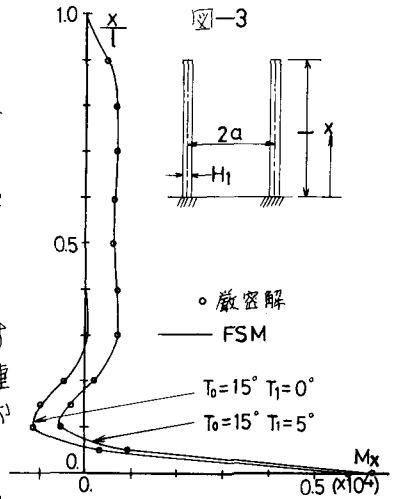
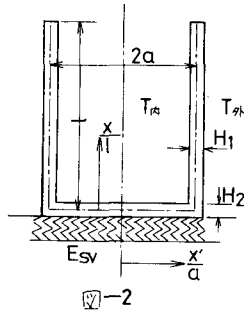


図-4は $T_0=15^\circ, T_1=5^\circ$, 地盤反力係数 $E_s=2 \text{ kg/cm}^3$, 側壁の厚さ $H_1=25 \text{ cm}$, 底盤の半径 $a=800 \text{ cm}$, 側壁の高さ $l=1530 \text{ cm}$ とし、底盤の厚さの変化が断面力に与える影響を図示したものである。図中 β とは (β =底盤の板厚/側壁の板厚) である。板厚変化の影響は底盤部の断面力に変化が見られ、側壁部については、下端よりある程度離れると一定値を示す傾向が見られる。又地盤反力係数 E_s を大きくしていくと、図-3に示した曲線と一致していく。同図中には底盤部で $T_{in}=T_{ex}=12.5^\circ$, 側壁部で $T_{in}=12.5^\circ, T_{ex}$ が上端で 17.5° 下端で 12.5° と直線的に変化する時の断面力を合わせて図示してある。

次に実際に予想される温度分布を過去の資料より図-4に示すような温度分布を想定し温度応力を求めてみる。想定した2つの温度分布はCASE(1)として側壁については上端で内側で 6° , 外側で 18° , 下端では内側で -4° , 外側で 7° の温度分布を、底盤については内外の温度差が 24° の場合である。CASE(2)として側壁下端で内側で -26° , 外側で -10° , 底盤部については中心において内側で -56° , 外側で -32° の温度分布である。なお計算に用いた材料定数、断面定数は以下の通り、 $E=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\alpha=10^{-5}$, $\nu=1/6$, $l=26.2 \text{ m}$, $a=32.85 \text{ m}$, $H_1=22 \text{ m}$, $H_2=5 \text{ m}$, $E_s=2 \text{ kg/cm}^3$

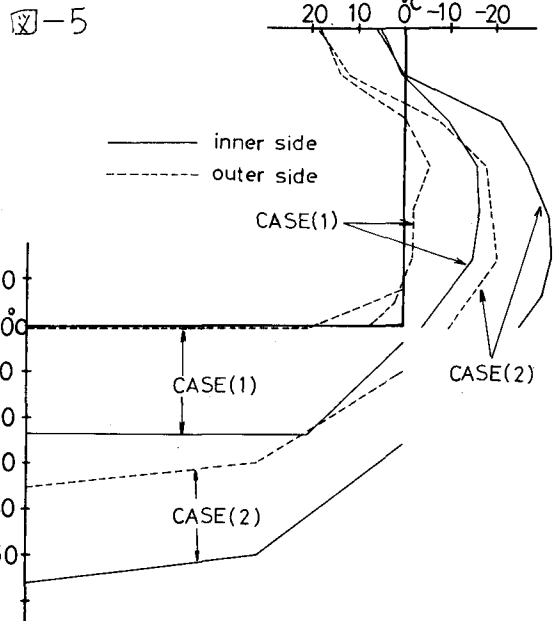
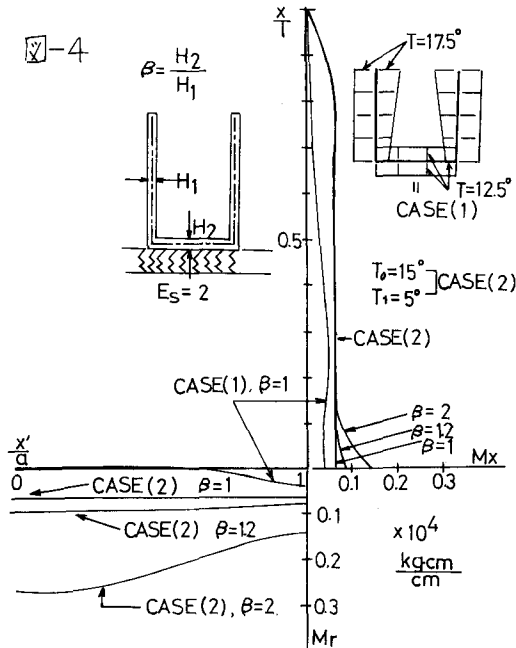


図-6は図-5に示した温度分布による断面力を図示したもので、底盤部と側壁部の結合状態が、剛結合、ヒンジ結合の2つの状態の値である。なお、図中には静水圧による断面力も図示してある。底盤部中心において大きな値を示し、設計上無視できないものと思われる。

5. 結び

以上、弾性地盤上の円筒形タンクの温度応力を有限要素法により解き、2.3の数値計算例を示した。特に本解析法は温度分布が複雑な変動を示すものの温度応力算定には有効な解析方法であると思われる。又本解析方法はストロークス要素を多少変更することにより非線形地盤の影響を含めて解析が可能である。

6. 参考文献

- 1) Szabo B.A. and Lee G. G; *Stiffness Matrix for Plates by Galerkin's Method*, Prof. of ASCE, EM3, 1969
- 2) 西井建明; 壁厚が直線的に変化する円筒形本體の温度応力解法と計算図表, 土木学会誌, 44巻, 10号

図-6

